

**UN METODO PARA MODELAR ANOMALIAS DE RESISTIVIDAD
Y POLARIZACION INDUCIDA MEDIANTE POTENCIALES LOGARITMICOS**

J. L. COMPARAN*

A. SANCHEZ G.**

E. GOMEZ-TREVIÑO***

(Recibido: 20 de julio, 1987)

(Aceptado: 25 de julio, 1988)

RESUMEN

El problema de modelar anomalías bidimensionales de resistividad y polarización inducida se plantea en los términos siguientes: se supone que la función de la fuente es logarítmica, que la forma de la estructura anómala es poligonal, y que el contraste en resistividades es moderado. El planteamiento conduce a soluciones numéricas relativamente simples, y permite modelar estructuras de geometría complicada. Las anomalías se calculan mediante la integración de una función analítica, por lo que sólo se requiere de un mínimo número de vértices para definir la estructura. Se presentan resultados para comprobar la validez del método, así como para demostrar su flexibilidad en el modelado de estructuras de sección transversal arbitraria.

ABSTRACT

The problem of modeling two-dimensional resistivity and induced polarization anomalies is posed in the following terms: it is assumed that the function of the source is logarithmic, that the body has a polygonal shape, and that the contrast in resistivity is low. This way of posing the problem leads to simple numerical solutions, and allows the study of bodies with complex geometrical shapes. Because the anomalies are computed by integrating an analytic function, the number of points required to define the bodies is minimized. Results are included to demonstrate both the validity of the method and its flexibility to handle arbitrary shaped bodies.

* *Fac. de C. Físico-Matemáticas, UANL, San Nicolás de los Garza, NL.*

** *Altos Hornos de México, S. A., Monclova, Coah.*

*** *Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), Ensenada 22830, B.C.*

INTRODUCCION

En general, los métodos existentes para modelar anomalías de resistividad y polarización inducida (PI) no trascienden de los medios académicos hacia otros sectores. Entre otras razones, esto se debe a la relativa complejidad de las soluciones numéricas existentes para problemas de más de una dimensión. De aquí la necesidad de desarrollar soluciones que, aunque aproximadas, sean lo suficientemente flexibles para ser incorporadas en interpretaciones de rutina.

Una de las simplificaciones a las que se recurre con mayor frecuencia consiste en suponer estructuras bidimensionales en la presencia de fuentes lineales. Este tipo de fuente colocada a lo largo del rumbo de una estructura permite tratar el problema en forma completamente bidimensional. El campo eléctrico es independiente de la coordenada que define el rumbo, lo que no sucede en el caso de fuentes puntuales. Como tal, la suposición de fuente lineal, o aproximación logarítmica como generalmente se le conoce, permite que algunos problemas tengan solución analítica, y es cualitativamente adecuada para muchos problemas que se presentan en la práctica (Van Nostrand and Cook, 1966). Es posible, incluso, transformar datos tomados con fuentes puntuales para que correspondan al caso de fuentes lineales (Roy and Jain, 1961), lo cual permite, al menos en principio, utilizar la aproximación logarítmica en forma cuantitativa.

El objetivo del presente trabajo consiste en simplificar la aproximación logarítmica para el caso de anomalías con poco contraste en resistividad. El algoritmo resultante es similar al utilizado en gravimetría y magnetometría para el caso de estructuras bidimensionales (Talwani *et al.*, 1959; Grant and West, 1965). La idea central consiste en representar la sección transversal de la estructura mediante polígonos y en calcular el efecto en términos de las coordenadas de los vértices correspondientes. Las integrales que resultan no son analíticas como en gravimetría y magnetometría, pero pueden evaluarse fácilmente mediante cuadraturas.

En perspectiva, el método puede considerarse como una versión aproximada de los descritos por Dieter *et al.* (1969), Snyder (1976 y Barnett (1972), y en particular de éste último, quien supone además potenciales logarítmicos para la función de la fuente. En todos estos métodos se requiere, como un paso intermedio, resolver sistemas de ecuaciones lineales con un gran número de incógnitas y describir la estructura mediante igual número de puntos estratégicamente localizados. La solución que

utilizamos en este trabajo evita los sistemas de ecuaciones, por lo que se gana en rapidez y son suficientes pocos puntos para describir la estructura, por lo que se gana en flexibilidad.

