

Trazado de rayos para señales de satélites GPS: aproximación cuasi-longitudinal

G. A. Mansilla, V. H. Ríos, J. F. Lagori, R. O. Barcat y A. Pérez Gómez
Grupo de Geodesia Satelitaria de Tucumán. Instituto de Física-Instituto de Geodesia y Topografía,
Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.

RESUMEN

En este trabajo se realiza un trazado de rayos en la ionosfera terrestre para las señales emitidas por los satélites del Sistema de Posicionamiento Global (GPS), cuyas frecuencias de transmisión son $L1 = 1515$ MHz y $L2 = 1228$ MHz. Se supone que la ionosfera está estratificada esféricamente y que las condiciones de propagación son cuasi-longitudinales, lo que llevó a que se utilice dicha aproximación en el índice de refracción de la ecuación general de Appleton-Hartree. Para la determinación del camino de grupo es necesario conocer la densidad electrónica a través del camino del rayo; esto motivó la necesidad de proponer un modelo para la misma que en este caso fue el cuasi-parabólico. Los parámetros de este modelo fueron obtenidos con el modelo Mark III, utilizándose diferentes condiciones de actividad solar y magnética. Se obtuvo también una solución exacta para la desviación del camino de grupo respecto al camino geométrico, en las condiciones anteriormente citadas. Los resultados preliminares muestran que los retardos de grupo se encuentran en el orden de los 30 a 50 ns para distintos ángulos de elevación del satélite y la desviación por refracción que sufre el rayo es del orden de los 10 m, lo cual hace necesario considerar el efecto ionosférico en los cálculos cuando se desean precisiones menores que éstas.

PALABRAS CLAVE: ionosfera, trazado de rayos, señales de satélites GPS, aproximación cuasilongitudinal.

ABSTRACT

We present a ray tracing in the ionosphere for the signals emitted by GPS (Global Positioning System) satellites in L band ($L1 = 1575$ MHz and $L2 = 1228$ MHz). The ionosphere may be considered as a medium with a spherical stratification and we assume a quasi-longitudinal propagation using the phase refractive index given by the Appleton-Hartree equation. We have used the quasi-parabolic model of electronic density for the computation of the length of group path. The parameters for this model have been obtained from the Mark III ionospheric model, which has been elaborated at the University of Pennsylvania for different types of magnetic and solar activity.

We obtain a precise value for deviation of group path with respect to geometric path. Preliminary results show that the interval of group ionospheric delays is between 30 ns to 50 ns for different elevation angles and the deviation due to refraction is 10 meters approximately. It is necessary to consider the curvature for the most accurate positioning.

KEY WORDS: ionosphere, ray tracing, GPS satellite signals, quasi-longitudinal approximation.

INTRODUCCION

Es conocido el hecho de que una onda emitida por un satélite sufre un retardo y un efecto de curvatura, el que es generalmente despreciado a altas frecuencias, cuando la onda atraviesa la atmósfera terrestre.

Conocer estos efectos es de fundamental importancia cuando se determinan las posiciones de puntos por medio de satélites, ya que en la medida en que se conozcan los retardos correspondientes, se conocerá con qué precisión están determinadas las coordenadas de estos puntos.

En este trabajo se consideran los efectos antes mencionados en la parte ionosférica de la atmósfera. Para ello, se realiza un trazado de rayos en la misma, para las señales emitidas por los satélites del Sistema de Posicionamiento Global (GPS), cuyas frecuencias de transmisión son $L1 = 1575$ y $L2 = 1228$ MHz.

En este estudio se considera que la ionosfera está estratificada esféricamente, y que las condiciones de propagación son cuasi-longitudinales, aplicándose dicha aproximación en el índice de refracción de la ecuación general de Appleton-Hartree.

TEORIA

1. Longitud del camino de grupo

Podemos definir la longitud del camino de grupo como:

$$P = \int_{s_0}^{s_1} u' dS \quad (1)$$

donde dS es un elemento de dicho camino y u' es el índice de refracción de grupo en la ionosfera terrestre.

De acuerdo con la figura 1, vemos que:

$$dS = dr / \text{sen } \beta \quad (2)$$

con lo que la ecuación (1) resulta:

$$P = \int_{r_0}^{r_1} u' \frac{dr}{\text{sen } \beta} \quad (3)$$

donde r_0 y r_1 son las alturas a la base y al tope de la ionosfera, respectivamente.

