

# Regionalización de velocidades de ondas superficiales mediante condiciones de continuidad

F. J. Esparza y J. Frez

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Ensenada, B.C.

Recibido: 24 de mayo, 1991; Aceptado: 21 de enero, 1992.

## RESUMEN

El propósito del procedimiento computacional que aquí se presenta es estabilizar la estimación de velocidades regionales de ondas superficiales a partir de tiempos totales de recorrido, para un modelo compuesto por regiones homogéneas. El operador regularizante utilizado es la norma cuadrática de la derivada de orden  $p$  de la curva de dispersión cuyo argumento es el período o la frecuencia. El estimador toma en cuenta la contribución del espacio nulo del operador regularizante; además, hace uso de funciones de Green como operador inverso a la derivada correspondiente.

El tratamiento del problema variacional conduce a una ecuación matricial cuya solución no es trivial. El algoritmo numérico y la codificación se comprueba con varios experimentos computacionales y se aplica a datos que provienen de trayectorias en el Océano Pacífico. En este caso, las velocidades estimadas concuerdan bien con las obtenidas por Leeds *et al.* (1974) usando otra metodología.

**PALABRAS CLAVE:** Velocidades de ondas superficiales, modelos regionales, estabilidad, inversión.

## ABSTRACT

A regional velocity estimation from surface wave travel times for a laterally heterogeneous structure is stabilized using as a regularizing operator the quadratic norm of the  $p$ -th derivative of the dispersion curve with respect to frequency or period. The estimation makes allowance for the null space of the stabilizing operator and uses Green's functions as inverse operators of the derivatives. The variational treatment leads to a matrix equation which has a non-trivial solution. The procedure is validated by computer experiments. Computed velocities for Pacific paths agree with the results of Leeds *et al.* (1974).

**KEY WORDS:** Surface wave velocities, regional models, stability, inversion.

## INTRODUCCION

La inversión de curvas de dispersión (velocidades de fases y de grupo) de ondas superficiales es un método poderoso para conocer la estructura interna de la Tierra, particularmente de sus capas superiores (ver, v.gr., Knopoff, 1972, 1983). Para ello, se utilizan datos que muestrean adecuadamente un área lateralmente heterogénea. En una técnica de uso común, se divide esta área en un número pequeño de regiones homogéneas basándose en los conocimientos tectónicos disponibles. Con ello, se evita la utilización de celdas de tamaño muy reducido o, equivalentemente, de un número de incógnitas muy grande. La suposición subyacente en la técnica es que el tipo de región tectónica determina la estructura sísmica de los primeros 200 a 300 km de profundidad. El objeto de la inversión de los datos es, entonces, la determinación de las propiedades estructurales de cada región.

Este propósito se puede alcanzar mediante dos métodos. En uno de ellos, se estima en un solo paso los parámetros estructurales de cada región utilizando los tiempos globales o los valores promedio de las velocidades sobre recorridos en líneas geodésicas (circunferencias máximas, en un modelo esférico de la Tierra). El segundo método tiene dos pasos y consiste en estimar, primero, curvas de dispersión regionales y, luego, determinar la estructura correspondiente a

cada región. En condiciones ideales, es decir cuando el modelo es adecuado y la cantidad de información es suficiente, ambos métodos deben ser equivalentes.

Vamos a suponer que el modelo es adecuado, lo que es plausible para períodos entre 20 s y 200 s y para trayectorias a través del Océano Pacífico donde la teoría de placas predice un modelo básicamente bidimensional. En este modelo, las placas se generan desde la Dorsal del Pacífico Oriental y se van haciendo más antiguas (y su litosfera más fría y gruesa) a medida que se alejan, en forma aproximadamente perpendicular a dicha dorsal. Consecuentemente, la edad de las rocas del fondo marino resultan positivamente correlacionadas con el grosor de la litosfera. De este modo, la interpretación de las curvas de dispersión de ondas superficiales se hace generalmente utilizando una estructura vertical que consiste en una corteza oceánica, una litosfera con propiedades aproximadamente homogéneas, una zona de baja velocidad para la onda sísmica S y una capa subyacente. La resolución de la información dentro de los períodos mencionados no permite determinar propiedades a una profundidad mayor que la de la base de la zona de baja velocidad. Tampoco se pueden resolver detalles estructurales verticales que tienen longitudes características menores que unos 20-50 km, deteriorándose esta resolución a medida que la profundidad aumenta.

Analicemos, ahora, la suficiencia de la información que comúnmente se puede recolectar. Dado que las estaciones sismológicas se encuentran en tierra firme, ya sea en continentes o en islas, el muestreo no es generalmente satisfactorio, en el sentido de que no cubre homogéneamente el área de estudio. Además, la longitud de los recorridos es generalmente del orden de miles de kilómetros siendo, entonces, el muestreo muy global.

Lo anterior indica que la determinación de los parámetros estructurales constituye un problema mal condicionado, porque, primero, los tiempos de recorrido son medidas globales que suavizan los detalles estructurales del recorrido; segundo, el muestreo es incompleto debido a restricciones en la distribución de fuentes y sensores, y, finalmente, existe la conocida indeterminación para estimar la estructura de zonas de baja velocidad. Como consecuencia de lo anterior, el error observacional juega un factor desproporcionadamente alto en una solución tal como la mínimo-cuadrática estándar. En la práctica, tenemos inestabilidad y no-unicidad en las soluciones.

La inversión directa de tiempos de recorrido para estimar propiedades estructurales regionales tiene la ventaja de evitar las correlaciones entre las estimaciones intermedias que son propias del método con que se calculan previamente las velocidades regionales. Sin embargo, la determinación de velocidades regionales (o, más generalmente, puntuales o locales) tiene la ventaja de que sus resultados se interpretan muy directamente, dada la simplicidad que generalmente presentan las velocidades de fase o de grupo de las ondas superficiales tomadas como función del período. Esto último se aplica particularmente al modo fundamental de dichas ondas.

En una serie de artículos, Yanovskaya y sus colaboradores han desarrollado y aplicado métodos para estimar velocidades locales aplicando una estabilización sobre las coordenadas espaciales al método mínimo-cuadrático (Yanovskaya, 1982; Ditmar y Yanovskaya, 1987; Nesterov y Yanovskaya, 1988; Yanovskaya *et al.*, 1988; Yanovskaya y Ditmar, 1990). En este artículo, se presenta un método que aplica una regularización sobre la dependencia en el período de las curvas de dispersión. Hasta donde llega nuestro conocimiento, no se ha reportado hasta ahora un procedimiento semejante o equivalente en la literatura.

### EL METODO DE REGULARIZACION

En esta sección, los elementos de una matriz son simbolizados por letras minúsculas con subíndices; las letras mayúsculas señalan matrices u operadores, mientras que las letras griegas designan escalares. El símbolo  $I$  denota una matriz identidad de dimensión adecuada. El tiempo de recorrido  $t_{ij}$  correspondiente a un recorrido  $i$  y al período  $j$  está relacionado con las velocidades puntuales  $v_j(\theta, \phi)$  a través de

$$t_{ij} = \int_{R_i} \frac{dl}{v_j(\theta, \phi)} = \int_{R_i} S_j(\theta, \phi) dl \quad (1)$$

donde  $\theta$  y  $\phi$  son coordenadas de la superficie,  $v_j(\theta, \phi)$  es la velocidad puntual para el período  $j$ ,  $R_i$  representa la trayectoria (de Fermat) y  $S_j(\theta, \phi)$  es la lentitud correspondiente. Utilizado un modelo compuesto por regiones homogéneas, la ecuación (1) queda algebrizada del modo siguiente

$$t_{ij} = \sum_{r=1}^k l_{ir} S_{rj} \quad (2)$$

donde  $l_{ir}$  es el segmento de la trayectoria  $i$  en la región  $r$ . El número total de regiones cruzadas por la trayectoria global es  $k$ . Forsyth (1975) ha demostrado que, en situaciones geofísicas normales, se comete un error despreciable cuando se calculan los segmentos  $l_{ir}$  utilizando trayectorias de longitud mínima (líneas geodésicas) en vez de trayectorias de tiempo mínimo (recorridos de Fermat).

Una normalización conveniente de (2) consiste en dividir ambos lados de la ecuación por la longitud total de recorrido  $L_i$ , de donde resulta

$$\frac{t_{ij}}{L_i} = \sum_{r=1}^k \frac{l_{ir}}{L_i} S_{rj} \quad (3)$$

que, en notación compacta, queda

$$Y = LS \quad (4)$$

Cada elemento de la matriz  $Y$  representa el valor promedio de la lentitud para una trayectoria y un período en particular. Como se ve, estamos obligados a tratar las incógnitas como una matriz ya que queremos acoplar los componentes espectrales de la lentitud a través de una condición de regularización. Al mismo tiempo, debemos lograr que el sistema (4) quede sobredeterminado, por lo menos formalmente. Aunque se puede determinar el número de grados de libertad utilizando la descomposición en valores singulares (DVS), tal como se hizo en Traslosheros *et al.* (1990), hemos encontrado preferible aplicar un método más general de regularización (Phillips, 1962; Tikhonov, 1963; Tikhonov y Arsenin, 1977) aunque su implementación no haga posible aplicar al mismo tiempo la DVS.

La función criterio que se minimiza es la siguiente

$$F = \|Y - LS\|^2 + \alpha \|D_p S^T\|^2 \quad (5)$$

donde definimos la norma cuadrática de una matriz a través de

$$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 \quad (6)$$

$S^T$  es la matriz transpuesta de  $S$  y  $D_p$  es una matriz que representa la versión discreta del operador "derivada de orden  $p$ ". El parámetro  $\alpha$  mide el peso relativo en la minimización de ambos términos de  $F$ , es decir, determina el grado de la estabilización (segundo término) en el ajuste del modelo a los datos (primer término).