TEORIA

Considérese un espacio homogéneo de resistividad ρ_1 y una zona anómala de resistividad ρ_2 como se muestra en la figura 1a. La zona anómala tiene sección transversal arbitraria y es de longitud infinita a lo largo del eje Y. También paralela al eje Y se encuentra una fuente lineal de corriente directa de intensidad I A/m la cual interseca el plano X-Z en el punto (x_0, z_0) . Dada la simetría del problema, la densidad de corriente es en todas partes perpendicular a la fuente y no depende de la coordenada Y. El problema es enteramente bidimensional, ya que el flujo de corriente, aun en la presencia de la zona anómala, está restringido al plano X-Z. Los puntos en este plano se denotarán simplemente como $\underline{r} = (x, z)$ según se muestra en la figura 1b. El problema consiste en determinar el potencial eléctrico $u(\underline{r})$ dadas: la geometría de la zona anómala, la posición de la fuente \underline{r}_0 y las resistividades ρ_1 y ρ_2 . La presencia de la interfase tierra-aire se tomará en cuenta más adelante.

La ecuación diferencial para $u(\underline{r})$ puede obtenerse a partir de la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \underline{J} = I \delta(\underline{r} - \underline{r}_0), \quad (1)$$

donde \underline{J} representa la densidad de corriente y $\delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$ es la función delta de Dirac. A través de la Ley de Ohm la ecuación (1) se reduce a

$$\nabla^2 u = -\rho I \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) + \rho^{-1} \nabla \rho \cdot \nabla u, \quad (2)$$

donde se ha considerado que la resistividad ρ es una función arbitraria de la posición. La ecuación (2) es una versión bidimensional de la ecuación de Poisson y su solución viene dada simplemente como

$$u(\underline{r}) = (\rho_1 I / 2\pi) \text{Ln}(|\underline{r} - \underline{r}_0| \Gamma^1) - (2\pi)^{-1} \int_{\underline{x}-\underline{z}} g(\underline{r}') \text{Ln}(|\underline{r} - \underline{r}'| \Gamma^{-1}) dx' dz' \quad (3)$$

donde

$$g(\underline{r}') = \rho^{-1}(\underline{r}') \nabla' \rho(\underline{r}') \cdot \nabla' u(\underline{r}').$$

El primer término en esta ecuación representa el efecto de la fuente, y el segundo, la contribución de la zona anómala (dado que el gradiente de resistividad es nulo en

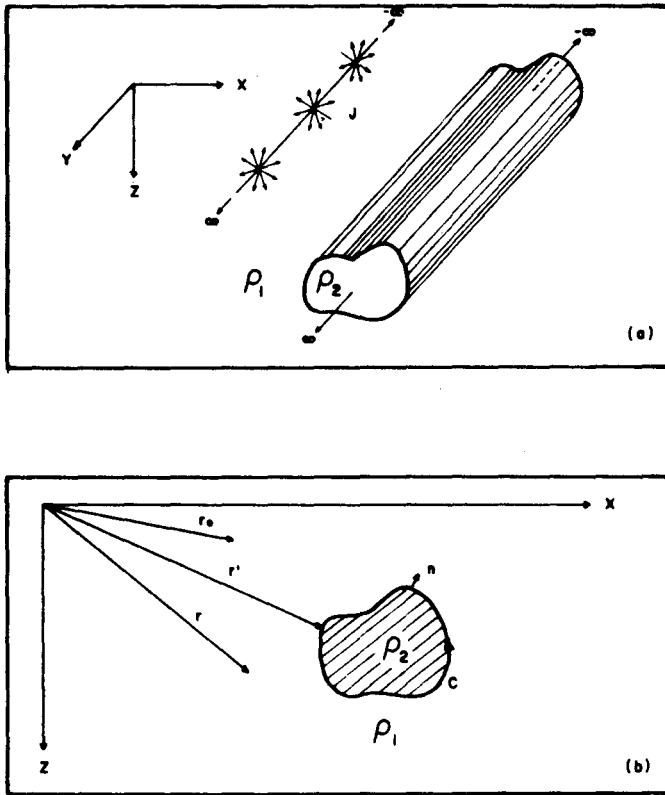


Fig. 1. (a) Estructura bidimensional en la presencia de una fuente lineal de corriente directa. (b) Sección transversal de la estructura e identificación de vectores para la sección de teoría.

