

MODELO PROBABILISTICO DE PRONOSTICO POR PUNTO

T. CASTRO*

L. Le MOYNE*

E. VILLANUEVA*

(Recibido: 16 de abril, 1985)

(Aceptado: 7 de marzo, 1986)

RESUMEN

Tratamos un modelo en estrategia secuencial adaptiva, con estadística Bayesiana y función de costos de mínimo cuadrado. Se utilizan los datos de isohipsas de a lo más diez días en secuencia y se pronostica el valor que tomará la isohipsa exactamente encima de la estación que reporta los datos, lográndose una buena aproximación en el pronóstico a cualquier nivel atmosférico, con un mínimo esfuerzo computacional.

ABSTRACT

We try a model in adaptive sequential strategy, with Bayesian statistics and minimum square cost function. We use *isohipsas* information of at most ten days in sequence and forecast the isohipsa value just above the station reporting the data, we get a good approximation in forecast at all atmospheric levels with a minimal computer effort.

* *Centro de Ciencias de la Atmósfera, UNAM, México 04510, D. F., MEXICO.*

INTRODUCCION

Desde hace algunos años se han abandonado los modelos filtrados de tipo físico para buscar nuevos caminos en el pronóstico del tiempo. En otras ramas de la Física se han utilizado sistemáticamente técnicas adaptivas que nacen básicamente de la Teoría de Control, con bastante éxito.

Este trabajo es un intento por utilizar estas técnicas en la predicción del tiempo.

EL MODELO

Sea Ω (Ferguson, 1967) el espacio de estrategias y sea $S(\hat{\theta}|x) = S(\hat{\theta}|y_1 \dots y_n)$ la estrategia para estimar el valor futuro $\hat{\theta}$ cuando se ha presentado los valores secuenciales $y_1 \dots y_n$ de la variable a estimar; sea $C(\hat{\theta}, \theta)$ la función de costos al decidir $\hat{\theta}$ cuando el valor real del estado es θ , proponemos la función de costos

$$C(\hat{\theta}, \theta) = |\hat{\theta} - \theta|^2 \quad (1)$$

Sea $\omega(\theta|x)$ la probabilidad *a posteriori* del estado θ dada la observación x .

Sea

$$\beta(\omega) = \min_{\delta} C(S, \omega) \quad (2)$$

el estimador Bayesiano que dará la acción Bayesiana $\hat{\theta}_0 = a_0$ como función de $\hat{\theta} = S_0(x)$ del conjunto $x = (y_1 \dots y_n)$ de las observaciones, donde a_0 es el valor de θ que calcularemos con $\beta(a)$ usando

$$\hat{\theta} = \alpha_0 \xi_0(x) + \alpha_1 \xi_1(x) + \alpha_2 \xi_2(x) + \dots + \alpha_n \xi_n(x) \quad (3)$$

donde Nieto de Alba (1977):

$$\xi_0(x) = C_{00}$$

$$\xi_1(x) = C_{10} + C_{11} X$$

$$\xi_2(x) = C_{20} + C_{21} X + C_{22} X^2$$

$$\xi_n = C_{n0} + C_{n1} X + C_{n2} X^2 + \dots + C_{nn} X^n$$

a los que exigiremos que cumplan la condición de ortogonalidad

$$\sum_{i=1}^n \xi_k(x_i) \xi_n(x_i) = 0; \quad k \neq n \quad (4)$$

En cada uno de los puntos $y_1 \dots y_n$, si requiriéramos que los ξ_k , $k = 1 \dots r$ sean ortogonales a $\xi_0(x)$

$$0 = \sum_i \xi_0(x_i) \xi_k(x_i) = C_{00} \sum_i (C_{k0} + C_{k1} x_i + C_{k2} x_i^2 + \dots + C_{kk} x_i^k) =$$

$$n C_{00} (C_{k0} + C_{k1} \bar{x} + C_{k2} \bar{x}^2 + \dots + C_{kk} \bar{x}^k)$$