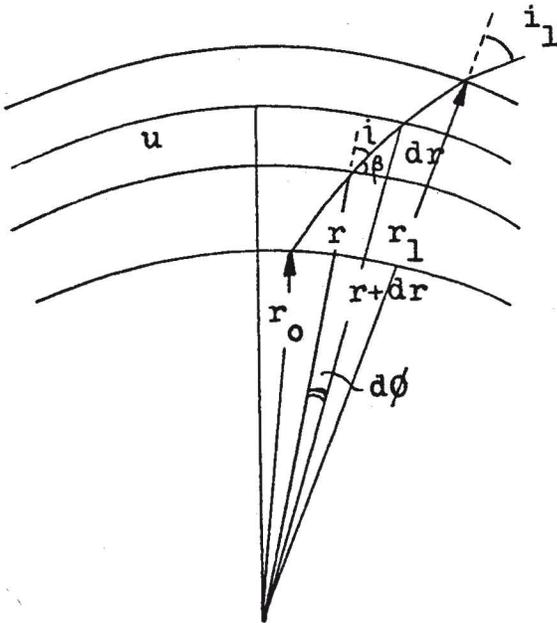


Fig. 1.

Por otro lado, el índice de refracción de grupo está relacionado con el de fase por:

$$u' = u + f \frac{du}{df} \quad (4)$$

donde u es el índice de refracción de fase y f la frecuencia de la señal emitida por el satélite.

Usando para u el desarrollo en serie de la aproximación cuasi-longitudinal de la ecuación de Appleton-Hartree (Budden, 1961), de la cual despreciamos el efecto de colisiones, se encuentra que:

$$u^2 = 1 - \frac{k}{f^2} N(r) \quad (5)$$

donde $k = 80.6 \text{ m}^3\text{s}^{-2}$, y $N(r)$ es la densidad electrónica. En esta aproximación no se considera el campo magnético terrestre.

Reemplazando (5) en (4) y haciendo las operaciones correspondientes, resulta:

$$u' = u^{-1} \quad (6)$$

De acuerdo con la regla de Bouguer $u r \cos \beta = \text{cte.}$ (válida para medios estratificados esféricamente), escribamos:

$$u r \cos \beta = u_1 r_1 \cos \beta_1 \quad (7)$$

donde $\beta_1 = 90^\circ - i_1$, siendo i_1 el ángulo de incidencia de la

señal en el tope de la ionosfera (figura 1).

Reemplazando (6) en (3) y teniendo en cuenta (7) obtenemos:

$$P = \int_{r_0}^{r_1} \frac{r dr}{\left(u^2 r^2 - u_1^2 r_1^2 \cos^2 \beta_1\right)^{1/2}} \quad (8)$$

Para calcular (8) necesitamos conocer la variación de la densidad electrónica con la altura. Para ello utilizamos el modelo cuasi-parabólico (de Voogt, 1953), el cual se define por:

$$N(r) = \begin{cases} N_m \left\{ 1 - \left(\frac{r - r_m}{y_m} \right)^2 \left(\frac{r_b}{r} \right)^2 \right\} \\ \text{para } r_b < r < r_m \left(\frac{r_b}{r_b - y_m} \right) = r'_1 \\ 0; \text{ para otro lugar} \end{cases} \quad (9)$$

- donde:
- N_m : valor máximo de densidad electrónica
 - r : distancia radial desde el centro de la Tierra
 - r_m : valor de r donde $N = N_m$
 - r_b : valor de r en la base de la capa cuasiparabólica $= r_m - y_m$
 - y_m : semiespesor inferior de la capa

La ecuación (9) es similar al modelo parabólico de densidad electrónica, excepto por el factor $(r_b/r)^2$. El mismo es próximo a la unidad, ya que $r_b \sim r$ en la región considerada. Croft y Hoogasian (1968) demostraron que el modelo cuasi-parabólico se ajusta más que el parabólico en la región entre el máximo y la base de las capas.

Reemplazando (9) en (5) resulta:

$$u^2 = 1 - \frac{1}{R^2} + \left(\frac{r - r_m}{R y_m} \right)^2 \left(\frac{r_b}{r} \right)^2 \quad (10)$$

donde: $R^2 = f^2/k N_m$.

Reemplazando (10) en el integrando de (8) resulta para el mismo:

$$u^2 r^2 - u_1^2 r_1^2 \cos^2 \beta_1 = A r^2 + B r + C \quad (11)$$

donde:

$$A = 1 - \frac{1}{R^2} + \frac{r_b^2}{R^2 y_m^2} \quad (12a)$$

$$B = -\frac{2 r_m r_b^2}{R^2 y_m^2} \quad (12b)$$

$$C = \left(\frac{r_m r_b}{R y_m}\right)^2 - u_1^2 r_1^2 \cos^2 \beta_1 \quad (12c)$$

