

EL METODO DE REDUCCION CICLÍCA A LA ECUACION DE VORTICIDAD

I. PEREZ GARCIA*

R. MURILLO**

D. CASTELAN**

(Recibido: 19 de septiembre, 1984)

(Aceptado: 19 de noviembre, 1984)

RESUMEN

Se analiza un método numérico directo de reducción cíclica para resolver ecuaciones de tipo elíptico.

Al aplicar el método citado a la ecuación de vorticidad no-divergente y al introducir el Jacobiano de Arakawa, el Laplaciano truncado a cuarto orden y condiciones a la frontera reales, los resultados muestran un mayor alcance en el tiempo de pronóstico.

ABSTRACT

A direct numerical method of cyclical reduction is analyzed to solve elliptical equations.

The results show a larger range in the weather forecasting when using this method in the equation of non-divergent vorticity introducing the Arakawa's Jacobean and the Laplacian's truncate at 4th order and real boundary conditions.

* *Centro de Ciencias de la Atmósfera, UNAM, México, D. F., MEXICO.*

** *Srta. de Agricultura y Recursos Hidráulicos, México, D. F., MEXICO.*

INTRODUCCION

Recientemente han aparecido métodos numéricos directos para resolver ecuaciones elípticas. Hockney (1965) propone un método para la ecuación de Poisson, Barreto (1983) desarrolla el mismo método para la ecuación de Helmholtz y otro muy importante es el algoritmo de Buneman (1969). Estos autores explotan la estructura de la matriz que resulta al discretizar la ecuación elíptica y obtienen en forma recursiva la solución del problema de valores a la frontera.

El propósito del presente trabajo es describir una variante del método de reducción, que llamaremos "variante uno", donde se calcula en forma directa el valor del segundo miembro de la ecuación matricial finalmente reducida, con el objeto de encontrar la inestabilidad que ocurre debida al crecimiento exponencial de $E^{(t)}$ mencionada en Buzbee, Golub y Nielson (1970).

Las pruebas se hicieron para la ecuación elíptica de vorticidad y se compararon con el caso estable (variante de Buneman).

METODO DE REDUCCION CICLICA DE BLOQUE

El Método de Reducción Cíclica consiste en analizar la matriz que resulta de discretizar la ecuación elíptica y reducir recursivamente la ecuación matricial a sólo la mitad de incógnitas estructuradas de la misma manera que las originales, reduciendo así hasta una sola matriz incógnita (Stoer and Bulirsch, 1980).

Para esto, Hockney (1965) calculaba originalmente los valores propios de la matriz; esto fue eliminado por la variante de Buneman (Buzbee, Golub y Nielson, 1970). En el presente desarrollo se utilizarán un método similar y otra variante. La ecuación elíptica de segundo orden discutida por Rosmond y Faulkner (1976) con la condición a la frontera de Dirichlet es:

$$\Psi_{yy} + \alpha'(x) \Psi_{xx} + \beta'(x) \Psi_x - \gamma'(x) \Psi = \ell(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

$$\Psi(x, y) = h(x, y) \quad (2)$$

donde

$$\Omega = \left\{ (x, y) \mid a < x < b, c < y < d \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

es una región rectangular de la atmósfera ($a = 140^\circ$ oeste, $b = 60^\circ$ oeste, $c = 6^\circ$ norte, $d = 38^\circ$ norte), y $\partial\Omega$ es la frontera de Ω con α' , β' , γ' , ℓ y h como funciones continuas; la ecuación (1) contiene como caso particular la ecuación elíptica de vorticidad no divergente. Expresando (1) en forma matricial para una malla de 41×17 puntos, tenemos una ecuación matricial de 15×15 .

$$\mathbf{E}\Psi_{i2} + (-1)\Psi_{i2} = \mathbf{G}_{i2} \quad (3-1)$$

$$(-1)\Psi_{ij'-1} + \mathbf{E}\Psi_{ij'} + (-1)\Psi_{ij'+1} = \mathbf{G}_{ij'} \quad (3-2)$$

$$(-1)\Psi_{i15} + \mathbf{E}\Psi_{i16} = \mathbf{G}_{i16} \quad (3-3)$$

donde: (3-1) corresponde al primer renglón, (3-2) al j' -ésimo y (3-3) al último renglón,

con $j' = 3, \dots, 2^{n-1}$, $n = 4$,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha_i \beta_i \gamma_i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{40} \beta_{40} \end{bmatrix}_{39 \times 39}; \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \text{matriz} \\ \text{identidad} \end{bmatrix}_{39 \times 39}$$

$$\alpha_i = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \left(\frac{\Delta x \beta'_i}{2} - \alpha'_i\right); \quad \beta_i = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 (\gamma'_i \Delta x^2 + 2\alpha'_i)$$

$$\gamma_i = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \left(-\alpha'^2_i - \frac{\Delta x \beta'_i}{2}\right); \quad \mathbf{G}_{ij} = -\Delta^2 y \ell_{ij}; \quad \Psi_{ij} = (\psi_{2j}, \psi_{3j}, \dots, \psi_{40j}).$$

En (3-2), para $j' = j - 1, j, j + 1$ tenemos

$$(-1)\Psi_{ij-2} + E\psi_{ij-1} + (-1)\Psi_{ij} = G_{ij-1} \quad (4-1)$$

$$(-1)\Psi_{ij-1} + E\psi_{ij} + (-1)\Psi_{ij+1} = G_{ij} \quad (4-2)$$

$$(-1)\psi_{ij} + E\Psi_{ij+1} + (-1)\Psi_{ij+2} = G_{ij+1} \quad (4-3)$$

multiplicando (4-2) por E y sumándole (4-1) y (4-3) obtenemos la primera reducción

$$(-1)\Psi_{ij-2} + (E^2 - 21)\Psi_{ij} + (-1)\Psi_{ij+2} = EG_{ij} + G_{ij-1} + G_{ij+1} = G_{ij}^{(1)} \quad (5)$$

para $i = 2, 4, \dots, 40$ y $j = 3, 5, \dots, 15$, y condición a la frontera $\psi_{i1} = \Psi_{i17} = 0$.

La ecuación (5) es una matriz de 7×7 tridiagonal como (3), por lo que el proceso se puede aplicar nuevamente.