todas partes excepto sobre el contorno que define la estructura). Debido al cambio brusco en la resistividad al cruzar la frontera, g es una función delta de Dirac que reduce la integral de área de la ecuación (3) a una integral sobre el contorno de la estructura. Así, la expresión para el potencial se reduce a

$$u(\underline{r}) = (\rho_1 I / 2\pi) \text{Ln}(|\underline{r} - \underline{r}_0| \Gamma^{-1}) + (2\pi)^{-1} \oint_C Q(\underline{r}') \text{Ln}(|\underline{r} - \underline{r}'| \Gamma^{-1}) dc, \quad (4)$$

donde

$$Q(\underline{r}') = \rho_2 (\rho_1^{-1} - \rho_2^{-1}) \nabla' u(\underline{r}') \cdot \underline{n}. \quad (5)$$

El gradiente del potencial se toma en el medio de resistividad ρ_1 y hacia este medio está dirigido el vector normal unitario \underline{n} ; la función Q representa una densidad superficial de fuentes de corriente.

La principal dificultad para calcular el potencial mediante la ecuación (4) consiste en la determinación de la función Q . Esta generalmente se determina resolviendo una ecuación de Fredholm de segunda clase, la cual se obtiene sustituyendo la ecuación (4) en la (5). El procedimiento numérico se reduce a resolver sistemas de ecuaciones lineales cuyas incógnitas representan valores discretos de la función Q (ver por ejemplo Gómez-Treviño y Edwards, 1979). En el presente trabajo utilizamos una aproximación para bajos contrastes en resistividad (Gómez-Treviño, 1984), que permite evaluar el potencial sin recurrir a la solución de grandes sistemas de ecuaciones. En esta aproximación la función Q viene dada como

$$Q(\underline{r}') = (\rho_1 IK/\pi) \nabla' \text{Ln}(\underline{r}' - \underline{r}_0 \Gamma^{-1}) \cdot \underline{n} , \quad (6)$$

donde $K = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$.

La ecuación (6) se puede obtener sustituyendo la (4) en la (5) y tomando el límite de Q/K cuando K , el coeficiente de reflexión, tiende a cero.

Hasta este punto hemos supuesto que la zona anómala se encuentra inmersa en un espacio homogéneo, por lo que la solución no es estrictamente aplicable en la presencia de la interfase tierra-aire. Sin embargo, con base en el método de las imágenes, el efecto de la interfase puede incorporarse a la solución multiplicando por dos aquellos términos donde aparezcan logaritmos naturales. Este procedimiento se basa en que cuando el punto de observación se encuentra en la superficie de la tierra, los efectos de la fuente y de la zona anómala son iguales a los producidos por sus respectivas imágenes. El efecto de la interacción entre la zona anómala y su imagen es de segundo orden, por lo que puede despreciarse en la presente aproximación.

Con base en los resultados anteriores, en las siguientes líneas se resume el desarrollo de las expresiones para el arreglo dipolo-dipolo, el cual es ampliamente utilizado en la prospección minera. Las mediciones de potencial se suponen reducidas a resistividad aparente, y las de PI a cargabilidad aparente. El dispositivo dipolo-dipolo consta de dos electrodos de corriente y dos de potencial, según se ilustra en la figura 2. De la aplicación del principio de superposición a este tipo de dispositivo se obtiene la expresión para la resistividad aparente

$$\rho_a = \rho_1 + 2G\rho_1 K \oint_C f(\underline{r}') dc , \quad (7)$$

donde el factor G viene dado por

$$G = \pi \text{Ln}[(n+2)^2 / (n^2 + 2n)]^{-1},$$

y la función $f(\underline{r})$ por

$$f(\underline{r}) = \text{Ln}(I_{\underline{r}'} - X_M I / I_{\underline{r}'} - X_N I) \nabla' \text{Ln}(I_{\underline{r}'} - X_B I / I_{\underline{r}'} - X_A I) \cdot \underline{n}. \quad (8)$$

En la práctica, el operador gradiente se expresa en términos de derivadas parciales y el vector unitario normal al contorno se representa mediante cosenos directores.

La expresión correspondiente para la cargabilidad aparente puede obtenerse de la ecuación (7) mediante la formulación de Seigel (1959). Para esto suponemos que el medio encajonante tiene una cargabilidad m_1 y la zona anómala una cargabilidad m_2 . La expresión para la cargabilidad aparente m_a viene dada como

$$m_a = m_1 + G(m_2 - m_1) \oint_C f(\underline{r}') dc, \quad (9)$$

donde se ha supuesto que no existe contraste en resistividad. Esto significa que la fórmula será válida sólo en condiciones de bajo contraste en resistividad.

Las fórmulas clave de esta sección son la (7) y la (9), las cuales requieren ser evaluadas numéricamente.