Siguiendo la metodología expuesta por Frez (1989), tomamos en cuenta la contribución del espacio nulo del operador  $D_p$  descomponiendo a  $S$  como

$$S = S_* + S_p \quad (7)$$

de tal modo que

$$D_p S_p^T = 0 \text{ y } D_p S_*^T \neq 0 \quad (8)$$

Por lo tanto, las filas de  $S_p$  deben ser polinomios de grado  $p - 1$ , en función del período. Si definimos a  $X_p$  como

$$X_p = \begin{pmatrix} 1 & w_1 & w_1^2 & \dots & w_1^{p-1} \\ 1 & w_2 & w_2^2 & \dots & w_2^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w_n & w_n^2 & \dots & w_n^{p-1} \end{pmatrix} \quad (9)$$

donde  $\{w_i\}$  corresponden a los valores discretos de las variables independientes, en nuestro caso, los períodos de medición, y llamando  $C$  a la matriz de los coeficientes polinomiales a determinar, resulta que

$$S_p^T = X_p C \quad (10)$$

El problema inverso consiste en determinar  $S_*$  y  $C$  de tal modo que minimicen la función criterio  $F$  dada en (5). Las ecuaciones normales resultantes son

$$L^T L S_* + L^T L S_p + \alpha S_*^T D_p^T D_p = L^T Y \quad (11)$$

$$X_p^T Y^T L - X_p^T S_*^T L^T L - X_p^T X_p C L^T L = 0 \quad (12)$$

Despejando  $C$  e introduciendo (10), tenemos

$$S_p = (L^T L)^{-1} L^T (Y - L S_*) X_p (X_p^T X_p)^{-1} X_p^T \quad (13)$$

En lo que sigue, utilizamos a la matriz  $G_p$ , que representa la forma discreta de la función de Green correspondiente a  $D_p$ ; la definición correspondiente es

$$D_p^{-1} = G_p W \quad (14)$$

donde  $W$  es una matriz diagonal formada por factores de integración numérica. Introduciendo (13) en (11) y utilizando (14), se obtiene la ecuación normal para  $S_*$

$$L^T L S_* \left[ I - X_p (X_p^T X_p)^{-1} X_p^T \right] G_p W^2 G_p^T + \alpha S_* = L^T Y \left[ I - X_p (X_p^T X_p)^{-1} X_p^T \right] G_p W^2 G_p^T \quad (15)$$

La expresión (15) es del tipo

$$AXB + XC = D \quad (16)$$

cuya solución, es decir la determinación de  $X$ , no es trivial aunque se puede obtener en forma compacta a través de sumas y productos de Kronecker (Bellman, 1970). En nuestro algoritmo desarrollamos la ecuación (16) de tal forma que indique directamente su solución numérica. Para obtener una expresión que cumpla esta condición, pasamos (16) a notación indicial y, aplicando la convención de Einstein, obtenemos

$$a_{ik} x_{km} b_{mj} + x_{jm} c_{mj} = d_{ij} \quad (17)$$

la cual, utilizando la delta de Kronecker  $\delta_{ij}$  equivale a

$$[a_{ik} b_{mj} + \delta_{ik} c_{mj}] x_{km} = d_{ij} \quad (18)$$

De este modo, la ecuación (16) se transforma en otra del tipo

$$Rx = y \quad (19)$$

donde  $R$  es una matriz cuadrada, mientras que  $x$  y  $y$  son vectores que contienen, respectivamente los elementos ordenados de  $X$  y  $D$  de acuerdo a las expresiones siguientes

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} B^T + C^T & a_{12} B^T & \dots & a_{1k} B^T \\ a_{21} B^T & a_{22} B^T + C^T & \dots & a_{2k} B^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} B^T & a_{k2} B^T & \dots & a_{kk} B^T + C^T \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$x^T = (x_{11} \ x_{12} \dots x_{1n} \ x_{21} \ x_{22} \dots x_{2n} \dots x_{k1} \ x_{k2} \dots x_{kn}) \quad (21)$$

$$y^T = (d_{11} \ d_{12} \dots d_{1n} \ d_{21} \ d_{22} \dots d_{2n} \dots d_{k1} \ d_{k2} \dots d_{kn}) \quad (22)$$

Si R no es singular, lo que está asegurado debido a la estabilización hecha al problema original, la solución de (17) resulta ser

$$x = R^{-1} y \quad (23)$$

Con el procedimiento bosquejado, obtenemos S\*; mediante (13), obtenemos S<sub>p</sub> y, finalmente, (7) nos da S. No creemos necesario agregar en (5) un término que represente la estabilización de la componente S\* de la solución; obviaremos esta complicación en este trabajo, aunque ello puede ser necesario en otros contextos (Frez, 1992).

En las dos secciones siguientes, describimos la comprobación del procedimiento, además de un ejercicio de aplicación.

#### IMPLEMENTACION Y VERIFICACION DEL PROCEDIMIENTO

El algoritmo se codificó en lenguaje FORTRAN y se usaron unidades físicas para las velocidades regionales; las variables reales se definieron a precisión doble, lo que en la computadora PRIME 750 equivale a trece cifras significativas. En la optimización del programa, las matrices fueron tratadas como arreglos unidimensionales con el objeto de minimizar el tiempo de computación, tanto el empleado en lecturas y escrituras como en los cálculos correspondientes al álgebra matricial. Los cálculos de las funciones de Green y de los polinomios que conforman el espacio nulo de D<sub>p</sub> fueron hechos para argumentos normalizados entre 0 y 1.

En el diseño y la aplicación de algoritmos de regularización (Frez, 1985; Esparza, 1985; Frez, 1989; Frez, 1992), hemos empleado valores de p = 1, 2 y 4. Una serie de experimentos numéricos hechos al comienzo de la presente investigación (que por brevedad se omiten), demostraron que curvas de dispersión relativamente simples y aproximadamente unívocas se pueden obtener con cualquiera de estos tres valores de p. Así, reportamos solamente resultados para valores de p = 2. Comúnmente, se prueban diez valores diferentes del parámetro de regularización α en cada corrida del programa de computación. Estos valores se eligen equiespaciados en escala logarítmica cubriendo alrededor de diez órdenes de magnitud en escala decimal. Los resultados se grafican, examinándose las velocidades estimadas y los residuales correspondientes. Lo que se busca es una solución estable (o sea, con buena suavidad) y, al mismo tiempo, un comportamiento aleatorio de los residuales cuyas oscilaciones estén de acuerdo con el nivel del error estimado. Para valores pequeños del parámetro de regularización, la solución debe tender a la mínimo-cuadrática que, en general, presenta oscilaciones poco realistas

en las velocidades estimadas; los residuales correspondientes tienen valores mucho más pequeños que el nivel de error. Así, la solución es inestable y sobreajusta los datos. A medida que se aumenta el valor del parámetro de regularización, las velocidades estimadas adquieren un mayor grado de suavización y los residuales oscilan dentro de un nivel que está más de acuerdo con los errores estimados. Un valor demasiado alto del parámetro de regularización produce residuales muy grandes que muestran comportamientos sistemáticos; la solución también señala errores sistemáticos al imponérsele un carácter exageradamente suave.

En lo que respecta a la regularización óptima de un estimador, hay dos aspectos que conviene considerar. El más inmediato es la selección de los valores de los parámetros por medio de los cuales muestreamos el espacio de soluciones, en nuestro caso los parámetros p y α. Un paso más general tiene que ver con la selección del operador regularizante; donde daremos por incluida, de aquí en adelante, la de la norma (cuadrática, en nuestro caso) que se utiliza en la función criterio F. Un muestreo directo del espacio de soluciones buscando funciones que satisfagan la ecuación (4), es decir la discretización de (1), puede producir soluciones que satisfacen los datos pero que son, a la vez, altamente oscilantes. El método de regularización -y, en general, cualquier método de estabilización- consiste en restringir el espacio que se muestrea a través de la selección del operador regularizante; esta restricción se hace mayor con la selección de valores numéricos para p y α. Si el subespacio que se muestrea contiene la solución "verdadera" y un entorno alrededor de ella, obtendremos una buena estimación. La conclusión de esta breve discusión es que la selección del operador regularizante debiera estar basada en las propiedades del operador que describe el modelo directo; en el fondo, en la física subyacente al problema matemático. Esto es extremadamente difícil; la literatura no menciona ninguna tentativa en este sentido que haya tenido éxito. Además de la dificultad analítica, existe la de manejar operadores regularizantes suficientemente generales (y, por lo tanto, complicados) en el procedimiento numérico. En particular, ello puede implicar el manejo de varios parámetros de estabilización. Lo que se hace comúnmente es utilizar operadores y normas suficientemente simples para su tratamiento matemático-computacional pero con flexibilidad tal que produzcan soluciones óptimas. Como ya se expresó, buscamos un comportamiento suave de la solución y aleatorio de los residuales, además de una distribución unimodal en las curvas de resolución. Desde un punto de vista pragmático, el método de regularización se comprueba a través de experimentos numéricos. En nuestro caso, la simplicidad de las curvas de dispersión (modo fundamental) nos mueve a esperar resultados significativos al aplicar esta metodología. No es posible, por supuesto, eliminar una cierta dosis de subjetividad pero lo mismo vale generalmente en la práctica de la estimación de funciones continuas, no sólo con los métodos de regularización sino también, por ejemplo, con los espectrales. Una mayor discusión de este tema, aunque no muy productiva desde el punto de vista práctico, aparece en Cullum (1979).

En lo que sigue, describimos tres series de experimentos computacionales cuyo objeto es comprobar el procedimiento. Para ello, utilizamos un modelo que suponemos real; generamos tiempos de arribo a los cuales se les agrega una componente aleatoria que simula error, y, por último, usamos estos tiempos para estimar los parámetros del modelo con el procedimiento mínimo-cuadrático regularizado. Como comparación, también hacemos una estimación con el método mínimo-cuadrático estándar.