haciendo $C_{00} = k_0$ y para $k = 1, 2 \dots r$ debe verificarse que

$$C_{k0} = -C_{k1} \bar{x} - C_{k2} \bar{x}^2 = \dots - C_{kk} \bar{x}^k$$

esta primera condición requiere que los polinomios tomen la forma

$$\xi_0(x) = K_0$$

$$\xi_1(x) = C_{11}(x - \bar{x})$$

$$\xi_2(x) = C_{21}(x - \bar{x}) + C_{22}(x^2 - \bar{x}^2)$$

$$\xi_r(x) = C_{r1}(x - \bar{x}) + C_{r2}(x^2 - \bar{x}^2) + \dots + C_{rr}(x^r - \bar{x}^r)$$

y en virtud de la condición

$$\bar{x}^k = \frac{1}{n} \sum_i x_i^k$$

se tendrá

$$\sum_{i=1}^n (x_i^k - \bar{x}^k) = \sum_{i=1}^n x_i^k - n \bar{x}^k = 0$$

se sigue que los polinomios cumplan la condición para cada i

$$\sum_{i=1}^n \xi_k(x_i) = \sum_{i=1}^n (C_{k1}(x_i - \bar{x}) + C_{k2}(x_i^2 - \bar{x}^2) + \dots + C_{kk}(x_i^k - \bar{x}^k))$$

$$= C_{k1} \sum_i (x_i - \bar{x}) + C_{k2} \sum_i (x_i^2 - \bar{x}^2) + \dots + C_{kk} \sum_i (x_i^k - \bar{x}^k) = 0$$

finalmente

$$\sum_{i=1}^n \xi_k(x_i) = 0 \quad (5)$$

Requerimos ahora que los $\xi_k(x)$ para $k = 2, 3 \dots r$ sean ortogonales a ξ_1 .

Continuando con el proceso, exigiremos que todos los polinomios sean ortogonales entre sí, obteniendo

$$\xi_0 = K_0$$

$$\xi_1 (X) = K_1 (X - \bar{X})$$

$$\xi_2 (X) = C_{22} (X^2 - \bar{X}^2 - \frac{\bar{X}^3 - X \bar{X}^2}{\bar{X}^2 - X^2} (X - \bar{X}))$$

$$\xi_3 (X) = C_{32} - (X^2 - \bar{X}^2 - \frac{X^3 - X \bar{X}^2}{\bar{X} - X} (X - \bar{X})) + C_{33} (X^3 - \bar{X}^3 \frac{X^4 - X \bar{X}^3}{X^2 - \bar{X}^2} (X - \bar{X}))$$

$$\xi_n (X) = C_{n2} (X^2 - \bar{X}^2) \dots \dots \dots etc.$$

los polinomios $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_r$ están determinados hasta los factores multiplicativos $k_1 \dots k_r$ que contienen los factores de escala del problema, o bien se hacen simplemente $k_0 = k_1 = k_2 \dots k_r = 1$.

Substituyendo en (1) y como $\xi_0 (X) = 1$, tenemos

$$NC = \sum (\alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 (X_i) + \alpha_2 \xi_2 (X_i) + \dots + \alpha_n \xi_n (X_i) - Y_i)^2$$

Para la condición de (2) (mínimo en β) $\frac{\partial \beta^2}{\partial \alpha_i} = 0, \beta(w) = \min C (s, w)$

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha_0} = \frac{2}{N} \sum_i (\alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 (X_i) + \alpha_2 \xi_2 (X_i) + \dots + \alpha_n \xi_n (X_i) - Y_i)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha_0} = 2 (\alpha_0 - \bar{Y}) \text{ por condición (5)}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha} = \frac{2}{N} \sum_i (\alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 (X_i) + \alpha_2 \xi_2 (X_i) + \dots + \alpha_n \xi_n (X_i) - Y_i) \xi_i (X_i) =$$

$$\frac{2}{N} (\alpha_0 \sum_i \xi_i (X_i) + \alpha_1 \sum_i \xi_1^2 (X_i) + \alpha_2 \sum_i \xi_1 (X_i) \xi_2 (X_i) + \dots + \alpha_n \sum_i \xi_1 (X_i)$$