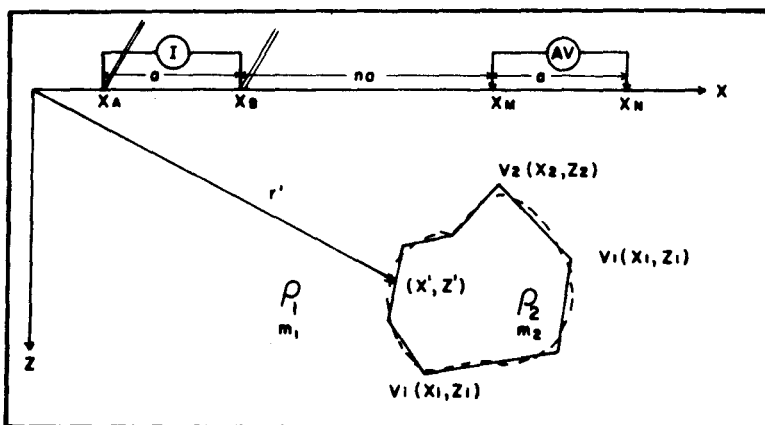


Fig. 2. El dispositivo eléctrico dipolo-dipolo y la representación poligonal de la estructura.

SOLUCION NUMERICA

Cuando el contorno C representa un polígono de N lados, las fórmulas (7) y (9) se reducen a

$$\rho_a = \rho_1 + 2G\rho_1K \sum_{i=1}^N I_i \quad (10)$$

y

$$m_a = m_1 + G(m_2 - m_1) \sum_{i=1}^N I_i \quad (11)$$

donde

$$I_i = \int_{(x_i, z_i)}^{(x_{i+1}, z_{i+1})} f(x', z') dc \quad (12)$$

El par ordenado (x_i, z_i) representa el i -ésimo vértice del polígono según se muestra en la figura 2. El N -ésimo vértice se supone igual al primero, con lo que se asegura que el polígono se cierre.

La integral en la ecuación (12) puede evaluarse sobre cualquiera de los ejes, ya que para el i -ésimo segmento

$$dc = dx' L_i / (X_{i+1} - X_i)$$

y

$$dc = dz' L_i / (z_{i+1} - z_i) \quad ,$$

donde L_i es la longitud del segmento. Con estas relaciones

$$I_i = [L_i / (x_{i+1} - x_i)] \int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x', z'(x')] dx' \quad , \quad (13)$$

o bien

$$I_i = [L_i / (z_{i+1} - z_i)] \int_{z_i}^{z_{i+1}} f[x'(z'), z'] dz' \quad (14)$$

La función integrando en estas expresiones es analítica, por lo que se intentó encontrar soluciones analíticas para las integrales. Al parecer, éstas no existen, y se op-

tó por utilizar técnicas basadas en cuadraturas. Estas técnicas son bastante flexibles y hacen un uso óptimo del carácter analítico de la función integrando. Las rutinas adaptables (ver, por ejemplo, QUANCB, en Forsythe *et al.*, 1977, páginas 97-105) permiten especificar la precisión en el valor de la integral, con lo que se evitan las pruebas externas de convergencia, pudiéndose así utilizar segmentos de longitud arbitraria. La forma (13) se utiliza en segmentos cuyo ángulo con el eje horizontal sea menor de 45° , y la forma (14) en segmentos cuyo ángulo con este eje sea mayor de 45° . De esta manera se optimiza el dominio de la función integrando. En ambos casos las dependencias implícitas $x'(z')$ y $z'(x')$ representan la ecuación del segmento, la cual se determina por las coordenadas de sus puntos extremos.

RESULTADOS

Validez de la aproximación

Con el fin de establecer la validez de la aproximación de bajos contrastes se hicieron comparaciones con resultados de otros autores. En las figuras 3 y 4 se muestra la comparación con curvas de resistividad y cargabilidad aparente calculadas por Barnett (1972). Las curvas corresponden a un cilindro conductor inmerso en un medio dos veces más resistivo. Con esta comparación se estableció que la aproximación utilizada en el presente trabajo ofrece resultados comparables a los obtenidos con métodos más elaborados. En el proceso de construir las curvas, Barnett (1972) consideró, en su forma general, la ecuación integral de Fredholm para la función Q , con la consecuente necesidad de resolver sistemas de ecuaciones con numerosas incógnitas. En el presente trabajo las curvas se construyeron utilizando la forma aproximada de la función Q .