Reemplazando ahora (11) en (8) e integrando entre los límites de validez del modelo cuasi-parabólico, se encuentra la longitud del camino de grupo:

$$P = \frac{R_1 - R_2}{A} - \frac{B}{2A \cdot \sqrt{A}} \ln \frac{R_1 + \frac{2A r_1' + B}{2\sqrt{A}}}{R_2 + \frac{2A r_b + B}{2\sqrt{A}}} \quad (13)$$

donde:

$$R_1 = (A r_1'^2 + B r_1' + C)^{1/2} \quad (14a)$$

$$R_2 = (A r_b^2 + B r_b + C)^{1/2} \quad (14b)$$

2. Ecuación de la trayectoria

De la figura 1 vemos que:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dr}{r d\phi} \quad (15)$$

$$\left(\frac{1}{\cos^2 \beta} - 1\right)^{1/2} = \frac{dr}{r d\phi} \quad (16)$$

Teniendo en cuenta la regla de Bouguer, podemos reescribir (16) como sigue:

$$\frac{u_1 r_1 \cos \beta_1}{r (u_1^2 r^2 - u_1^2 r_1^2 \cos^2 \beta_1)^{1/2}} dr = d\phi \quad (17)$$

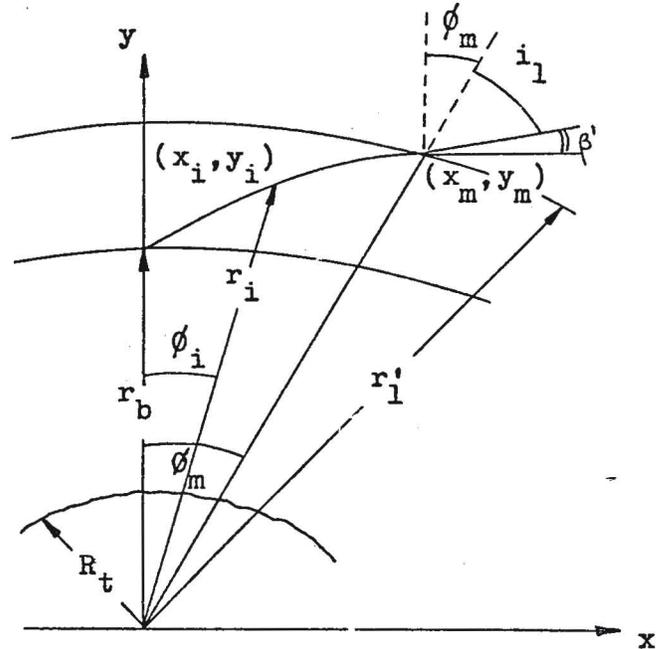
Integrando esta ecuación, podemos obtener el valor de ϕ para el correspondiente valor de r , cuya solución es:

$$u_1 r_1 \cos \beta_1 \frac{1}{(-C)^{1/2}} \left\{ \operatorname{sen}^{-1} \frac{Br + 2C}{r R_3} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{B r_b + 2C}{r_b R_3} \right\} = \phi - \phi_0 \quad (18)$$

donde:

$R_3 = (B^2 - 4AC)^{1/2}$, y A, B y C están dados por (12a), (12b) y (12c), respectivamente.

2.1. Transformación de coordenadas polares a cartesianas y longitud del camino geométrico



Centro de la Tierra

Fig. 2.

Haciendo coincidir el origen del sistema cartesiano con el centro de la Tierra, se encuentra que:

$$x_i = r_i \operatorname{sen} \phi_i \quad (19a)$$

$$y_i = r_i \cos \phi_i \quad (19b)$$

donde se ha supuesto $\phi_0 = 0$.

De la figura 2 vemos que:

$$\beta' = 90^\circ - (\phi_m + i_1) \quad (20)$$

siendo ϕ_m el máximo ángulo, es decir, correspondiente a $r = r_1'$.

La ecuación del camino geométrico será de la forma:

$$y = m x + b \quad (21)$$

$$\text{donde: } m = \operatorname{tg} (90^\circ - (\phi_m + i_1)) \quad (22a)$$

$$b = y_m - m x_m \quad (22b)$$

con $x_m = r_1' \operatorname{sen} \phi_m$; $y_m = r_1' \cos \phi_m$.

Por otra parte, la longitud del camino geométrico será:

$$G = ((y_m - y_0)^2 + x_m^2)^{1/2} \quad (23)$$

con $y_0 = b$.