$$\xi_n (X_i) - \sum_i Y_i \xi_i (X_i))$$

en virtud de 5 y 4 queda finalmente

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha_1} = 2 (\alpha_1 \overline{\xi_1^2 (X)} - \bar{Y} \overline{\xi_1 (X)}) = 0$$

así en general tenemos

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha_k} = 2 (\alpha_k \overline{\xi_k^2 (X)} - \bar{Y} \overline{\xi_k (X)}) = 0$$

obtenemos al final

$$\alpha_0 = \bar{Y}, \alpha_1 = \frac{\overline{Y \xi_1 (X)}}{\overline{\xi_1^2 (X)}}, \alpha_2 = \frac{\overline{Y \xi_2 (X)}}{\overline{\xi_2^2 (X)}}, \alpha_n = \frac{\overline{Y \xi_n (X)}}{\overline{\xi_n^2 (X)}}$$

así la regresión es

$$\hat{y} = \bar{y} + \frac{\overline{y \xi_1(x)}}{\overline{\xi_1^2(x)}} \xi_1(x) + \frac{\overline{y \xi_2(x)}}{\overline{\xi_2^2(x)}} \xi_2(x) + \dots + \frac{\overline{y \xi_n(x)}}{\overline{\xi_n^2(x)}} \xi_n(x)$$

El orden polinomial se ve limitado básicamente por la cantidad de datos que se tienen acumulados, siendo como máximo $N-1$, donde N es el número total de días presentes en el archivo para procesos de tipo operativo; no se requiere en general más de 10 días para tener una buena aproximación. El óptimo de regresión (Anderson y Bancroft, 1952) se determina estimando la varianza hasta detectar el orden polinomial donde ésta crece.

RESULTADOS

Las figuras 1 y 2 muestran los campos de isohipsas observados para los días 20 y 21 de septiembre de 1983 a 500 mb, respectivamente. Mediante un análisis subjetivo de estos campos es posible observar en la figura 1 un sistema de alta presión a 5 900 m., localizado en el norte y el centro de la República Mexicana, el Golfo de México, Florida y el Caribe, también se pueden observar dos vaguadas, una con orientación NE-SO y la otra con orientación N-S.

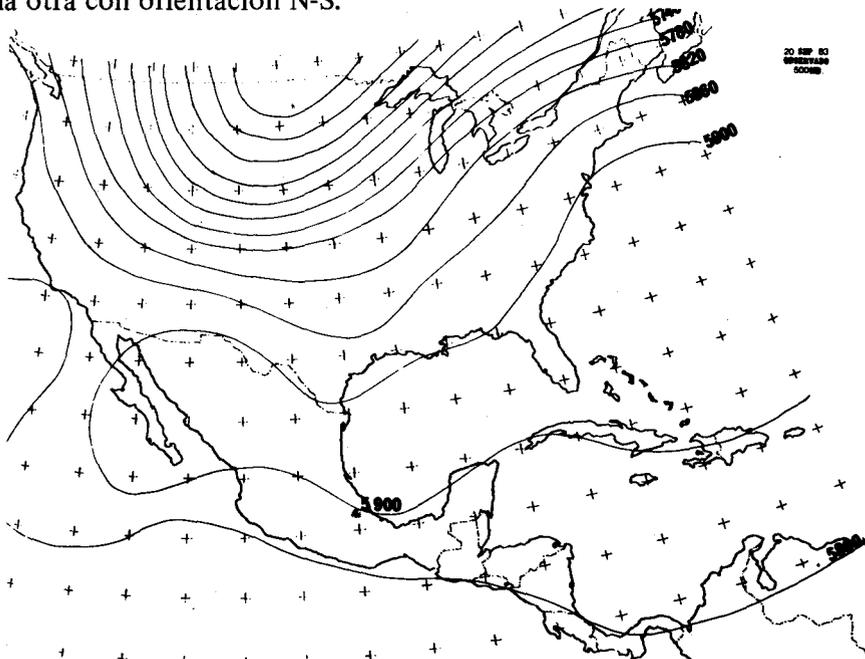


Figura 1.

En la figura 2 se puede observar que el canal de alta presión a 5 900 m, que aparecía 24 horas antes, ahora se “rompe” en tres sistemas de alta presión, uno localizado en el NO de México, otro en el centro del Golfo de México y por último el que abarca parte de Cuba y otras islas del Caribe. Este rompimiento puede deberse al avance y penetración de las vaguadas en la zona NE de México.