Multiplicando (5) por $E^2 - 21 = E^{(1)}$, obtenemos

$$(-1)\psi_{ij-2r} + E^{(2)}\Psi_{ij} + (-1)\psi_{ij+2r} = G_{ij-2r}^{(1)} + G_{ij+2r}^{(1)} + E^{(1)}G_{ij}^{(1)} = G_{ij}^{(1)} \quad (6)$$

con $j = 5, 9, 13$ y $r = 2$.

Repitiendo el proceso tenemos

$$(-1)\Psi_{ij-2r} + E^{(3)}\Psi_{ij} + (-1)\Psi_{ij+2r} = G_{ij}^{(r)} \quad (7)$$

para $j = 9, r = 3$ y $\psi_{i1} = \Psi_{i17} = 0$ con $E^{(r+1)} = (E^{(r)})^2 - 21$.

La ecuación (7) en forma explícita es

$$E^{(3)}\psi_{i9} = G_{i9}^{(3)} \quad (8)$$

donde:

$$E^{(3)} = ((E^2 - 21)^2 - 21)^2 - 21 \quad y$$

$$G_{i9}^{(3)} = \{ (E^2 - 21)^2 - 21 \} \{ (E^2 - 21)(EG_{i9} + G_{i8} + G_{i10}) + EG_{i7} + G_{i6} + G_{i8} + EG_{i11} + G_{i10} + G_{i12} \} + (E^2 - 21)(EG_{i5} + G_{i4} + G_{i6}) + EG_{i3} + G_{i2} + G_{i4} + EG_{i7} + G_{i6} + G_{i8} + (E^2 - 21)(EG_{i13} + G_{i12} + G_{i14}) + EG_{i11} + G_{i10} + G_{i12} + EG_{i15} + G_{i14} + G_{i16}.$$

para $i = 2, 4, \dots, 40$.

Factorizando $E^{(r)}$, (Stoer and Bulirsch, 1980)

$$E^{(r)} = (E - \tau_1 \mathbf{1}) \dots (E - \tau_j \mathbf{1})$$

donde:

$$\tau_j = 2 \cos \left\{ \left(\frac{2j-1}{2^{r+1}} \right) \pi \right\}$$

para $j = 1, 2, \dots, 2^r$ y $r = 3$, por lo que el primer miembro de la ecuación (4) queda como

$$\prod_{j=1}^{2^r} (E - \tau_j \mathbf{1}) \Psi_{i9} = G_{i9}^{(3)} \tag{9}$$

de (9) se determina Ψ_{i9} y de (6) se determina Ψ_{i5} y ψ_{i13} . De (5) se obtiene Ψ_{ij} para $j = 3, 7, 11, 15$ y de (4) se determinan los pares $j = 2, 4, \dots, 16$.

Al calcular $G_{i9}^{(3)}$ en (8) se introduce inestabilidad si se requiere ampliar la región de integración. Para evitar esto se emplea la variante de Buneman (1969), que aplicada en la ecuación (8) se expresa como

$$\prod_{j=1}^{2^3} (E - \tau_j \mathbf{1}) (\Psi_{i9} - P_{i9}^{(3)}) = Q_{i9}^{(3)} \tag{10-1}$$

Las matrices $P_{i9}^{(3)}$ y $Q_{i9}^{(3)}$ se obtienen de las fórmulas de recursión:

$$E^{(r)}(P_{ij}^{(r+1)} - P_{ij}^{(r)}) = P_{ij-2^r}^{(r)} + P_{ij+2^r}^{(r)} + Q_{ij}^{(r)} \tag{10-2}$$

$$Q_{ij}^{(r+1)} = Q_{ij-2^r}^{(r)} + Q_{ij+2^r}^{(r)} + 2P_{ij}^{(r+1)} \tag{10-3}$$

para $r = 0, 1, 2$ con las condiciones iniciales

$$E^{(0)} = E ; \quad P_{ij}^{(0)} = \mathbf{0} ; \quad Q_{ij}^{(0)} = G_{ij}^{(0)} = G_{ij}$$

La solución de (10-1) para $i = 2, \dots, 40$ es

$$\Psi_{i9} = (\Psi_{i9} - P_{i9}^{(3)}) + P_{i9}^{(3)}$$

En la ecuación (7) se emplea un procedimiento similar y se obtiene Ψ_{i5} , Ψ_{i13} con $\psi_{i1} = \psi_{i17} = 0$. Conociendo los valores impares se procede a calcular los valores pares.

SOLUCION DE LA ECUACION DE VORTICIDAD

La ecuación de vorticidad simple expresada como una ecuación elíptica tipo Poisson, para una región Ω de la atmósfera con frontera $\partial\Omega$, es

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial \psi'(x, y, t)}{\partial t} \right) = J(\nabla^2 \psi' + f, \psi') \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (11)$$

la cual, como caso particular de (1) es

$$\psi = \frac{\partial \psi'}{\partial t} ; \quad \alpha' = \beta' = 1 ; \quad \gamma' = 0 \quad \text{y} \quad \varrho = J(\nabla^2 \psi' + f, \psi')$$

donde $\psi' = gz/f$ es la función corriente, f el parámetro Coriolis, g la aceleración de la gravedad, z la altura geopotencial, ∇^2 el operador Laplaciano y J el operador Jacobiano. Las condiciones a la frontera para resolver (11) con la "variante uno" descrita en (3) - (8) y la variante de Buneman, son las mismas que se presentan en el trabajo clásico de Charney, Fjortoft y Von Neumann (1950). Donde se demuestra que la solución de (11) está determinada si se especifican el campo $\psi(x, y) \forall (x, y) \in \partial\Omega$ y la vorticidad de la parte de fluido que entra en Ω . Suponiendo además que

$$h(x, y) = \frac{\partial \psi'}{\partial t} \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

Con las condiciones a la frontera anteriores, Bennett y Kloeden (1978) demuestran que no es posible asegurar que (11) tiene soluciones físicas y demuestran que a partir de los datos iniciales suaves se pueden desarrollar singularidades en el gradiente de vorticidad no real y de la frontera, como lo muestran algunos resultados al final de este trabajo. La dificultad ocurre en los puntos donde la velocidad del flujo es tangente a $\partial\Omega$, la cual es un coeficiente en la forma hiperbólica de (11).