También se hicieron comparaciones con los resultados analíticos de Kiyono (1950), los cuales se tomaron de Van Nostrand y Cook (1962). En la figura 5 se muestra una comparación de curvas de resistividad aparente para contrastes grandes y pequeños. Como era de esperarse, dado que nuestra aproximación se basa en contrastes pequeños en resistividad, las discrepancias aumentan al aumentar el contraste.

Es difícil establecer una regla general para el rango de validez del método, debido a que esto implicaría comparaciones con un gran número de resultados exactos, de los que no se dispone en la literatura. Para un contraste dado se tendría que considerar el tipo de dispositivo eléctrico, la escala y posición horizontal del mismo, así

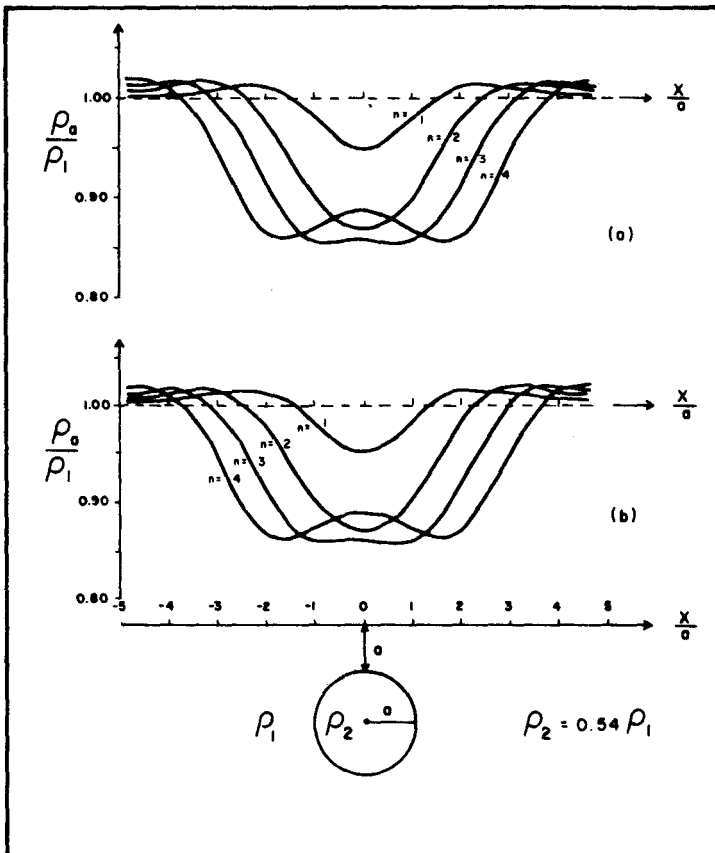


Fig. 3. Curvas de resistividad aparente para un modelo circular. (a) Curvas obtenidas en el presente estudio. (b) Curvas obtenidas por Barnett (1972). Se utiliza el dispositivo dipolo-dipolo.

como la forma geométrica y profundidad del cuerpo anómalo. Debido a que tal análisis sería prácticamente imposible de realizar, damos a continuación un rango conservador con base en las comparaciones realizadas. En general, pueden esperarse errores menores del 10% para el rango $-0.5 < K < 0.5$, en anomalías de cuerpos que no afloren.

La flexibilidad del método

La flexibilidad del método para modelar estructuras de sección transversal arbitra-