Al comparar las figuras 2 y 3, observamos que el comportamiento del sistema descrito anteriormente, lo pronostica con una gran precisión el modelo presentado en este trabajo.

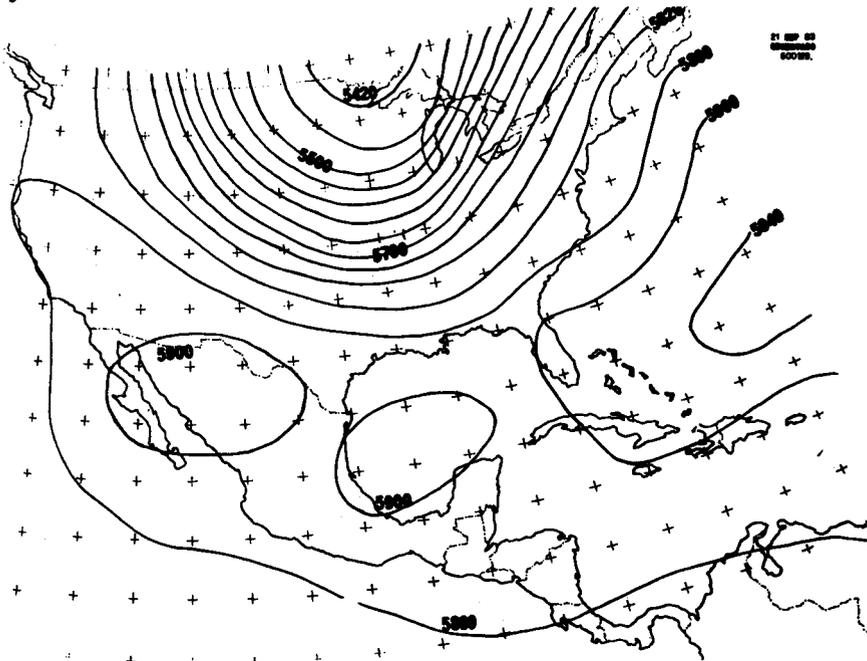


Figura 2.

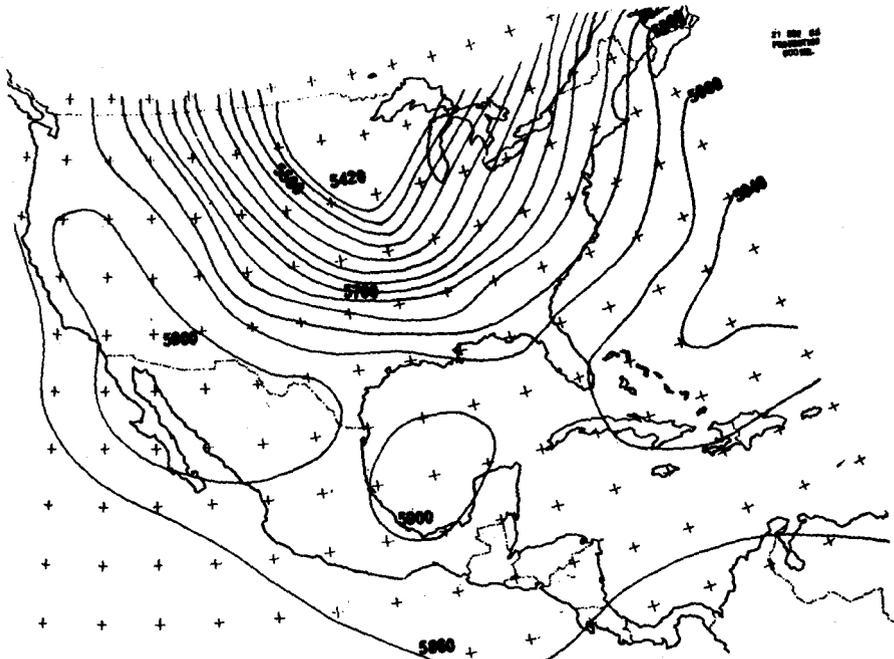


Figura 3.