La geometría del modelo que se utiliza para generar los datos se muestra en la Figura 1; las velocidades de las tres regiones aparecen dibujadas en la Figura 2.

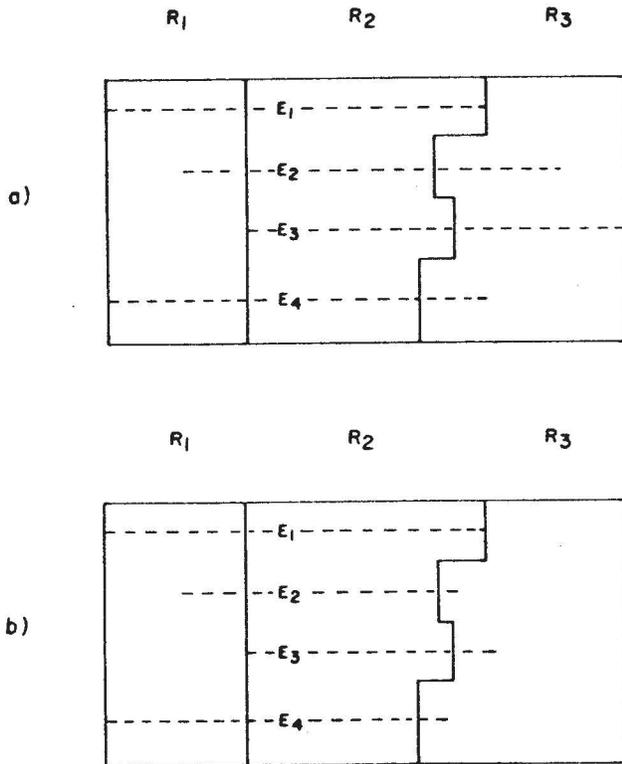


Figura 1. Geometría del modelo y trayectorias que se utilizan en los dos primeros experimentos numéricos. Las velocidades de las regiones R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub> y R<sub>3</sub> aparecen en la Figura 2. Las trayectorias son señaladas por líneas segmentadas para el primer (a) y segundo (b) conjunto de experimentos numéricos. Las trayectorias totales tienen valor 1.0, de acuerdo con la normalización descrita en el texto.

Los tiempos calculados fueron contaminados con una componente de error aditivo gaussiano de promedio nulo y, en dos casos separados, con dos valores de desviación estándar. La primera desviación estándar corresponde a 1% de la velocidad promedio de todos los recorridos; éste es un valor realista para errores en las observaciones de velocidades de fase de ondas Rayleigh en el rango de 30 s a 100 s

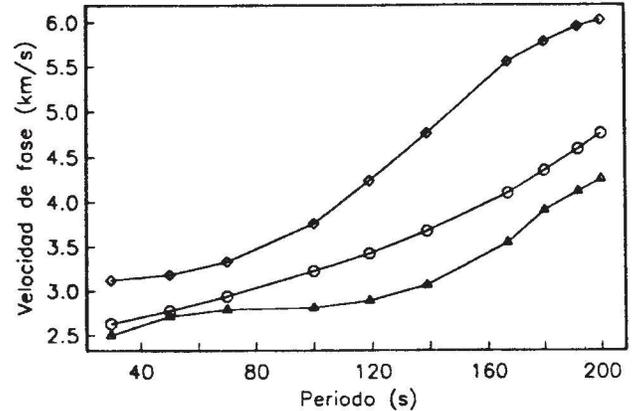


Figura 2. Velocidades (dispersivas) que corresponden a las regiones R<sub>1</sub> ( $\Delta$ ), R<sub>2</sub> (o) y R<sub>3</sub> ( $\diamond$ ) que son definidas en la Fig.1.

(Brune y Dorman, 1963). El segundo nivel de error corresponde a una desviación estándar igual a la mitad del valor anterior.

La Figura 3 muestra los errores de estimación, definidos como la diferencia entre la velocidad "real" de cada región y la estimada por los dos procedimientos, el regularizado y el mínimo-cuadrático estándar. Para la desviación estándar del 1% los valores de  $\alpha$  que se usaron, para la regionalización mostrada en la Figura 1a y 1b, fueron 1.0 y 0.2 respectivamente. En el segundo nivel de ruido los valores del parámetro  $\alpha$  que se utilizaron, siguiendo el mismo orden que en el caso anterior, fueron 0.001 y 0.1 respectivamente. En unos pocos casos, los errores son mayores que las cotas dadas en las gráficas. Las gráficas permiten obtener algunas conclusiones:

- En general, el procedimiento regularizado funciona adecuadamente, en el sentido de que las estimaciones producen errores pequeños, es decir, de acuerdo con el nivel que se eligió en el modelado directo.
- El método de regularización produce soluciones más estables que el método mínimo-cuadrático estándar. Esta diferencia se hace más notable para la región R<sub>3</sub>, cuando esta región tiene un muestreo deficiente.
- Las curvas de errores para el caso regularizado no muestran con claridad un comportamiento aleatorio, aunque se trató de obtener tal comportamiento en la selección de la solución. Esto indica que existen correlaciones entre los diferentes elementos de la matriz solución, lo que puede verse en especial para los períodos más largos, digamos mayores a 100 s. Lo anterior implica que la solución contiene errores sistemáticos que son función del período.

El tercer experimento numérico ataca un problema de índole muy diferente. El procedimiento regularizado trabaja

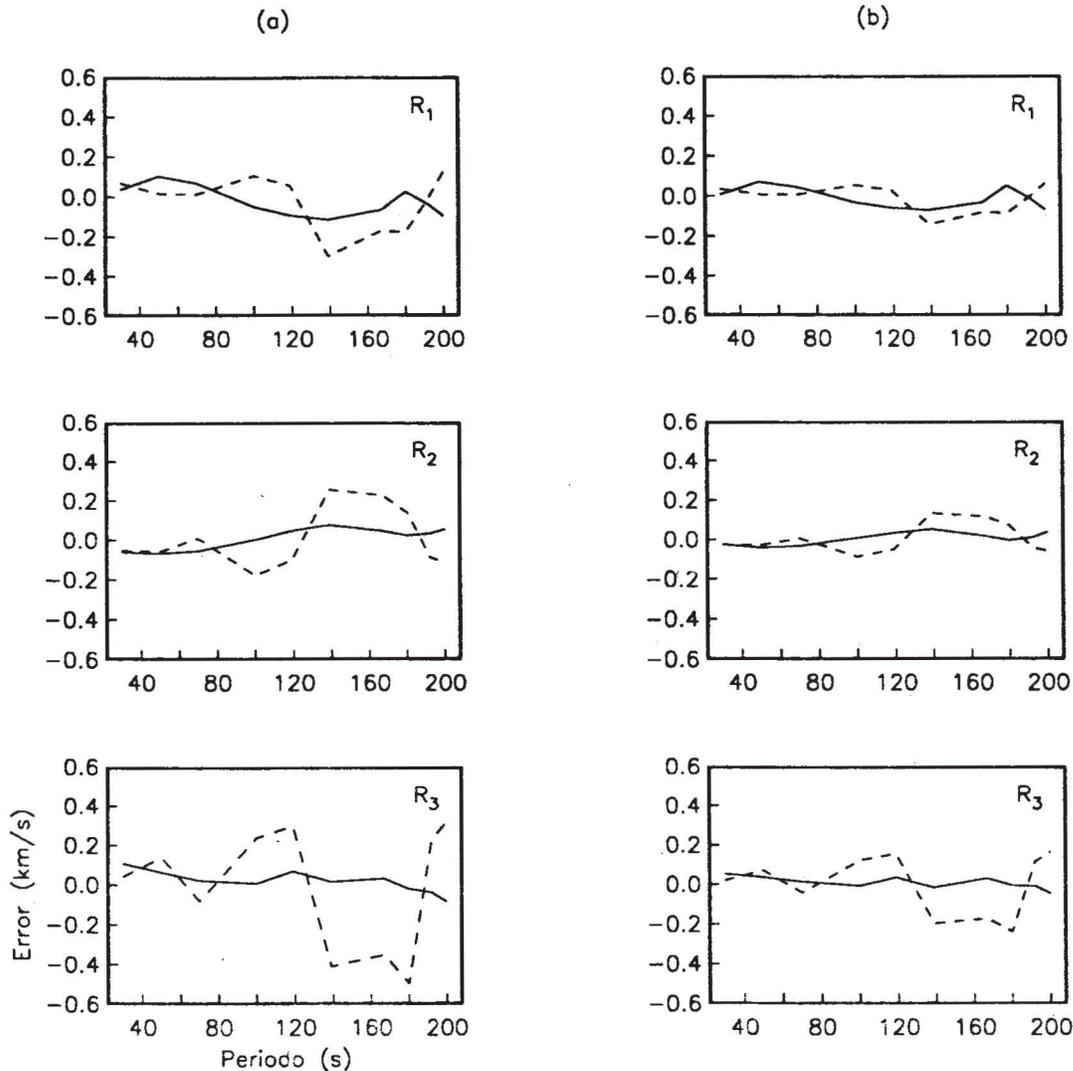


Figura 3. Error (velocidad verdadera menos la estimada) en función del período correspondiente a los dos primeros experimentos numéricos. La línea continua corresponde a la solución regularizada, mientras que la segmentada, a la mínimo-cuadrática estándar.