Al expresar en diferencias finitas (11), se trató de que la ecuación retuviera todas las propiedades integrales y de que los errores de truncación fueran mínimos, principalmente en el lado derecho de (11). Para lograr esto se introdujo el Jacobiano de Arakawa (1972), que tiene la propiedad de conservar la integral de la vorticidad al cuadrado y la energía cinética en una región cerrada. Para el Laplaciano que está en el lado derecho de (11), se emplea la relación

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{3D^2} \left\{ 2 \nabla^2 \psi + {}^x \nabla^2 \psi \right\} - \frac{1}{420D^2} \left\{ 13({}^+ \nabla^2 \psi)^2 + 16({}^+ \nabla^2 \psi)({}^x \nabla^2 \psi) + 6({}^x \nabla^2 \psi)^2 \right\} + \dots$$

donde: $D = \Delta X = \Delta y$ es el ancho de la malla y

$${}^+ \nabla^2 \psi = \psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 4\psi_{ij}$$

$${}^x \nabla^2 \psi = \left\{ \psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j-1} + \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j+1} - 4\psi_{ij} \right\} / 2$$

(Milne, 1970).

RESULTADOS

Como se mencionó anteriormente, el propósito del presente trabajo fue el uso del método de reducción cíclica a la ecuación de vorticidad no divergente, empleando la "variante uno" y la de Buneman, lo cual permite pronóstico a 5 días del campo geopotencial del nivel de 700 mb.

Se empleó este nivel debido a que algunos autores (Thompson *et al.*, 1979; Krishnamurti *et al.*, 1979a) afirman que el nivel de no divergencia en algunas regiones tropicales es el de 700 mb.

En la figura 1 se muestra el campo observado inicial (en proyección Mercator) correspondiente al día 11 de junio de 1979 para la hora 00Z.

Un aspecto importante de este campo es la presencia de un gran anticiclón centrado al sur de Estados Unidos. En las figuras 2a, 2b y 2c se muestra el campo de isohipsas observado para los días 12, 13 y 14 de junio de 1979 para la hora 00Z, respectivamente. Taubensee (1979) muestra y analiza el campo de flujo medio (isohipsas) en una región más amplia observado del 12 al 16 de junio de 1979 (figura 8a).

La región de integración está formada de 41×17 puntos, con longitud de la malla $\Delta X = \Delta Y = 2^\circ$, en proyección Mercator.

En las figuras 3a, 3b, 3c y 3d se muestran los campos pronosticados a 24, 48, 72 y 120 horas, respectivamente.

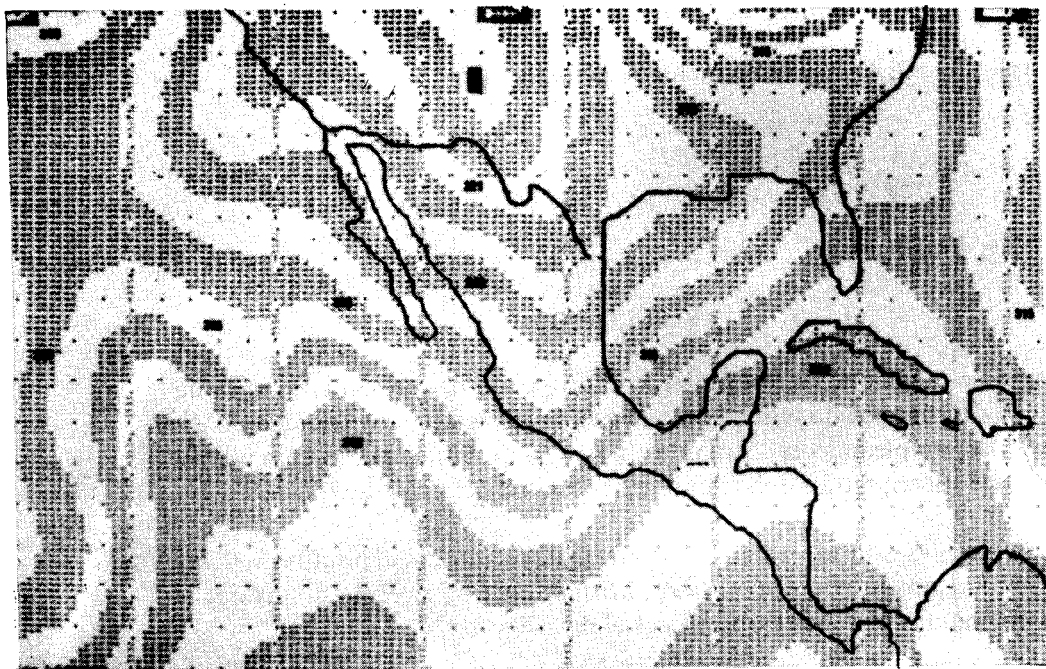


Fig. 1. Mapa de isohipsas del 11 de junio de 1979 del nivel 700 mb, 00Z (observado y graficado por computadora).