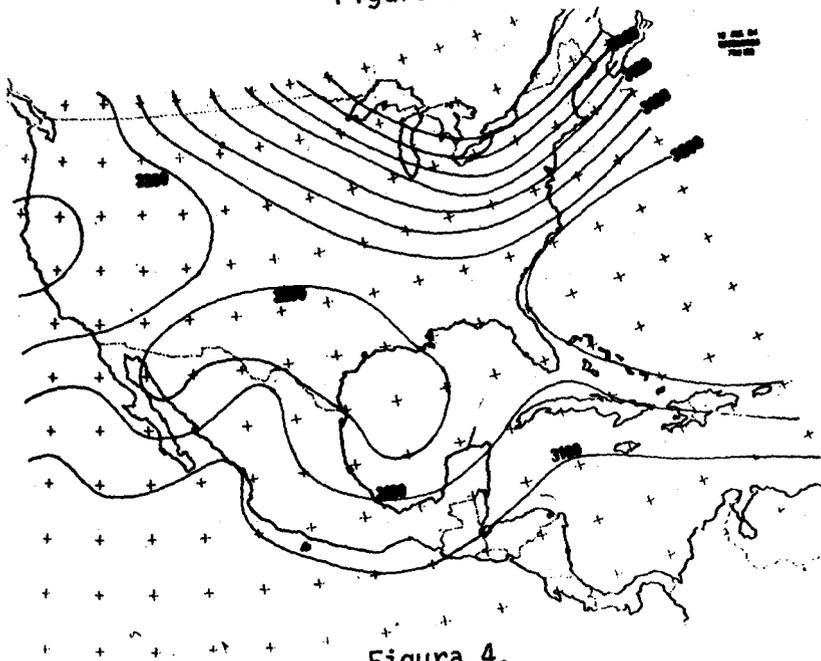


Figura 4.

En las figuras 4 y 5 aparecen los campos de isohipsas observados para los días 16 y 17 de julio de 1984 a 700 mb, respectivamente. A través de un análisis subjetivo, se observa en la figura 4 un canal de alta presión formado por tres sistemas a 3 200m, localizados en el Oeste, Sur y Este de Estados Unidos; también es posible observar una vaguada con orientación N-S. En la figura 5 se observa que la vaguada retrocede y penetra, lo que trae como consecuencia que los sistemas de alta presión a 3 200 m emigren hacia el Este, dejando ahora en su lugar un canal de alta presión a 3 160 m. Al observar la figura 6, que corresponde al pronóstico del día 17 de julio de 1984 a 700 mb, se ve cómo el modelo pronostica adecuadamente el desarrollo de los sistemas descritos anteriormente.

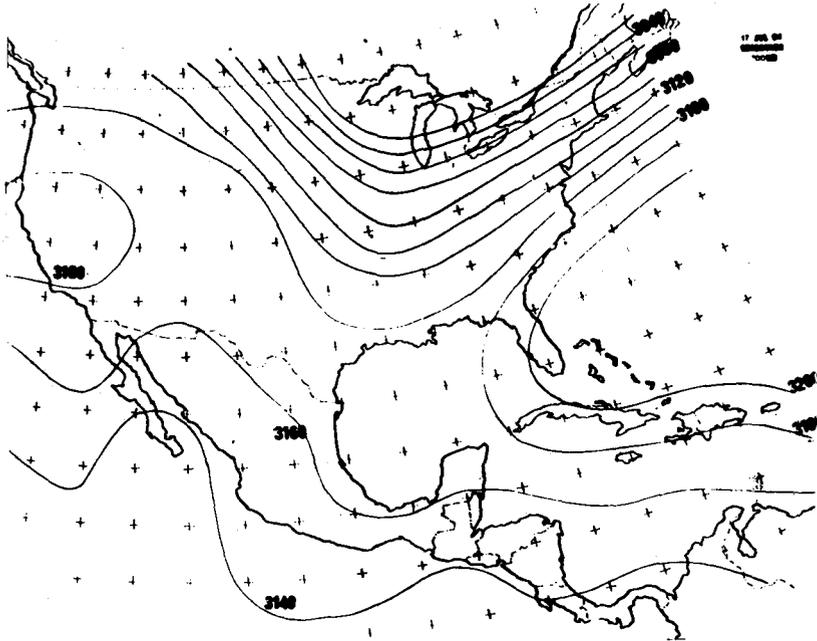


Figura 5.