- a) Caso de cobertura relativamente buena, en que los datos se contaminaron con ruido gaussiano con promedio nulo y desviación estándar del 1% del valor medio de la velocidad.
- b) Idem, excepto que la desviación estándar es del 0.5% del valor medio de la velocidad.

mucho más eficientemente cuando se tiene información para todos los períodos para los cuales se han discretizado las curvas de dispersión observadas. Esto no siempre es el caso para mediciones reales, donde es común que falten datos, particularmente para los períodos extremos del rango de estudio. Esta falta de datos no implica una dificultad seria cuando el procedimiento de estimación desacopla cada observación en las curvas de dispersión, como es el caso del método mínimo-cuadrático estándar. Sin embargo, nuestro método regularizado suaviza sobre el argumento de las curvas de dispersión y, por lo tanto, es deseable que el algoritmo cubra todos los períodos definidos. Esto llevaría a excluir aquellas trayectorias cuyas curvas tengan lagunas de información para algunos de los períodos lo que, obviamente,

no es deseable. Por lo tanto, hemos diseñado un método iterativo para solucionar esta dificultad. Primero, usamos sólo las trayectorias completas para estimar las velocidades (lentitudes) regionales; con este resultado, interpolamos los valores que corresponden a las lagunas de información. Finalmente, con las lagunas así cubiertas, utilizamos todas las curvas de dispersión con que se cuenta.

Para probar este procedimiento, se hizo un experimento numérico que utiliza cinco trayectorias, tres regiones y diez períodos. La Figura 4 muestra las regiones y las trayectorias. Las tres regiones tienen asociadas las mismas curvas de dispersión que en los dos experimentos anteriores y que aparecen en la Figura 2. El error se simuló con nú-

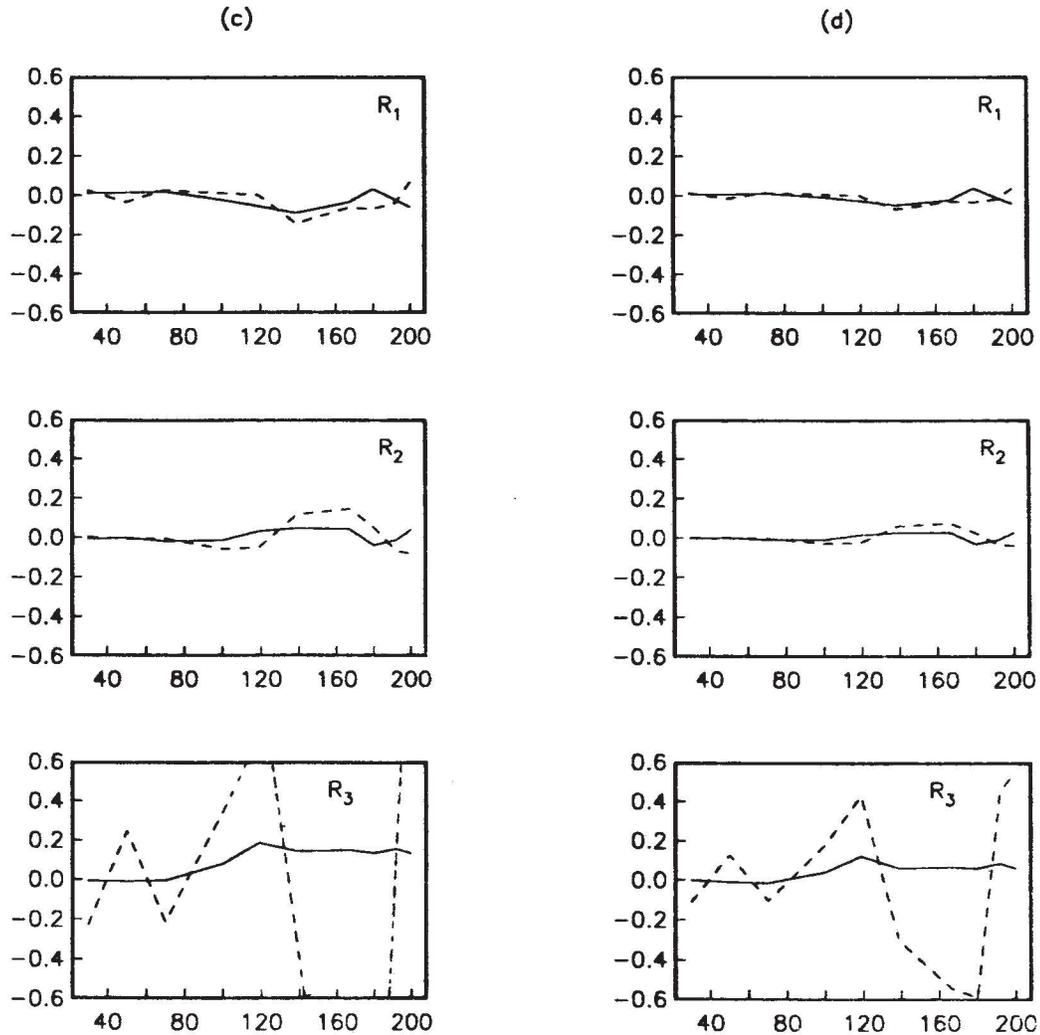


Figura 3. Error (velocidad verdadera menos la estimada) en función del período correspondiente a los dos primeros experimentos numéricos. La línea continua corresponde a la solución regularizada, mientras que la segmentada, a la mínimo-cuadrática estándar.

c) Caso de cobertura relativamente mala, en que los datos se contaminan con ruido gaussiano con promedio nulo y desviación estándar del 1% del valor medio de la velocidad.

d) Idem, excepto que la desviación estándar es del 0.5% del valor medio de la velocidad.

meros aleatorios gaussianos con promedio nulo y una desviación estándar que corresponde a un 0.5% del valor de la velocidad promedio.

La Figura 5a muestra los errores de estimación graficados en función del período, para cada región y después de usar todas las observaciones correspondientes a las cinco trayectorias. Enseguida, se supuso que a la trayectoria  $E_5$  le faltaban las lentitudes promedio correspondientes al primero, segundo y último períodos. La Figura 5b presenta los errores cuando se elimina  $E_5$ . La Figura 5c presenta las gráficas correspondientes a los cinco recorridos, cuando se interpolan los datos faltantes de  $E_5$  con el procedimiento iterativo anteriormente bosquejado. Finalmente, los valores del parámetro  $\alpha$  que se usaron en este caso aparecen en la Tabla 1.

Obsérvese que las estimaciones regularizadas que utilizan datos interpolados (Figura 5c) son aproximadamente iguales a las que resultan de usar un conjunto completo de datos (Figura 5a). La consideración de una nueva trayectoria hace que el error para  $R_3$  disminuya (Figuras 5a y 5b). Sin embargo, la inclusión de la nueva trayectoria hace que aparezcan correlaciones entre las estimaciones de las tres regiones para los últimos períodos. Dicha característica se encuentra presente tanto en las estimaciones mínimo-cuadráticas como en las regularizadas y no se ha podido erradicar, ni con fuertes variaciones en el parámetro de estabilización.

De las Figuras 5a, 5b y 5c, concluimos que es posible y conveniente tomar en cuenta las trayectorias incompletas con la metodología antes mencionada. El procedimiento

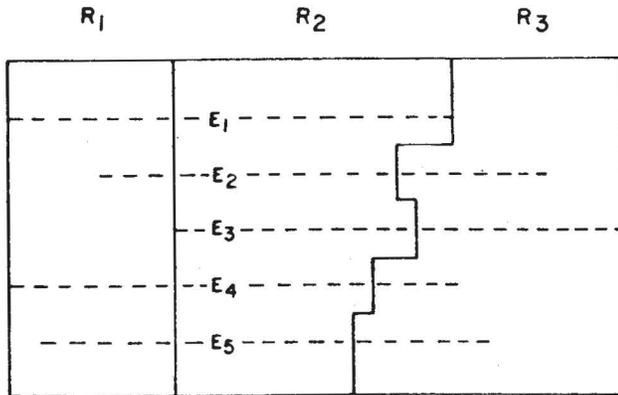


Figura 4. Geometría del modelo que se utiliza en el tercer experimento; las velocidades correspondientes a las tres regiones están definidas en la Figura 2. Se trata de tres regiones (R1, R2 y R3) y cinco trayectorias (E1 a E5). Las trayectorias totales tienen valor 1.0, de acuerdo con la normalización descrita en el texto.

puede interpretarse como un método iterativo en el que los datos faltantes entran virtualmente como incógnitas.

En conclusión, los experimentos numéricos comprueban la corrección del álgebra, de los algoritmos numéricos y de la codificación para hacer una estimación estabilizada de velocidades regionales. Parece razonable también concluir que, dado el alto grado de suavidad de las funciones incógnitas (entre los puntos de discretización), es posible recuperarlas con facilidad usando operadores regularizantes relativamente simples.

### APLICACION

Como una verificación adicional del procedimiento, hemos utilizado el conjunto de observaciones de velocidades de fases de ondas Rayleigh correspondientes a recorridos en el Océano Pacífico reportadas y analizadas originalmente por Leeds (1973), Kausel *et al.* (1974), Leeds *et al.* (1974) y Leeds (1975). Considerando que es más fácil tomar en cuenta las correlaciones entre las estimaciones en un paso en vez de dos, Leeds *et al.* (1974) invirtió directamente las observaciones para estimar parámetros estructurales. Nuestro propósito es obtener velocidades regionales que se puedan comparar con las calculadas a partir de las estructuras determinadas directamente por Leeds *et al.* (1974).

Los recorridos y la regionalización utilizada aparecen en Leeds (1973), Kausel *et al.* (1974) y Leeds *et al.* (1974). Hay 35 trayectorias, ocho regiones y las curvas de dispersión cubren períodos entre los 30 y los 192 s. De las 35 trayectorias, cuatro están dentro de los mares marginales por lo que no se tomaron en cuenta. De las restantes, sólo ocho trayectorias no tienen lagunas en su cobertura del período; en total, de las 248 posibles observaciones, hay 63 lagunas. Leeds *et al.* (1974) regionalizó el Océano Pacífico en ocho regiones, siendo la primera (R1) la más antigua (con una edad promedio de 150 millones de años) y la octava (R8), la más reciente (con una edad entre 0 y 10

millones de años).