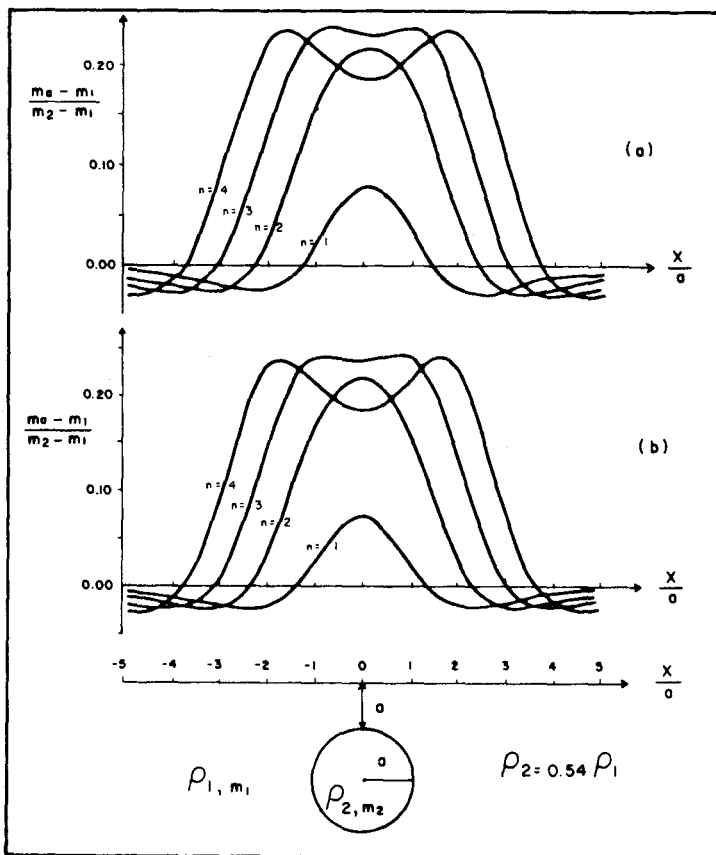


Fig. 4. Curvas de cargabilidad aparente para un modelo circular. (a) Curvas obtenidas en el presente estudio suponiendo contraste nulo en resistividad. (b) Curvas obtenidas por Barnett (1972) tomando en cuenta el contraste en resistividad. Se utiliza el dispositivo dipolo-dipolo.

ria se ilustra en las figuras 6 y 7. En la primera se muestran curvas de resistividad y cargabilidad aparente para un cuerpo poligonal de seis lados. Se especificaron los seis vértices del polígono y los cálculos se efectuaron automáticamente, utilizando el método de la sección anterior. En la figura 7 se muestran curvas para un polígono un poco más complicado que el anterior. Para el nuevo polígono se especificaron cuatro vértices adicionales a los del primero. Comparando las dos figuras puede observarse la distorsión que produce la presencia de un cuerpo pequeño pero somero.

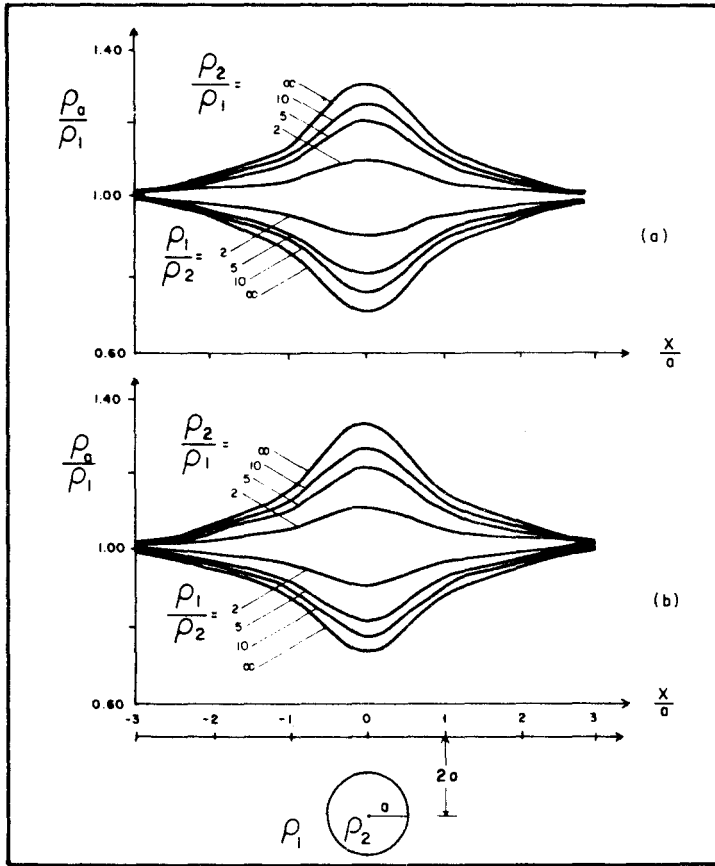


Fig. 5. Curvas de resistividad aparente para un modelo circular. (a) Curvas obtenidas en el presente estudio. (b) Curvas obtenidas por Kiyono (1950) mediante soluciones analíticas. Se utiliza el dispositivo Wenner.

Finalmente, para establecer la aplicabilidad del método en la interpretación de datos de campo (donde más que fuentes lineales se utilizan fuentes puntuales), se hicieron comparaciones con resultados obtenidos suponiendo fuentes puntuales. Para este fin se utilizaron curvas calculadas por Snyder (1976), las cuales se muestran en la figura 8, junto con las calculadas en el presente estudio. Las discrepancias se deben tanto a la aproximación para bajos contrastes, como al hecho de que las curvas corresponden a tipos de fuente diferentes.