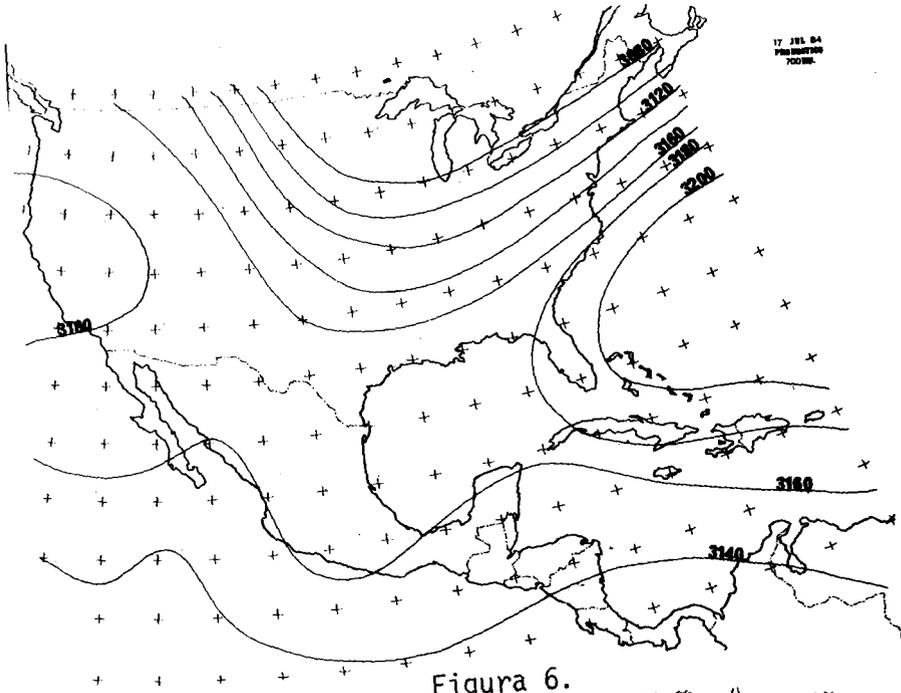


Figura 6.

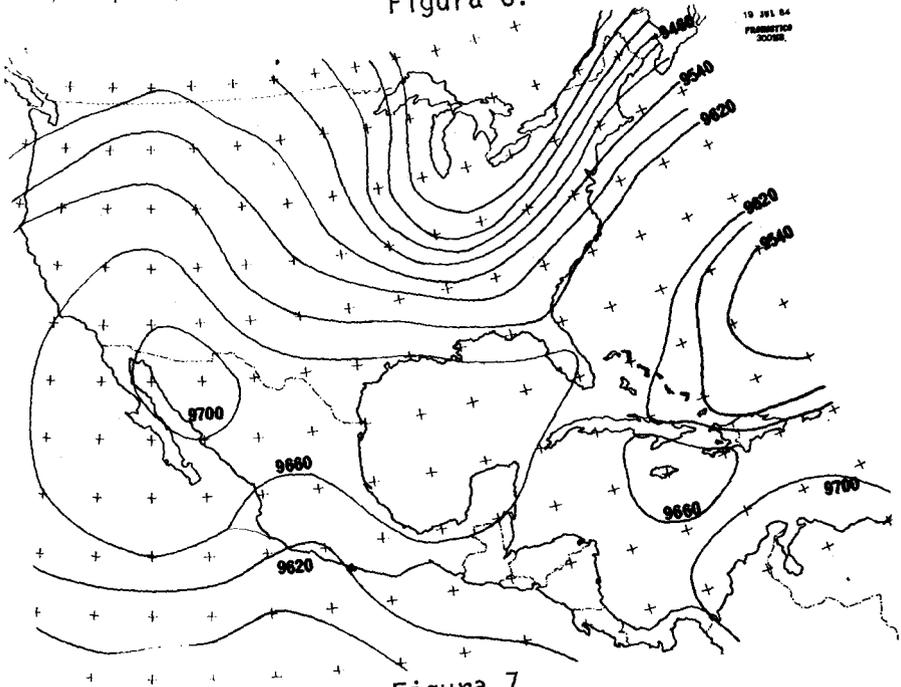


Figura 7.