De acuerdo con lo expuesto en la sección anterior, nuestra estrategia consiste en, primero, invertir las ocho trayectorias de cobertura completa, interpolar los valores correspondientes a las lagunas, y, por último iterar utilizando todas las trayectorias así completadas.

Para que la estimación basada en ocho trayectorias constituya un problema formalmente sobredeterminado, se redujo el número de regiones de ocho a cinco. Así, se formaron las regiones RP1 (R1 y R2), RP2 (R3), RP3 (R4), RP4 (R5 y R6) y RP5 (R7 y R8) donde hemos puesto entre paréntesis las definiciones correspondientes en términos de las ocho regiones originales. Las soluciones mínimo-cuadráticas regularizadas que hemos juzgado óptimas se ilustran en la Figura 6 y en la Tabla 1 aparece el valor de  $\alpha$  que se utilizó. El comportamiento suave de las soluciones regularizadas es aparente.

Como medida de ajuste, usamos dos criterios. Para el primero, tomamos la siguiente función criterio

$$G = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{v_i^o - v_i^c}{e_i} \right)^2} \quad (24)$$

donde comparamos  $n$  observaciones de valores promedios de velocidades  $\{v_i^o\}$  con las predichas por la estimación ( $v_i^c$ ) y tomando en cuenta el error observacional  $e_i$ . Este último se calcula utilizando la estimación del error del tiempo de arribo según la fórmula de Leeds (1975)

$$e_i = \max(7 \text{ s}, 0.1 T) \quad (25)$$

donde  $T$  es el período que corresponde a la observación. Enseguida, propagamos este error, en primera aproximación para calcular la perturbación consiguiente (en su valor absoluto) en la velocidad promedio.

Suponiendo que los errores están bien estimados, un valor de  $G$  mucho menor que 1.0 indica sobreajuste. Como ya se discutió anteriormente, esto, a su vez, sugiere que la solución correspondiente es inestable. Por otro lado, un valor de  $G$  mucho mayor que 1 indica mal ajuste y una estabilización exagerada.

El segundo criterio de ajuste utilizado es la prueba de  $\chi^2$  que lleva la suposición implícita de que los errores de las observaciones son gaussianos.

La Tabla 2 muestra los valores de  $G$  para los diferentes recorridos. Su inspección muestra que los valores numéricos son aceptables. La Figura 7 muestra el histograma de los 64 residuales en velocidades (normalizados por los errores de observación) además de la curva gaussiana que se le ajusta. El promedio y la desviación estándar son 0.024 y 0.857 respectivamente. El valor obtenido de la estadística  $\chi^2$  es 4.55 y, como conclusión, no podemos rechazar la hipótesis gaussiana a un nivel de significación del 1%.

Las dos pruebas anteriores indican que el ajuste es aceptable y, por lo tanto, usamos las curvas regionales resultantes para estimar los tiempos de arribo que hacen falta en las curvas de dispersión observadas. El procedimiento se continuó de la manera antes señalada. Utilizando los diversos criterios de selección (análisis de las soluciones, de los residuales, de la matriz de sensibilidad L, además de las estadísticas G y  $\chi^2$ ), hemos obtenido un conjunto de soluciones que consideramos óptimas; la Tabla 1 da el valor del parámetro  $\alpha$  que utilizamos. La Figura 8 muestra estas soluciones. Valores típicos de los residuales (normalizados) son ilustrados en la Figura 9. Los valores de la estadística G aparecen en la Tabla 3 y un histograma de los residuales y la curva gaussiana que los ajusta, en la Figura 10. El promedio y la desviación estándar son 0.031 y 1.168, respectivamente. El valor de la estadística  $\chi^2$  es 12.215, lo que implica que no se puede rechazar la hipótesis gaussiana a un nivel de significación del 1%. Los ajustes mostrados en la Figura 9 señalan errores sistemáticos en la estimación; sin embargo, el histograma de residuales y los valores numéricos de la estadística  $\chi^2$  indican un buen ajuste. Este es un ejemplo típico del hecho de que los criterios globales de ajuste no deben ser predominantes en la aceptación de un trabajo de modelado. El análisis que sigue comprueba esta aserción.

El examen del valor de los elementos de las columnas de la matriz L nos hace concluir que la region R<sub>7</sub> tiene el muestreo más deficiente. (Las normas de las columnas son, por orden, 0.83, 1.20, 1.48, 0.91, 1.06, 0.99, 0.50 y 1.40 para cada una de las ocho regiones). Esta relativa poca sensibilidad se traduce en una mayor inestabilidad, cuando se calcula la solución mínimo-cuadrática estándar.

Podemos comparar nuestros resultados con otros obtenidos independientemente. Leeds *et al* (1974) obtuvo como resultado fundamental un modelo en que la litosfera se engruesa como función positiva de la edad del fondo marino. El modelo contiene varias suposiciones simplificadoras; en particular velocidades constantes de la litosfera subcortical y de la zona de baja velocidad. Aunque el modelo de Leeds *et al.* (1974) ha sido modificado (v.gr., Mitchell y Yu, 1980), lo que comprueba la falta de unicidad en este tipo de inversión, su resultado fundamental es aceptado. Discretizando este modelo, podemos calcular las velocidades de fase de ondas Rayleigh para cada región y compararlas con nuestras estimaciones. La comparación se ilustra en la Figura 11 y muestra un acuerdo para la mayor parte de las regiones con las excepciones de las regiones R<sub>3</sub> y R<sub>7</sub> y, en menor medida, para R<sub>6</sub>. Ya hemos mencionado que la

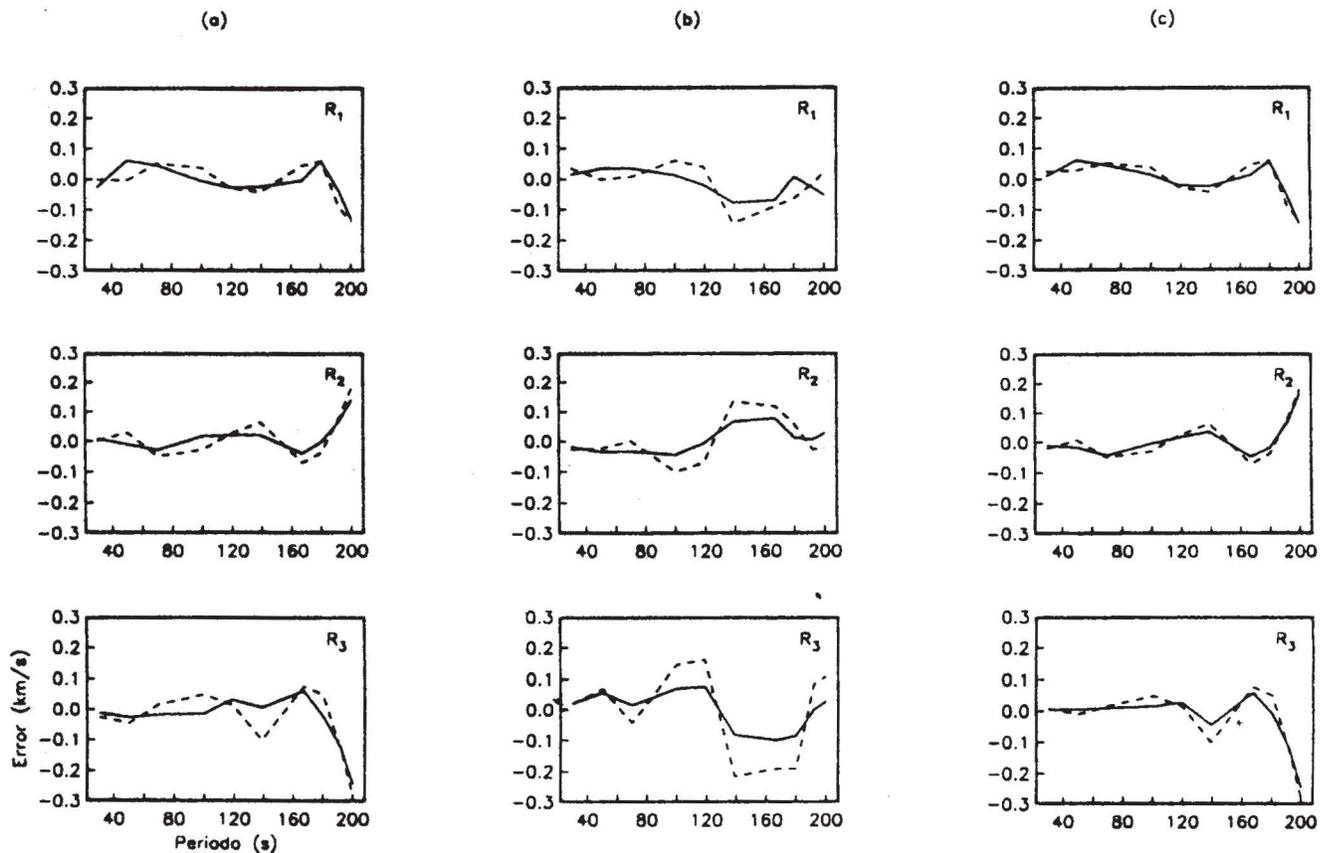


Figura 5. Errores en función del período para el tercer experimento numérico: a) se usan todas las trayectorias; b) se usan todas las trayectorias menos una; c) se usan todas las trayectorias llenando lagunas observacionales. Ver el texto para detalles. La línea continua señala la solución regularizada y la segmentada, la mínimo-cuadrática estándar.