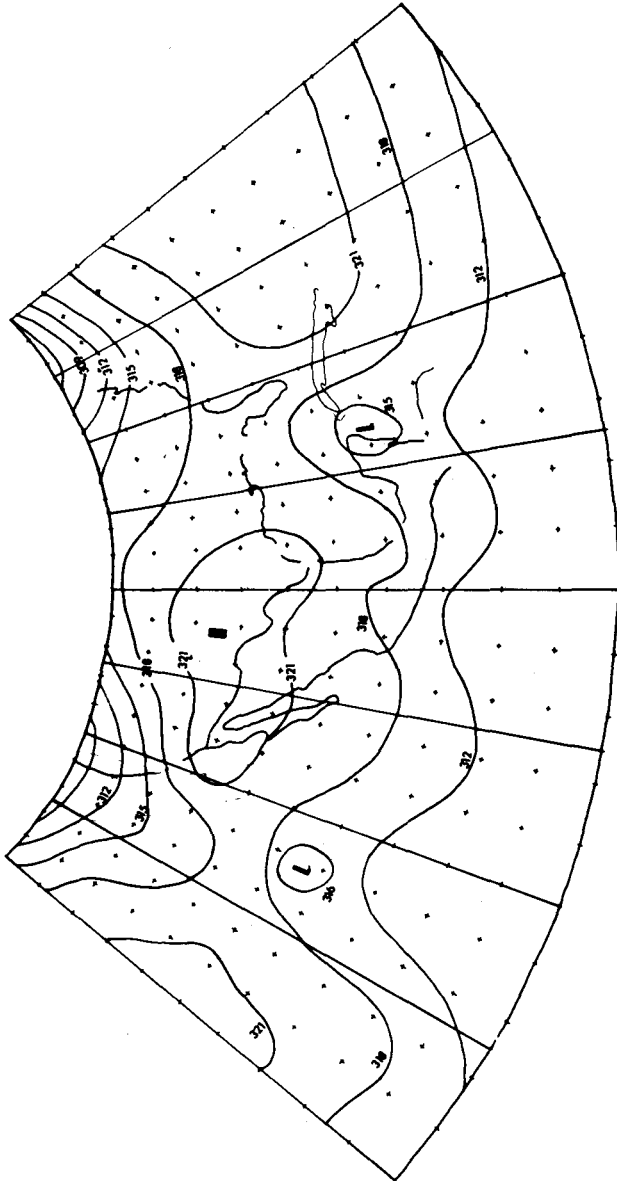


Fig. 2a. Mapa de isohipsas del 12 de junio de 1979 del nivel 700 mb, 00Z (observado).

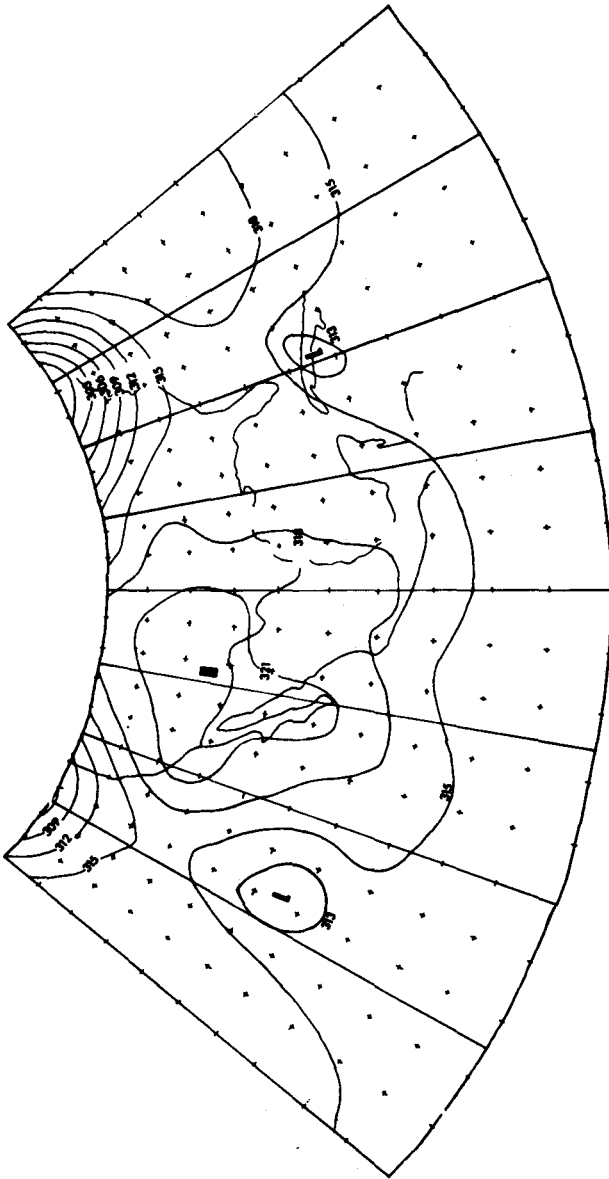


Fig. 2b. Mapa de isohipsas del 13 de junio de 1979 del nivel 700 mb. 00Z (observado).

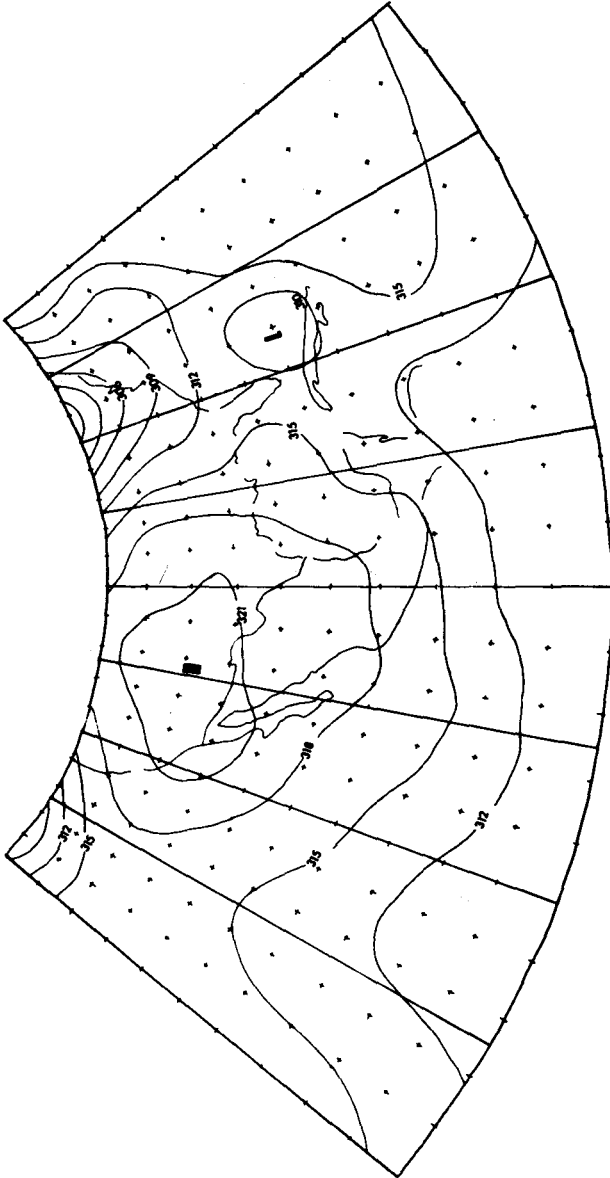


Fig. 2c. Mapa de isohipsas del 14 de junio de 1979 del nivel 700 mb, 00Z (observado).