Por último, para buscar la coordenada x del camino geométrico que intersecta la capa inferior del modelo de densidad electrónica, resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r_b^2 \\ y &= t g \beta' (x - x_m) + y_m \end{aligned}$$

cuya solución es:

$$x = \frac{-t + (t^2 - 4 wz)^{1/2}}{2w} \quad (24)$$

donde:

$$\begin{aligned} t &= 2(y_m - x_m t g \beta') t g \beta' \\ w &= 1 + t g^2 \beta' \\ z &= x_m^2 t g^2 \beta' - 2 t g \beta' x_m y_m + y_m^2 - r_b^2 \end{aligned}$$

RESULTADOS Y DISCUSION

Los parámetros del modelo cuasi-parabólico de densidad electrónica fueron obtenidos del modelo Mark III de la Universidad de Pennsylvania, con el que se puede obtener, entre otros datos, el valor máximo de densidad electrónica, la altura correspondiente al mismo y de la base de la ionosfera (r_b), para diferentes condiciones geofísicas (alta, media y baja actividad solar y geomagnética) y diferentes localidades geográficas, a distintas horas del día.

Los cálculos correspondientes han sido realizados para Tucumán (26.9°S; 65.4°O). Así, por ejemplo, usando condiciones geofísicas altas en el modelo Mark III se encuentran, para las 12 horas TU, los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} N_m &= 1.53 \times 10^{12} \text{ m}^{-3} \\ r_m &= 6698 \text{ km} \\ r_b &= 6456 \text{ km} \\ y_m &= 242 \text{ km} \\ r_l &= 6958 \text{ km} \end{aligned}$$

Y para condiciones geofísicas bajas:

$$\begin{aligned} N_m &= 7.27 \times 10^{11} \text{ m}^{-3} \\ r_m &= 6680 \text{ km} \\ r_b &= 6490 \text{ km} \\ y_m &= 190 \text{ km} \\ r_l &= 6881 \text{ km} \end{aligned}$$

La longitud del camino de grupo y del camino geométrico, para distintos ángulos de incidencia en el límite superior de la capa cuasi-parabólica, en condiciones geofísicas altas, se muestra en la Tabla 1, para la frecuencia $f = 1228$ MHz:

Tabla 1

i_1	P (km)	G (km)
20°	537,0147	536,9979
30°	587,3991	587,3771
40°	674,3638	674,3306

Para la frecuencia $f = 1575$ MHz, los valores correspondientes se muestran en la Tabla 2:

Tabla 2

i_1	P (km)	G (km)
20°	537,0081	537,0074
30°	587,3905	587,3895
40°	674,3508	674,3494

La ventaja del modelo cuasi-parabólico es que permite realizar una integración analítica exacta de (8), por lo que se puede calcular directamente el camino de grupo de una ionosfera cuasi-parabólica conociendo la posición inicial del satélite y los parámetros del modelo ionosférico.

Para un ángulo de incidencia $i_1 = 30^\circ$, por ejemplo, los retardos ionosféricos para las frecuencias 1228 MHz y 1575 MHz, son de aproximadamente 50 ns y 3 ns, respectivamente.

También es posible obtener una solución exacta para la desviación del camino de grupo respecto al camino geométrico en las condiciones anteriormente citadas. En efecto, de la figura 2 vemos que las coordenadas del punto al que arriba la señal emitida desde el satélite son:

$$x_b = 0 \quad ; \quad y_b = r_b$$

y las coordenadas del camino geométrico son:

$$x_g = 0 \quad ; \quad y_g = y_m - m x_m$$

Por lo tanto, la diferencia $y_g - y_b$ permite calcular la desviación en altura existente debida a la refracción ionosférica. Por ejemplo, estos valores son del orden de los 10 m para un ángulo i_1 de 20° y la frecuencia de 1228 MHz (con condiciones geofísicas altas). En cambio, la desviación horizontal calculada de (24) es de aproximadamente 6 metros.

Vemos en consecuencia que es necesario considerar el efecto de curvatura cuando se deseen precisiones menores que éstas y se justifica un estudio más profundo de la curvatura de la señal.

Como mencionamos antes, en este trabajo no se considera el efecto del campo magnético terrestre, el cual produce la anisotropía del plasma ionosférico. Dicho efecto será considerado en un trabajo posterior.

BIBLIOGRAFIA

BUDDEN, K., 1961. "Radio Waves in the Ionosphere". Cambridge at the University Press.

DE VOOGT, A. H., 1953. "The Calculation of the Path of a Radio-Ray in a Given Ionosphere". Proc. IRE, Vol. 41, No. 9, 1183-1186.

CROFT, T. A. and H. HOOGASIAN, 1968. "Exact Ray Calculations in a Quasi-Parabolic Ionosphere With No Magnetic Field". *Radio Science*, 3, 1, 69-74.

G. A. Mansilla, V. H. Ríos, J. F. Lagori,
R. O. Barcat y A. Pérez Gómez
*Instituto de Física - Instituto de Geodesia y Topografía.
Universidad Nacional de Tucumán,
Av. Independencia 1800, 4000 Tucumán, Argentina.*