Los campos de isohipsas observados para los días 19 y 20 de julio de 1984 a 300 mb se muestran en las figuras 8 y 9, respectivamente. En la figura 8 se observa, como puntos de interés, un sistema de alta presión a 9 660 m en el centro de nuestra región de estudio y una vaguada con orientación NE-SO, que penetra al norte de Florida, lo que conlleva un rompimiento del sistema de alta presión a 9 660 m en dos sistemas, 24 horas después (figura 9). Este tipo de movimientos son pronosticados en buena medida por el modelo (compárese figura 8 con 10).

Al observar las figuras 7 y 9, que corresponden al 19 de julio de 1984 a 300 mb, observado y pronosticado, respectivamente, se ve que los sistemas son reproducidos muy bien por el modelo de pronóstico por punto.

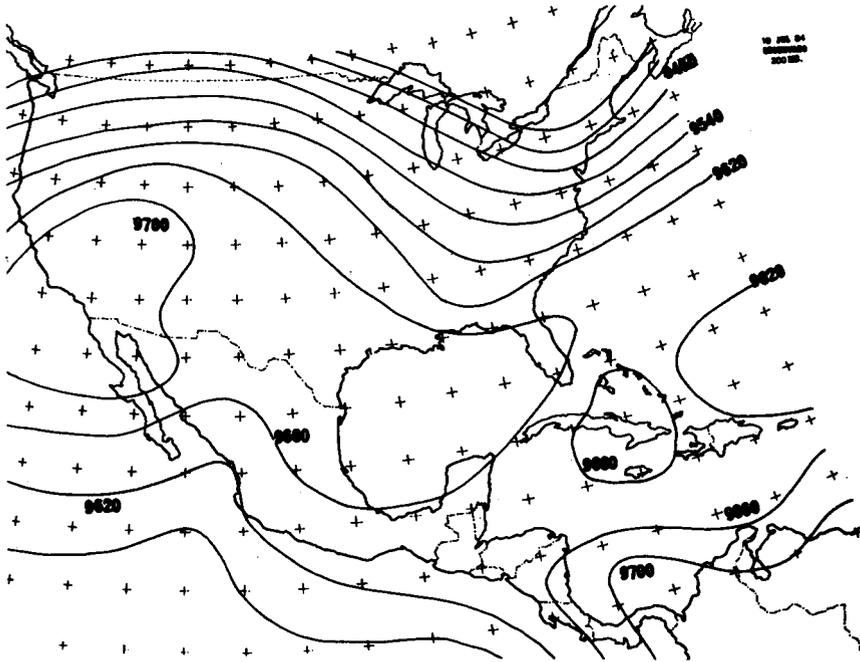


Figura 8.