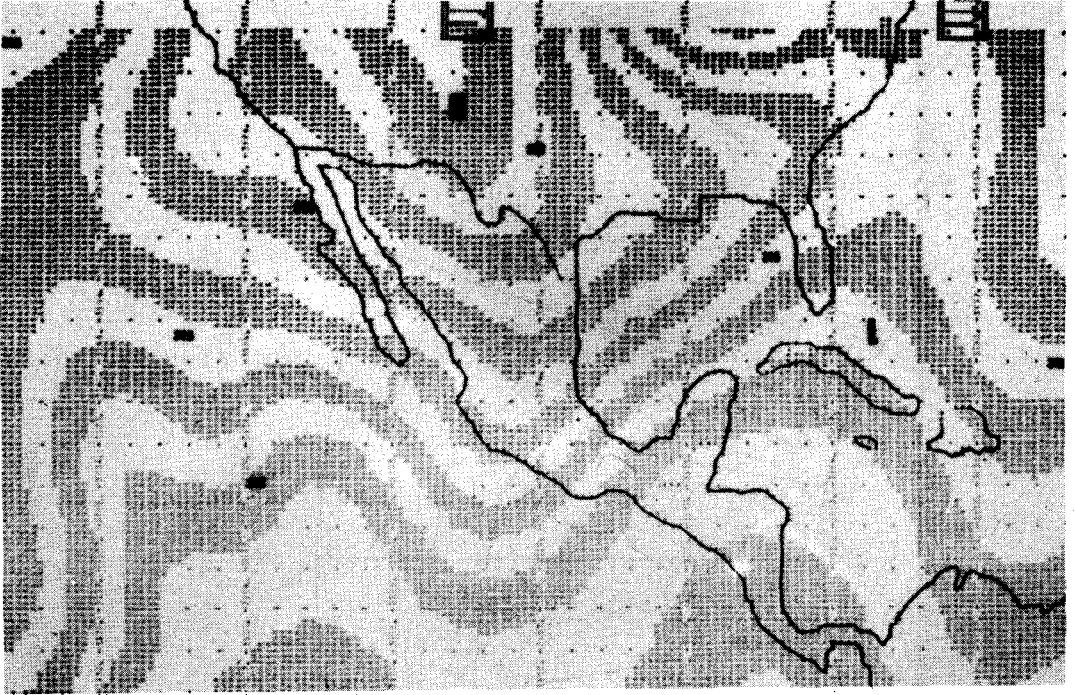


Fig. 3a. Mapa de isohipsas del 12 de junio de 1979 del nivel 700 mb. 00Z (calculado) con suavizador cada media hora.

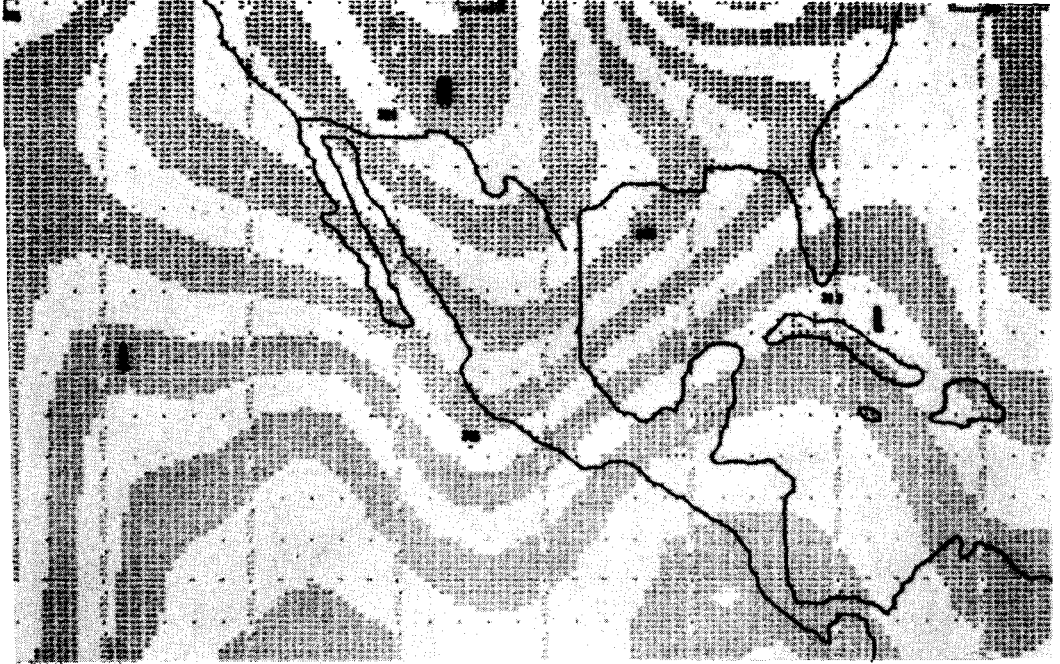


Fig. 3b. Mapa de isohipsas del 13 de junio de 1979 del nivel 700 mb, 00Z (calculado) con suavizador cada media hora.

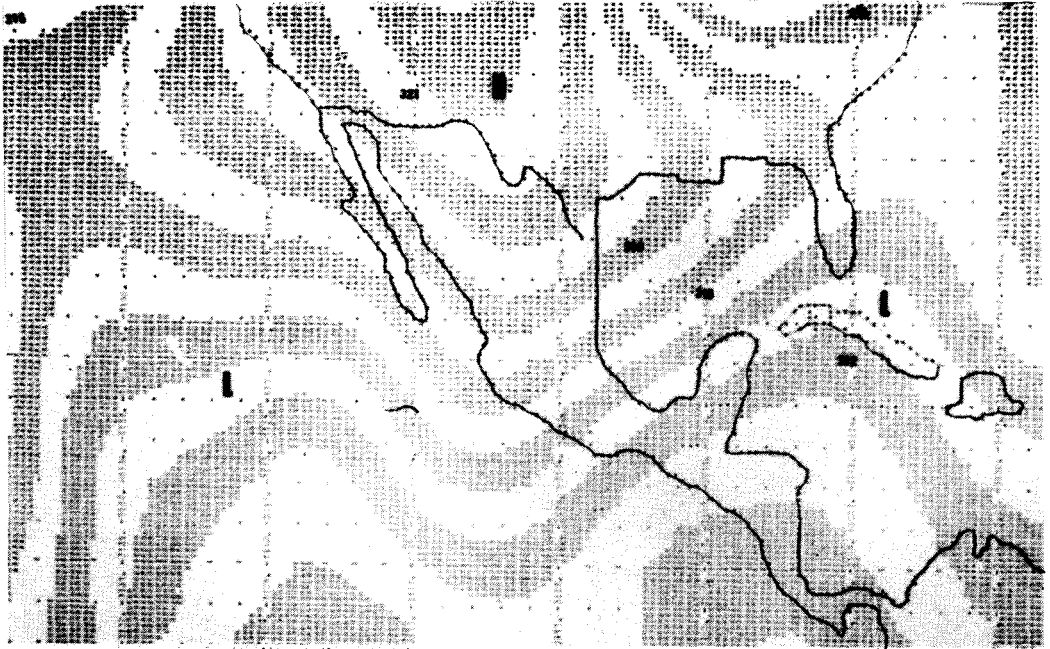


Fig. 3c. Mapa de isohipsas del 14 de junio de 1979 del nivel 700 mb, 00Z (calculado) con suavizador cada media hora.