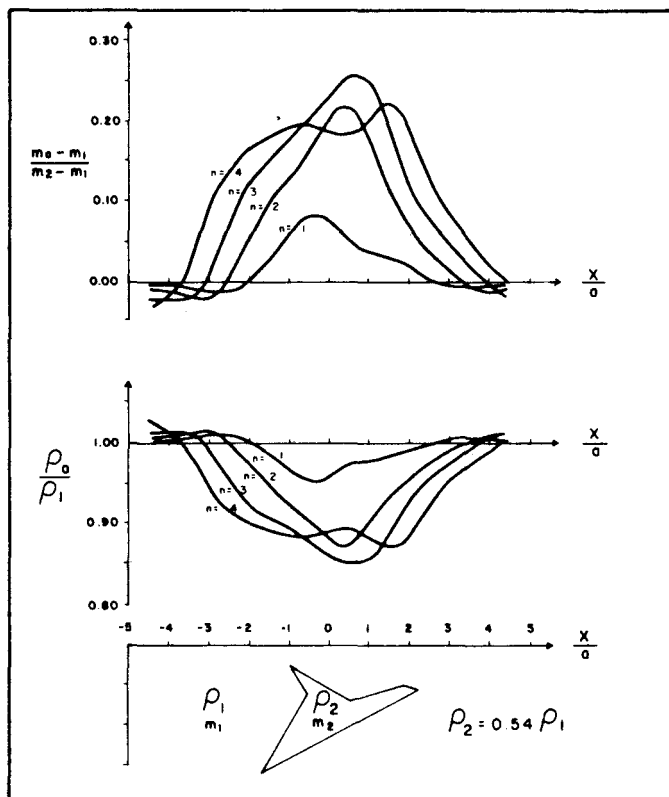


Fig. 6. Curvas de resistividad y cargabilidad aparente para un modelo poligonal de seis vértices. Se utiliza el dispositivo dipolo-dipolo.

CONCLUSION

Es de esperarse que, dada la flexibilidad del método descrito, éste se utilice en interpretaciones de rutina. Hay que tomar en cuenta, sin embargo, que el método supone potenciales logarítmicos y que tiene limitaciones en cuanto a su aplicación en casos de contrastes grandes en resistividad. Las ventajas que ofrece compensan en cierto modo sus limitaciones, ya que actualmente no se cuenta con métodos comparables en lo que respecta a rapidez y flexibilidad. Las comparaciones realizadas demuestran la viabilidad del método en relación con técnicas más elaboradas:

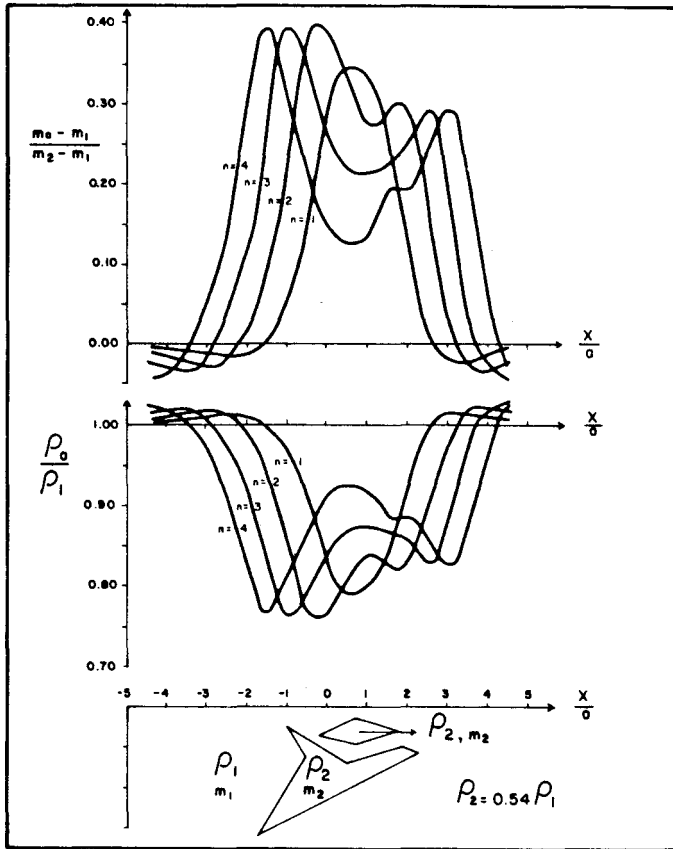


Fig. 7. Curvas de resistividad y cargabilidad aparente para un modelo poligonal de diez vértices (compárese con la figura anterior). Se utiliza el dispositivo dipolo-dipolo.