Tabla 1

Valores del parámetro de regularización que se usaron en el ejercicio iterativo de interpolación y en el que se utilizaron datos reales.

Datos	Iteración 1	Iteración 2
Sintéticos: mét.iterativo	0.1	0.1
Leeds: todos los períodos	5	5
Leeds: sin los últimos dos períodos	5	100

región R7 tiene el muestreo más bajo mientras que R3 aparece con el mejor. Los resultados de Leeds *et al.* (1974) indican que nuestras determinaciones para R3 están subestimadas mientras que lo contrario sucede para R7 y, en menor medida, para R6. Esto sugiere una correlación entre

las tres estimaciones. Esta correlación es entre las velocidades de distintas regiones (o sea, en su dependencia espacial) y no en período (frecuencia) que es la variable sobre la cual se aplica la regularización.

Mitchell y Yu (1980), independientemente de Leeds *et al.* (1974), determinaron velocidades para tres regiones del Océano Pacífico entre los 20 s y 102 s. La comparación, tomando regiones de nuestra estimación que son aproximadamente equivalentes a las definidas en Mitchell y Yu (1980), es ilustrada en la Figura 12; hay buena coincidencia con nuestros resultados para las regiones R4 y R6 y una diferencia significativa para la región más reciente (R8). Sin embargo, en este último caso los resultados no son realmente comparables debido a que la región más reciente, para Mitchell y Yu (1980), se define para edades del piso oceánico menores de 20 millones de años en vez de los 10 millones de años que se usan para definir R8 en Leeds *et al.* (1974).

En resumen, tanto las pruebas como las comparaciones con los resultados de Leeds *et al.* (1974), o de Mitchell y Yu (1980), demuestran que el estimador regularizado produ-

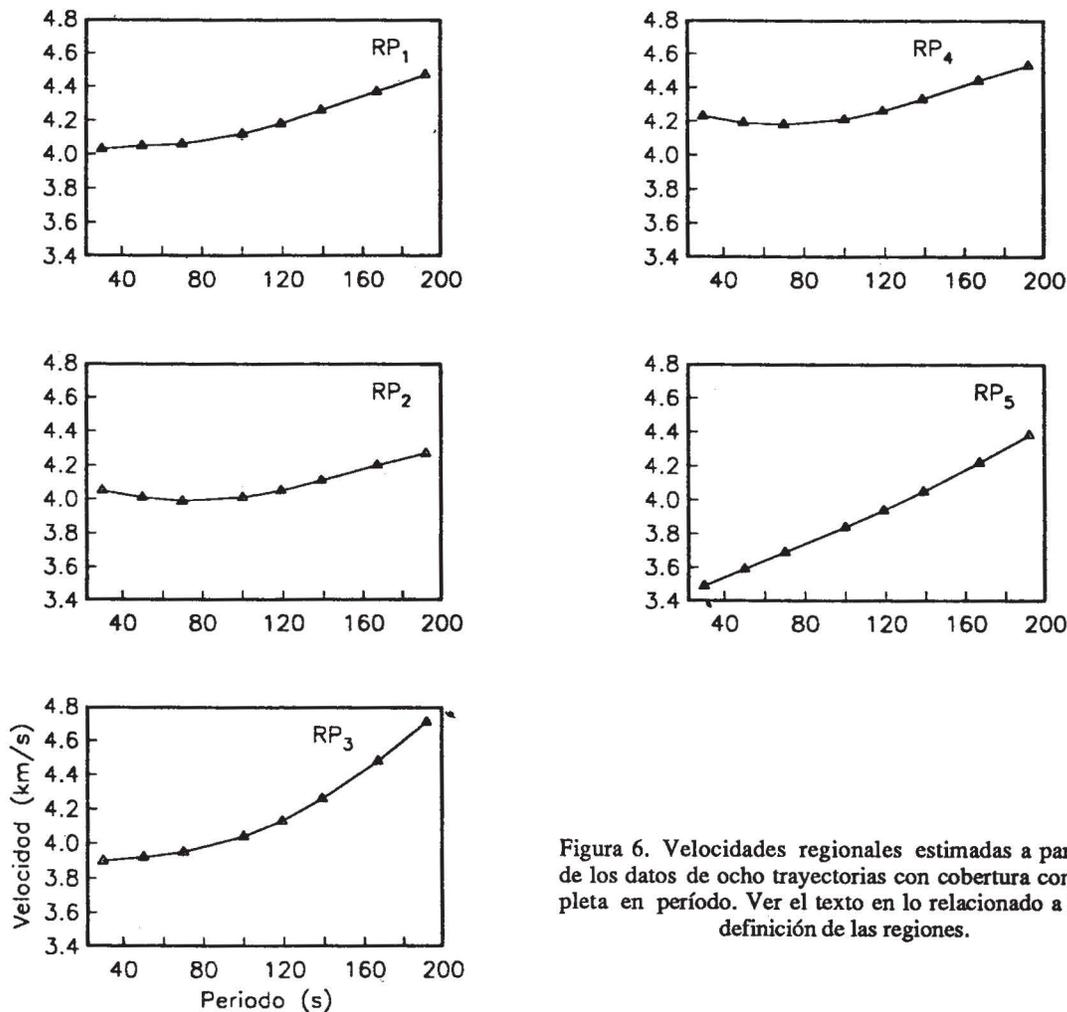


Figura 6. Velocidades regionales estimadas a partir de los datos de ocho trayectorias con cobertura completa en período. Ver el texto en lo relacionado a la definición de las regiones.

Tabla 2

Valor de la estadística G (residual normalizado cuadrático promedio) como medida de ajuste entre los datos y el modelo para cada una de las ocho trayectorias de cobertura completa para todos los períodos. Cada trayectoria se simboliza por la estación (tres primeras letras) y el número del sismo, siguiendo la nomenclatura de Kausel *et al* (1974) y Leeds *et al.* (1974), quienes analizaron los datos originalmente.

Recorrido	G (Ajuste)	Recorrido	G (Ajuste)
AFI-2	0.59	ANT-10	0.45
BAG-2	0.66	ARE-10	0.77
AFI-6	0.34	TAU-10	1.06
KIP-8	0.73	WEL-10	1.59

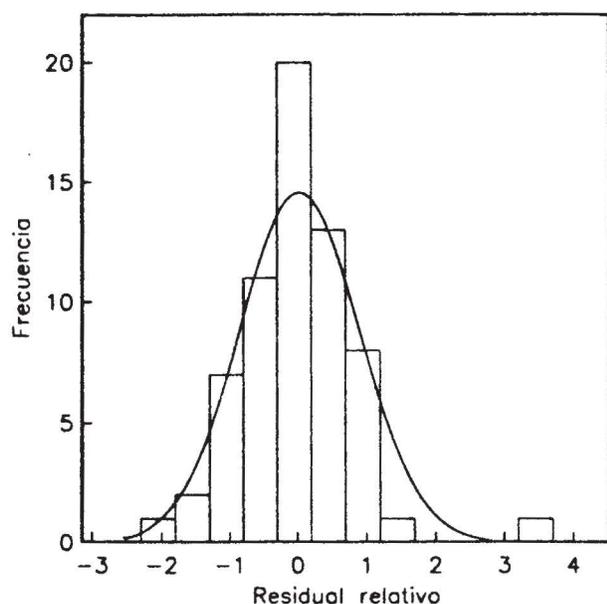


Figura 7. Histograma de residuales relativos que resultan de la inversión de ocho trayectorias completas. Un residual relativo se define como la razón entre el residual (valor observado menos el calculado) y el error asignado al valor observado correspondiente. Se acompaña la curva gaussiana de igual promedio y desviación estándar a la del histograma.

ce resultados razonables. Ya vimos, en la verificación del procedimiento, que este estimador mejora significativamente las determinaciones hechas por el método mínimo-cuadrático estándar. Sin embargo, nuestros resultados dejan que desear al menos en dos aspectos. En primer lugar, hay un claro error sistemático en las determinaciones para las regiones R<sub>7</sub> y R<sub>3</sub>. Una explicación de esta situación sería el muestreo insuficiente para el recorrido R<sub>7</sub> y una correlación entre las estimaciones correspondientes a R<sub>3</sub> y R<sub>7</sub>. Esta correlación rompe la relación funcional positiva que existe entre la edad del suelo oceánico y las velocidades de

fase y que aparece, por lo demás, globalmente en nuestros resultados. El segundo aspecto insatisfactorio de nuestros resultados tiene que ver con un error sistemático probable que se hace mayor para períodos más grandes. Este efecto se puede apreciar en la Figura 11 en las regiones R<sub>3</sub>, R<sub>4</sub>, R<sub>5</sub> y R<sub>6</sub>, siendo la tendencia sistemática en R<sub>7</sub> opuesta a la anterior.

Tabla 3

Valor de la estadística G (residual normalizado cuadrático promedio) como medida de ajuste entre los datos y el modelo, para cada una de las 31 trayectorias que muestrean el Océano Pacífico. Cada trayectoria se simboliza por la estación (tres primeras letras) y el número del sismo, siguiendo la nomenclatura de Kausel *et al.* (1974) y Leeds *et al.* (1974), quienes analizaron los datos originalmente.