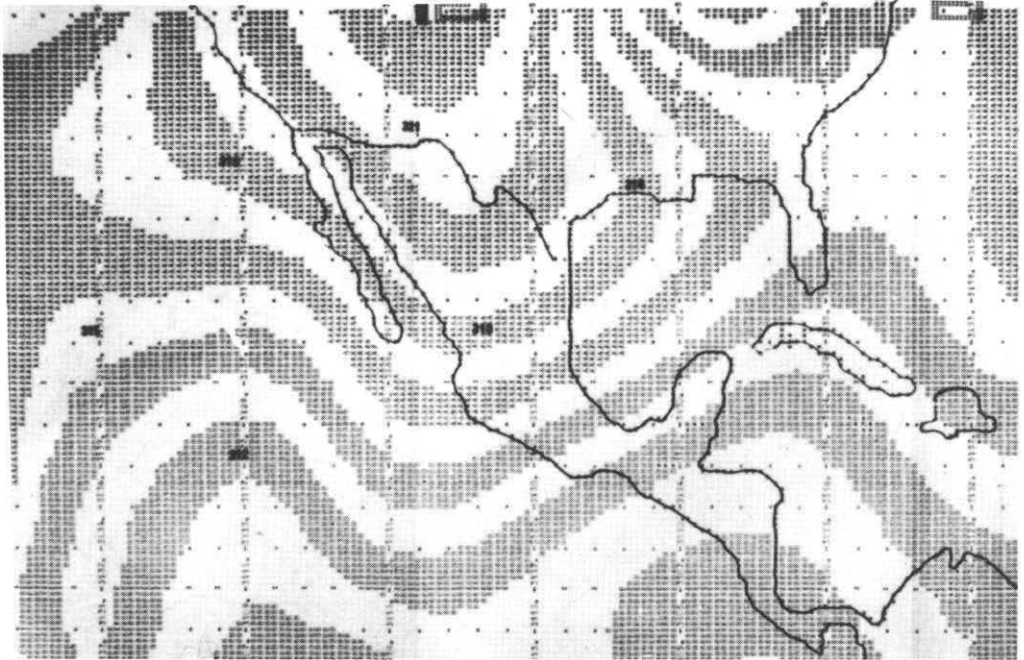


Fig. 3d. Mapa de isohipsas del 16 de junio de 1979 del nivel 700 mb, 00 (calculado) con suavizador cada media hora.



Fig. 4a. Mapa de isohipsas del 12 de junio de 1979 nivel 700 mb, 00Z (calculado) con suavizador cada 6 horas.

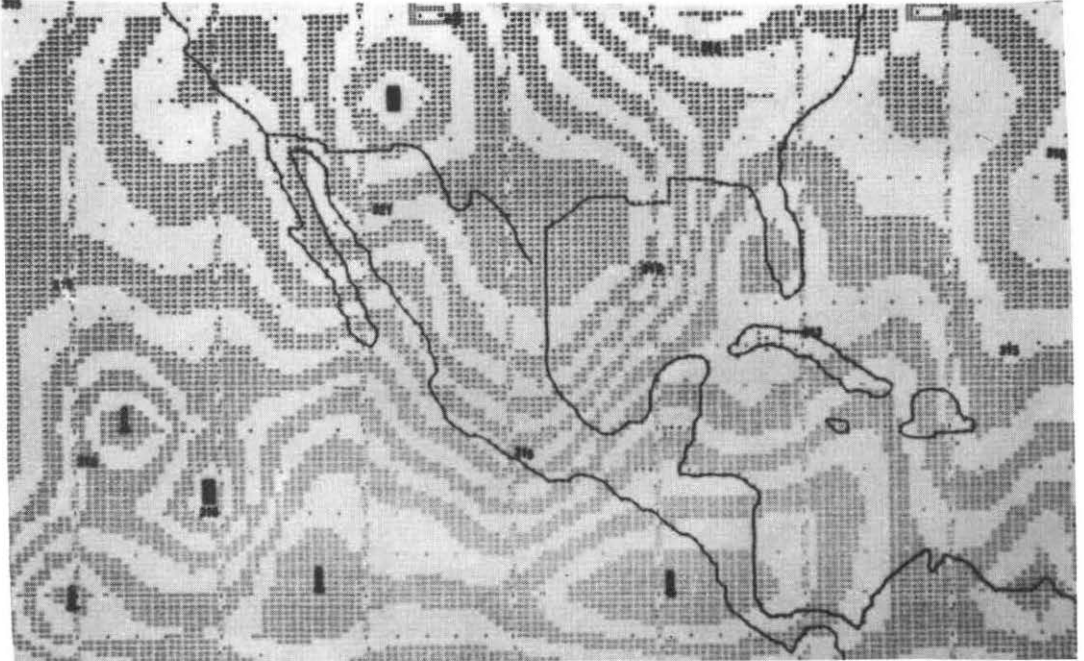


Fig. 4b. Mapa de isohipsas 13 de junio de 1979 del nivel 700 mb, 00Z (calculado) con suavizador cada 6 horas.