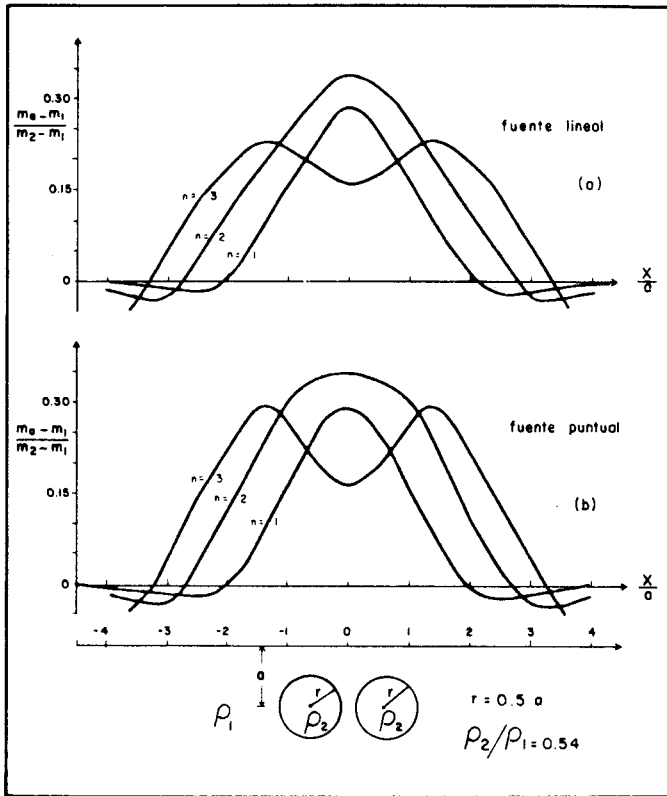


Fig. 8. Comparación de curvas de cargabilidad aparente. (a) Curvas obtenidas en el presente estudio suponiendo fuente lineal y contraste nulo en resistividad. (b) Curvas obtenidas por Snyder (1976) suponiendo fuente puntual y tomando en cuenta el contraste en resistividad. Se utiliza el dispositivo dipolo-dipolo.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a los árbitros del artículo por sus valiosos comentarios y a B. Escareño por mecanografiar el manuscrito.

BIBLIOGRAFIA

- BARNETT, C. T., 1972. Theoretical modeling of induced polarization effects due to arbitrarily shaped bodies. Unpublished Ph. D. thesis, Colorado School of Mines.
- DIETER, K., N. R. PATERSON and F. S. GRANT, 1969. Induced polarization and resistivity type curves for three-dimensional bodies. *Geophysics*, 34, 615-632.
- FORSYTHE, G. E., M. A. MALCOLM and C. B. MOLER, 1977. Computer methods for mathematical computations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.
- GOMEZ-TREVIÑO, E. and R. N. EDWARDS, 1979. Magnetometric resistivity (MMR) anomalies of two-dimensional structures. *Geophysics*, 44, 947-958.
- GOMEZ-TREVIÑO, E., 1984. Soluciones asintóticas para el problema directo de resistividad y polarización inducida. Informe semestral de investigación (inédito), FCFM, UANL.
- GRANT, F. S. and G. F. WEST, 1965. Interpretation theory in applied geophysics. McGraw-Hill Book Co., N. Y.
- KIYONO, T., 1950. Theoretical study of the ground resistivity method of electrical prospecting. Kyoto Univ. *Faculty Eng., Mem.*, 12, 29-59. Resistivity GA12051.
- ROY, A., and S. JAIN, 1961. A simple integral transform and its application to some problems in geophysical prospecting. *Geophysics*, 26, 229-241.
- SEIGEL, H. O., 1959. Mathematical formulation and type curves for induced polarization. *Geophysics*, 24, 547-563.
- SNYDER, D. D., 1976. A method for modeling the resistivity and induced polarization responses of two-dimensional bodies. *Geophysics*, 41, 997-1015.
- TALWANI, M., J. L. WORZEL and M. LANDISMAN, 1959. Rapid gravity computations for two-dimensional bodies with application to the Mendocino Submarine Fracture Zone. *J. Geophys. Res.*, 64, 49-59.
- VAN NOSTRAND, R. G. and K. L. COOK, 1966. Interpretation of resistivity data. USGS Professional paper 499, US Gov. Print. Office, Washington.