Recorrido	G (Ajuste)	Recorrido	G (Ajuste)
GUA-1	0.67	PEL-7	1.81
HNR-1	1.71	SOM-7	0.93
AFI-2	0.64	KIP-8	1.08
BAG-2	0.81	AFI-9	0.41
DAV-2	0.93	ANP-9	0.66
GUA-2	1.04	BAG-9	0.98
HNR-2	0.69	DAV-9	0.78
PMG-2	0.39	ANT-10	0.68
RAB-2	0.77	ARE-10	1.56
RIV-2	1.61	GIE-10	0.39
BHP-3	0.69	PEL-10	0.51
LPB-3	2.23	RIV-10	0.87
GUA-4	1.77	TAU-10	0.66
LON-5	0.48	WEL-10	0.96
AFI-6	2.01	SBA-11	1.95
RAR-6	1.02		

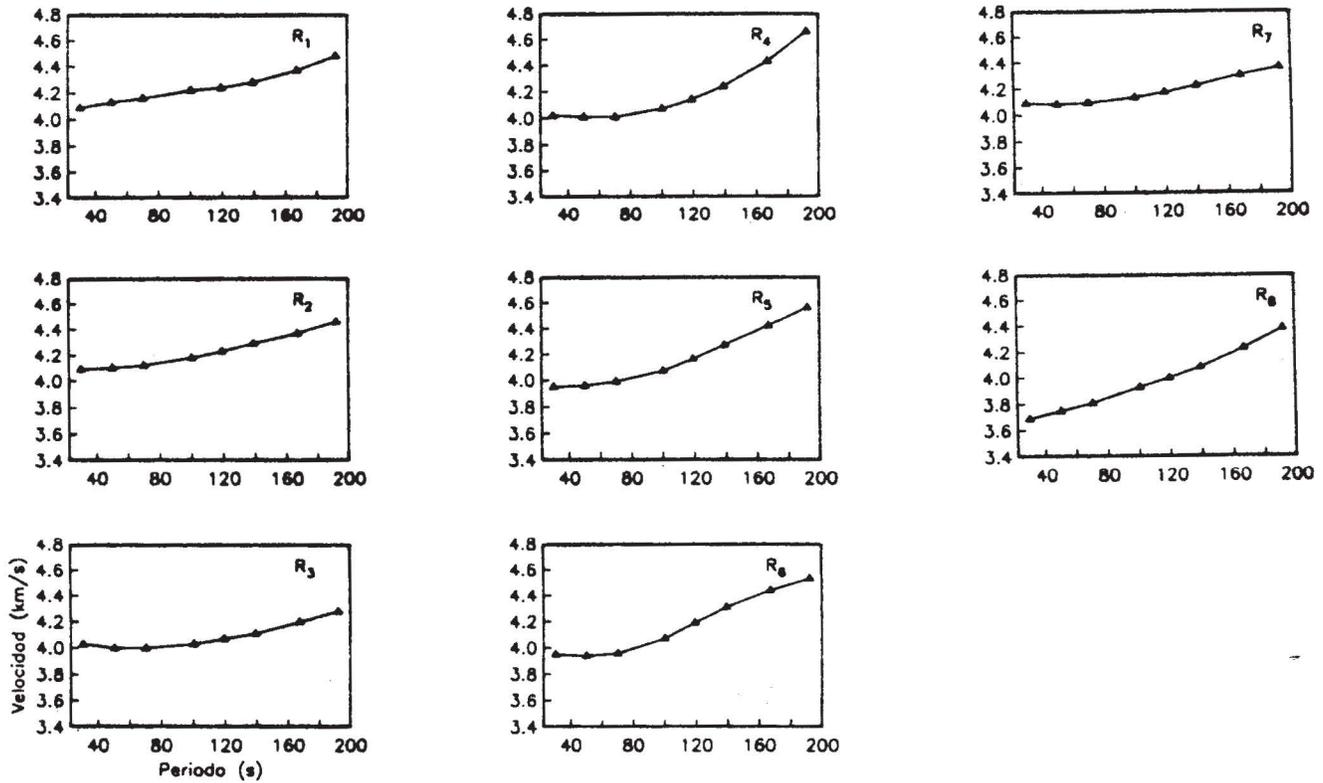


Figura 8. Soluciones regularizadas para las ocho regiones con todos los datos (31 trayectorias) disponibles.

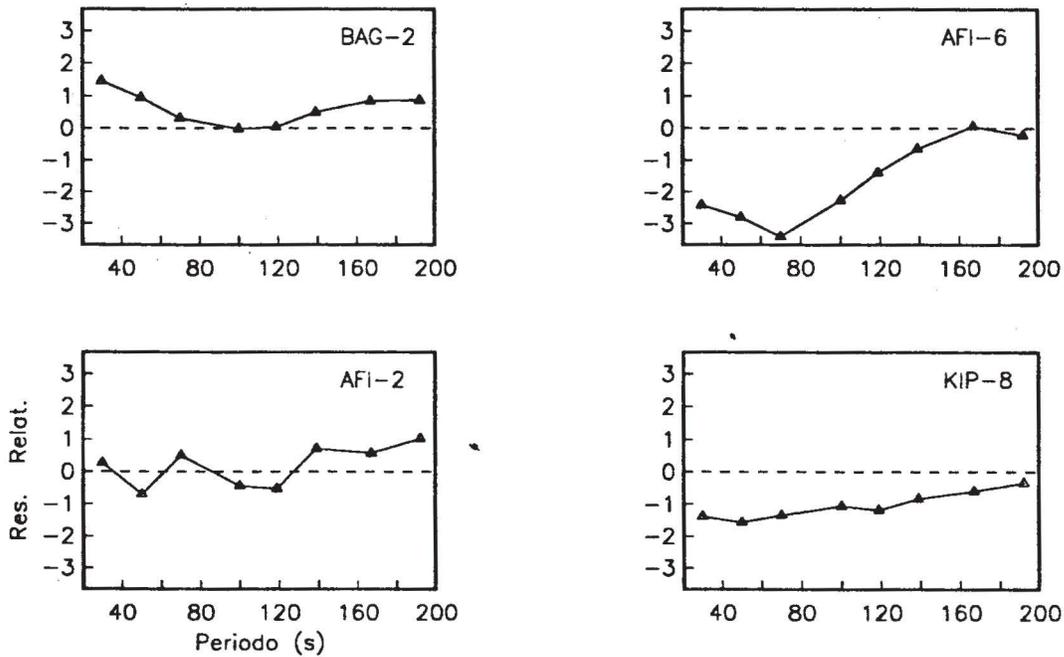


Figura 9. Residuales relativos (en término de unidades del error observacional) típicos que resultan de las soluciones regularizadas mostradas en la Figura 8.

Podemos plantear soluciones numéricas para ambas dificultades. Para la primera, lo obvio es aplicar una regularización en la dependencia espacial de las velocidades o, indirectamente, en la edad del piso oceánico correspondiente. La solución a este problema nos lleva a una investigación que rebasa el alcance de este artículo. El incremento del error probable a períodos más grandes puede deberse al hecho de que estas observaciones (cuando existen) tienen más deficiencias y errores. Para tratar de solucionar este problema, hemos repetido todo el procedimiento, eliminando los dos últimos períodos hasta ahora considerados (167 s y 192 s). Los resultados se muestran en la Figura 13 y la Tabla 1 da los valores de  $\alpha$  que se utilizaron en las dos iteraciones. Aunque se puede apreciar la tendencia de las velocidades a decrecer con el número de orden de la región, aparece nuevamente una conducta irregular en las velocidades, principalmente de R<sub>3</sub> y R<sub>7</sub>. Nuestra conclusión es que esto se debe a la similitud de las trayectorias más globales (que predominan en la base de datos) en cuanto a la forma que muestren las regiones R<sub>3</sub> a R<sub>7</sub>. Esto produce correlaciones en las estimaciones y, por consiguiente, una falta de resolución. Nuevamente, la posible solución de esta situación (y una prueba de nuestra conclusión) se encuentra en la aplicación de una regularización sobre las coordenadas espaciales.

Con las reservas expresadas, pensamos que el método propuesto ha demostrado ser útil en el presente ejercicio de aplicación. En particular, se ha ilustrado en las Figuras 11 y 12 que las curvas regionales obtenidas concuerdan con las

que obtuvo Leeds *et al.* (1974) basándose en un modelo cuya variación de parámetros fue explícitamente estabilizada y al análisis independiente hecho por Mitchell y Yu, (1980).

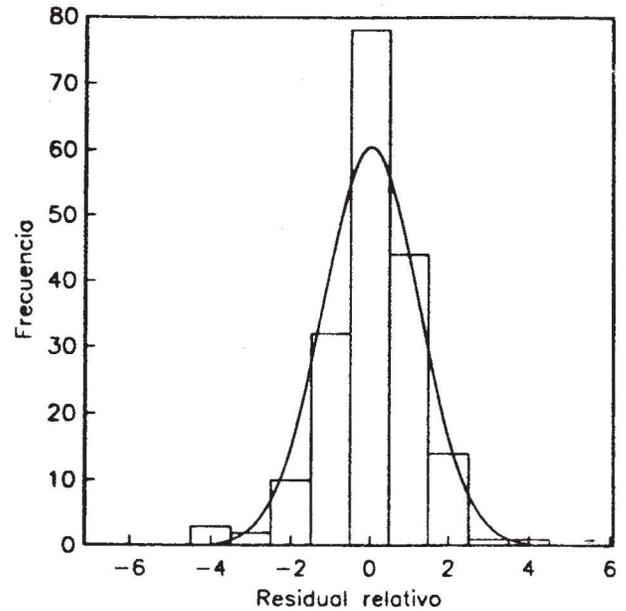


Figura 10. Histograma de los residuales relativos que resultan de la inversión de 31 trayectorias. Se acompaña la curva gaussiana de igual promedio y desviación estándar a la del histograma.