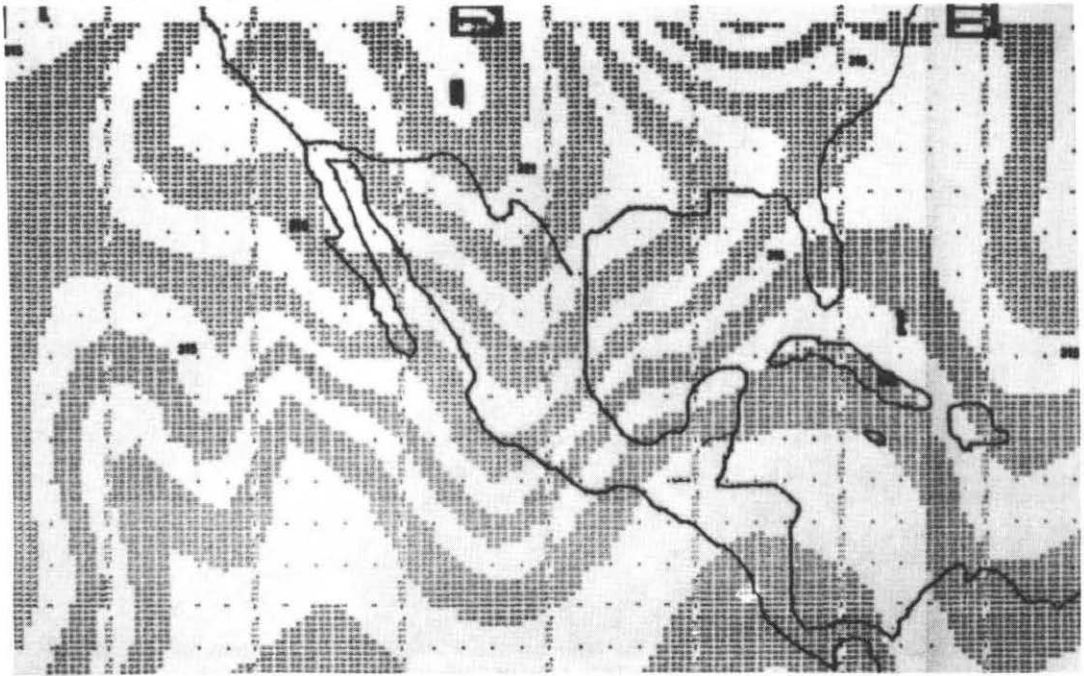


Fig. 5a. Mapa de isohipsas del 12 de junio de 1979 del nivel 700 mb, 00Z (calculado) con suavizador cada 3 horas.

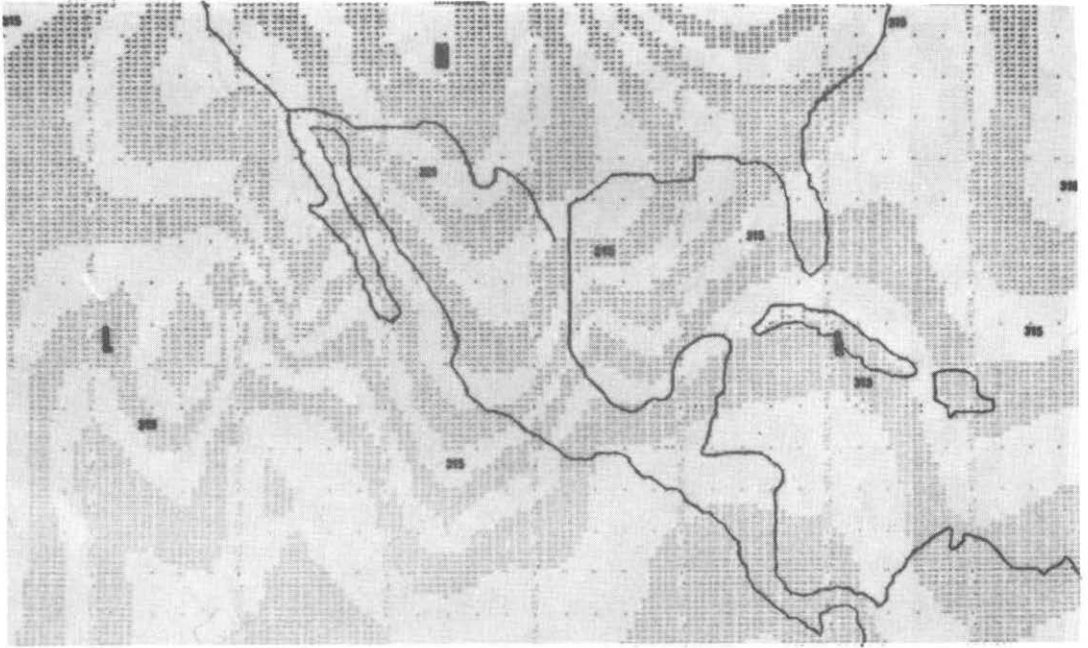


Fig. 5b. Mapa de isohipsas del 13 de junio de 1979 del nivel 700 mb, 00Z (calculado) con suavizador cada 3 horas.