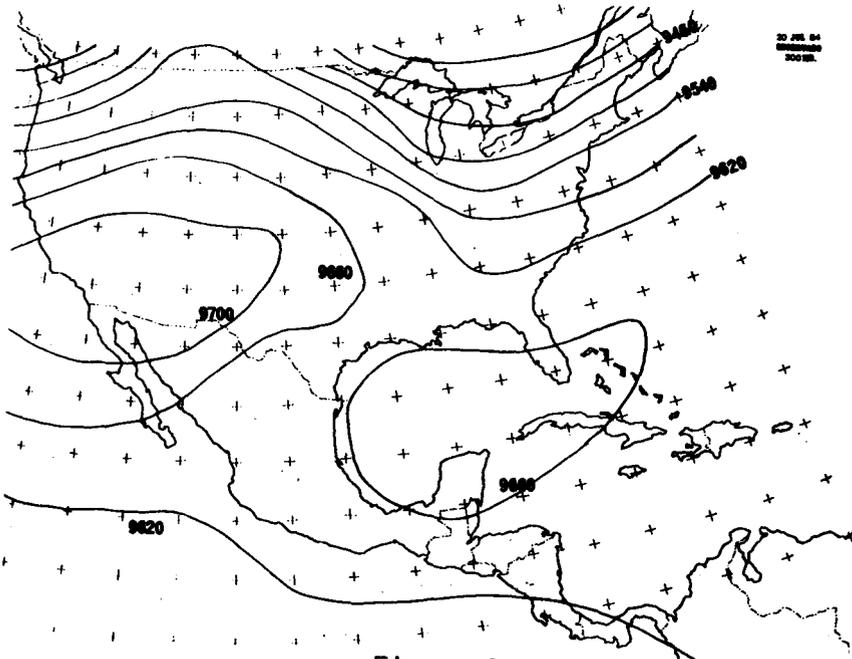


Figura 9.

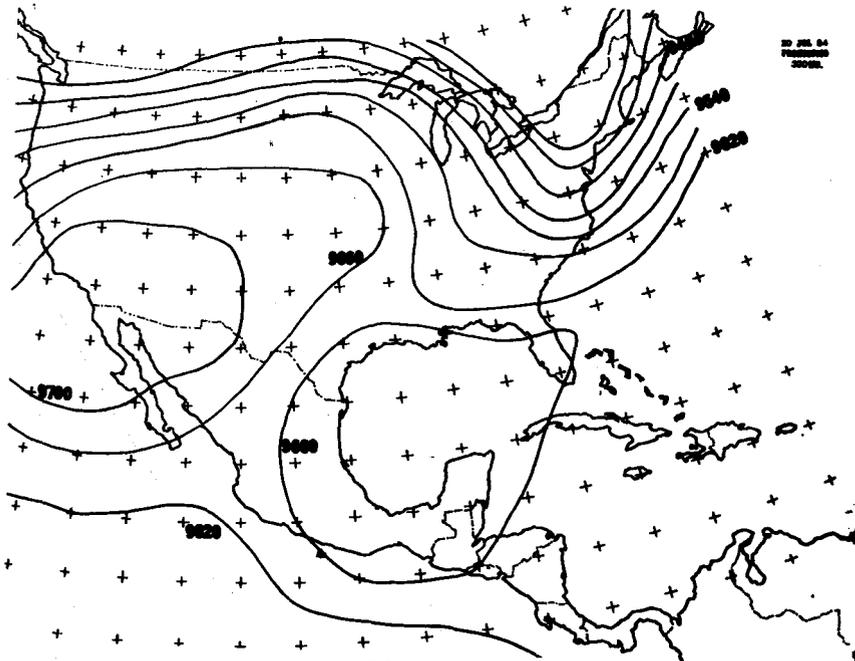


Figura 10.

CONCLUSIONES

Podemos concluir que el modelo es aplicable a cualquier nivel atmosférico, dado que no hay especificaciones físicas que lo limiten.

El requerimiento de archivos extremadamente grandes que son característicos en modelos estadísticos, se ven para este propósito, reducidos notablemente, porque en general se requieren menos de 10 días presentes en computadora.

La precisión del modelo compete con ventaja con los modelos físicos tradicionales. (Estos mismos días son analizados con un modelo baroclínico, como puede verse) (Le Moyne, Castro y Villanueva, 1984).

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración de la Ing. E. Gil P. y al Sr. Rafael Patiño por su participación en la elaboración del programa en computadora.

BIBLIOGRAFIA

- ANDERSON, R. L. and T. A. BANCRAFT, 1952. *Statistical Theory in Research*. Mc Graw Hill. 339 pp.
- FERGUSON, S. Th., 1967. *Mathematical Statistics - A Decision Theoretic Approach*. Acad. Press.
- Le MOYNE, L., T. CASTRO y E. VILLANUEVA, 1984. *Modelo Térmico de Pronóstico*. Reunión Anual de la Unión Geofísica Mexicana (Memorias). La Paz, Baja California Sur, Noviembre.
- NIETO DE ALBA, U., 1977. *Introducción a la estadística - Concepción clásica y Bayesiana*, Tomo 2, *Modelo Matemático*. Aguilar.