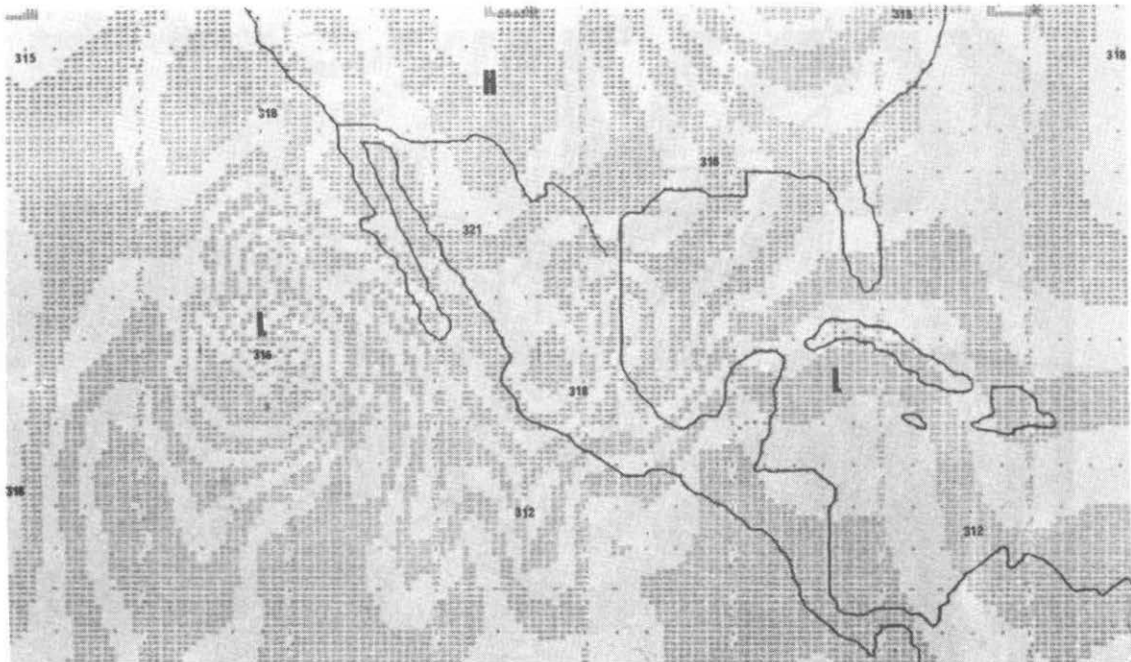


Fig. 5c. Mapa de isohipsas del 14 de junio de 1979 del nivel 700 mb, 00Z (calculado) con suavizador cada 3 horas.

Cuando se resuelve el problema de valores iniciales (ecuación 11), con la "variante uno" se introduce en cada paso de tiempo (media hora) el suavizador de Shuman (1959), con el propósito de eliminar las ondas cortas que aparecen en el curso de la integración, debidas a los errores de truncación. De esta manera se logran integraciones hasta de 5 días o más, con poco desplazamiento del anticiclón y el campo vecino hacia el NW, que comparado con el observado muestra una buena concordancia con la realidad (véanse figuras: 2a con 3a, 2b con 3b, 2c con 3c, 2d y 3d).

En general, los sistemas observados y pronosticados mantuvieron un carácter estacionario. En un intento por averiguar este carácter, se empleó la variante de Buneman. Los resultados que se obtuvieron sólo diferían en el orden de 4 metros geopotenciales o menos, por lo cual se omiten.

Cambiando el intervalo del suavizador (6 horas) en la variante de Buneman, se nota cómo los sistemas de longitud de onda corta empiezan a crecer sin límite en un pronóstico a dos días, mostrándose inestabilidades que bloquean al sistema de gran escala, principalmente en regiones de latitudes bajas, donde el flujo es tangente a la frontera inferior, (figuras 4a y 4b).

En las figuras 5a, 5b y 5c se muestra un pronóstico a 24, 48 y 72 horas, respectivamente, con la "variante uno" usando el suavizador de 3 horas. Se puede observar que el uso de este suavizador no permitirá pronóstico arriba de las 48 horas, por las mismas causas que en el caso del suavizador de 6 horas.

CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo muestran que al aplicar el método directo a la ecuación de vorticidad con la "variante uno", en una parte de la región IV no se encontró la inestabilidad que ocurre debida al crecimiento exponencial de $E^{(r)}$ (Buzbee, Golub y Nielson, 1970).

Comparados con la variante de Buneman con las mismas condiciones iniciales, los valores de altura pronosticados sólo diferían en el orden de

4 metros geopotenciales; al introducir las mejoras mencionadas en la sección 3 se ve un mayor alcance en el pronóstico, dependiendo esto del suavizador de Shuman (1957), cuyo umbral no fue determinado y es tema de trabajo futuro. Los resultados demuestran que las zonas de inestabilidad computacional se encuentran en la parte inferior de la región de integración, y que probablemente se deben al mal análisis subjetivo realizado. Actualmente se está desarrollando un esquema de análisis objetivo para regiones tropicales.

En el presente trabajo encontramos que es posible un pronóstico estable hasta 5 días por el método matricial, usando la ecuación de vorticidad.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración de las M. en C. Telma G. Castro y Elba E. Villanueva U., en el desarrollo del presente trabajo; asimismo a Guadalupe Camacho por su eficiente trabajo de mecanografía.

BIBLIOGRAFIA

- ARAKAWA, A., 1972. Design of the UCLA General Circulation model. Dept. of Met., Univ. of Calif., Los Angeles, Technical Rep. No. 7.
- BARRETO, B. F., 1983. Solución de la ecuación de Helmholtz usando análisis de Fourier con reducción cíclica recursiva y su aplicación en la predicción numérica. Tesis Profesional, Junio 1983, Fac. de Ciencias, UNAM.
- BENNETT, A. F. and P. E. KLOEDEN, 1978. Boundary Conditions for Limited-Area Forecasts. *J. Atm. Sci.*, 35, 990-996.
- BUNEMAN, O., 1969. A compact non-iterative Poisson solver, Rep. 294. Stanford University for Plasma Research, Stanford, Calif.
- BUZBEE, B. L., G. H. GOLUB and C. W. NIELSON, 1970. On direct methods for solving Poisson's Equation. *SIAM J. Num. Anal.*, 7, 627-656.
- CHARNEY, J. G., R. FJORTOFT and J. VON NEUMAN, 1950. Numerical Integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus*, 2, 237-254.

- HOCKNEY, R. W., 1965. A fast direct solution of Poisson's equation using Fourier analysis. *J. Assoc. Com. Mach.*, 12, 95-113.
- KRISHNAMURTI, T. N., H. L. PAN, C. B. CHANG, J. PLOSHAY, D. WALKER and A. W. OODALLY, 1979. Numerical Weather Prediction for GATE. *Quart. J. Roy. Met. Soc. October*.
- MILNE, W. E., 1970. Numerical Solution of Differential Equations. Dover.
- ROSMOND, T. F. and F. D. FAULKNER, 1976. Direct Solution of Elliptic Equations by Block Cyclic Reduction and Factorization. *Mon. Wea. Rev.*, 104, 641-649.
- SHUMAN, F. G., 1957. Numerical Methods in Weather Prediction: Smoothing and Filtering. *Mon. Wea. Rev.*, 85, 357-361.
- STOER, J. and R. BULIRSCH, 1980. Introduction to Numerical Analysis. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- TAUBENSEE, R. E., 1979. Weather and Circulation of June 1979-Record Cold in the Southeast. *Mon. Wea. Rev.*, 107, 1230-1235.
- THOMPSON, R. A., S. W. PAYNE, E. E. RECKER and R. J. REED, 1979. Structure and properties of synoptic-scale wave disturbances in the intertropical convergence zone of the Eastern Atlantic. *J. Atmos. Sci.*, 36, 53-72.