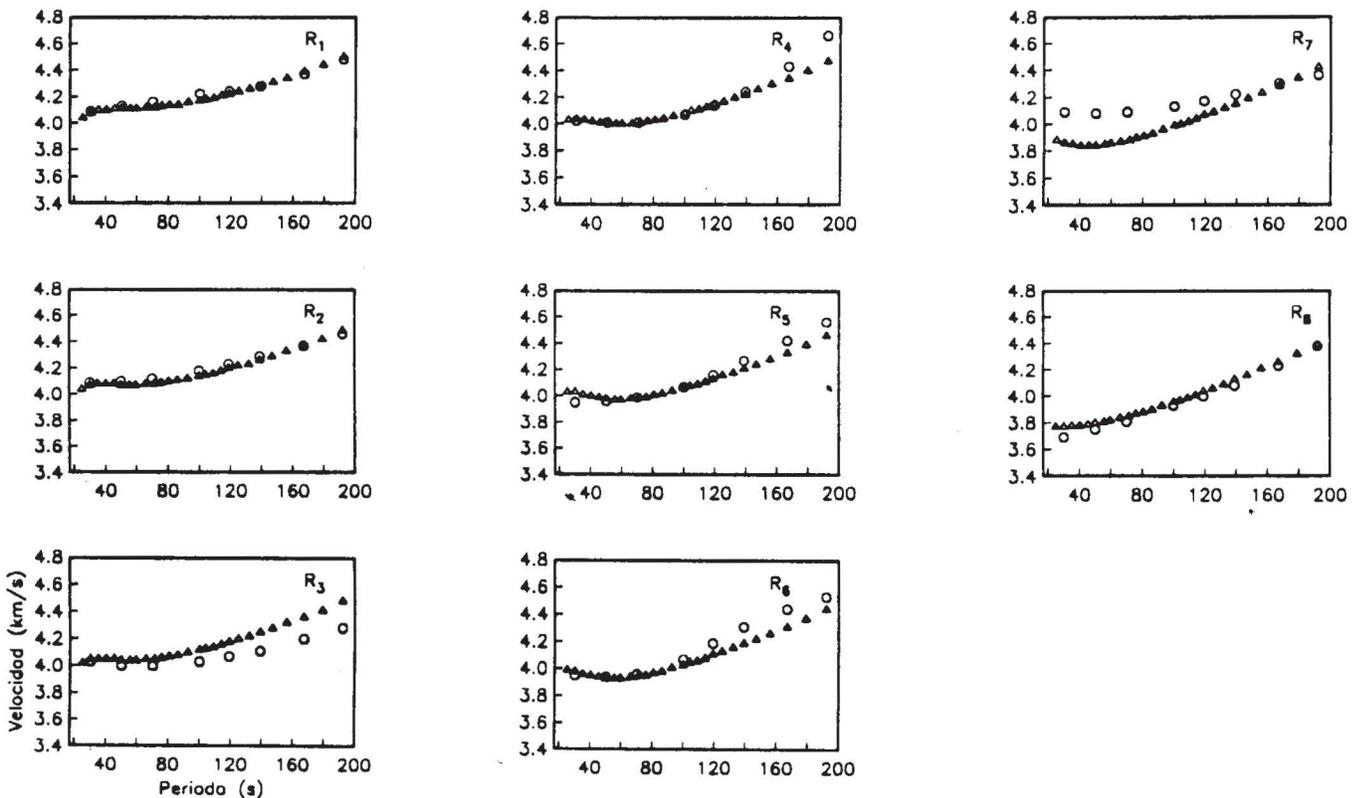


Figura 11. Comparación de las soluciones regularizadas con las obtenidas por Leeds *et al.* (1974), simbolizadas por (o) y (Δ), respectivamente.

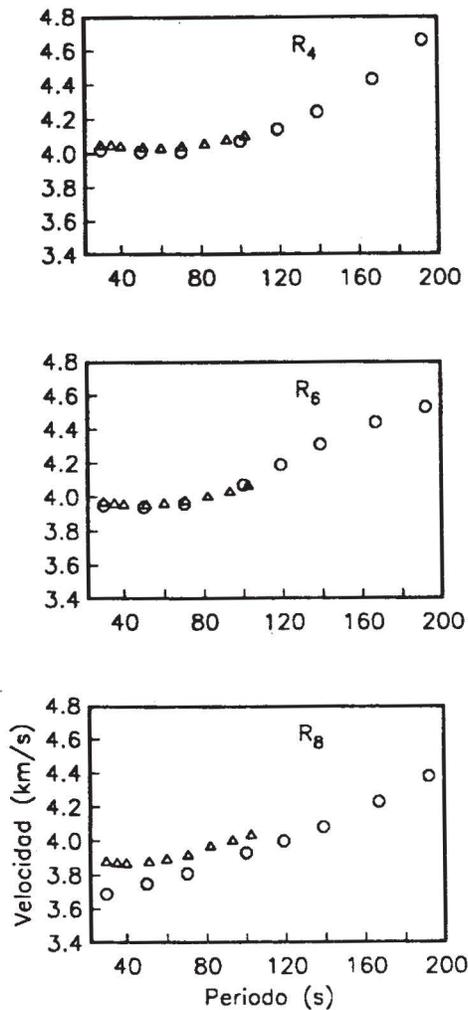


Figura 12. Comparación de las soluciones regularizadas con las obtenidas por Mitchell y Yu (1980), simbolizadas por (o) y ( $\Delta$ ), respectivamente.

**DISCUSION Y CONCLUSIONES**

Calculamos velocidades de regiones, supuestas estructuralmente homogéneas, a partir de observaciones globales de trayectorias que cruzan varias regiones. Para resolver la inestabilidad propia del problema, hemos supuesto una condición de suavidad en las funciones-incógnitas con respecto a uno de sus argumentos (período o frecuencia). El algoritmo se verificó mediante dos tipos de experimentos numéricos; además, se incluyó en el procedimiento un método iterativo que resuelve la dificultad de que no todas las curvas de velocidades observadas contienen datos para todo el conjunto (fijo) de períodos de discretización.

Tres tipos de experimentos numéricos nos han servido para verificar el álgebra, los algoritmos y la codificación del procedimiento. Además, hemos comprobado la utilidad potencial del procedimiento. El ejercicio de aplicación prueba que, en general, el procedimiento da buen resultado

en condiciones reales. Sin embargo, queda claro que, siendo el procedimiento exitoso en suavizar las funciones, esta suavización puede implicar tendencias que no necesariamente tienen significado físico (sino que son un artefacto producido por las correlaciones entre las funciones incógnitas lo que, a su vez, resulta del carácter indeterminado del sistema de ecuaciones a solucionar). Esta interpretación se aplica especialmente a las observaciones de los períodos más largos donde se pueden esperar errores grandes los que, por otro lado, no pueden ser tomados en cuenta en el procedimiento de estimación.

Una forma natural de mejorar el procedimiento es incluir una regularización en la dependencia espacial de las funciones incógnitas, por ejemplo, agregando la suposición de que las curvas cambian gradualmente de una región a otra. Ya nos hemos referido en la Introducción a trabajos en los cuales se reportan métodos de estabilización en la dependencia espacial de las incógnitas. Por lo tanto, el siguiente paso en este tipo de investigación sería aplicar una doble estabilización en espacio y período. El incremento en el tamaño de los cálculos y de almacenamiento en la computadora obliga a optimizar estas operaciones, en particular, en el sentido de utilizar técnicas de trazados de rayos más eficientes y exactos que los habituales asociados a modelos de celdas homogéneas. La búsqueda de soluciones a los problemas enumerados representa una investigación separada a la que aquí describimos.

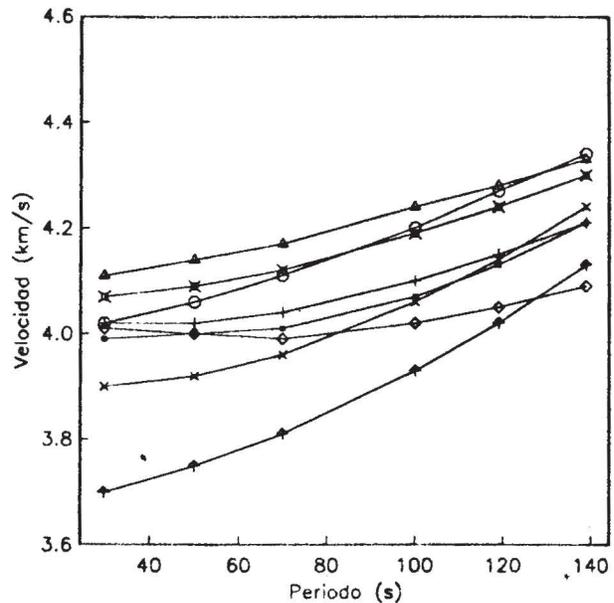


Figura 13. Velocidades regionales estimadas para las ocho regiones con los datos de 31 trayectorias eliminando en los períodos de observación las velocidades correspondientes a 167 s y 192 s. Las estimaciones para  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$ ,  $R_6$ ,  $R_7$  y  $R_8$  están simbolizadas respectivamente con  $\Delta$ ,  $\square$ ,  $\diamond$ ,  $+$ ,  $\times$ ,  $\circ$ , y  $\uparrow$ .

**AGRADECIMIENTOS**

La edición en el procesador de palabras contó con el muy paciente y profesional trabajo de V. Fernández. Los comen-

tarios de E. Gómez y J. Madrid, así como de dos árbitros anónimos, nos fueron de gran utilidad. Los cálculos y parcialmente las gráficas fueron hechas en el Centro de Cómputo de CICESE.

#### BIBLIOGRAFIA

- BELLMAN, R., 1970. *Methods of Nonlinear Analysis*. Academic Press, New York, 340 pp.
- BRUNE, J. y J. DORMAN, 1963. Seismic waves and earth structure in the Canadian shield. *Bull. Seism. Soc. Am.* 53, 167-209.
- CULLUM, J., 1979. The effective choice of the smoothing norm in regularization. *Math. Comp.*, 33, 149-170.
- DITMAR, P. G. y T. B. YANOVSKAYA, 1987. An extension of the Backus-Gilbert technique for estimating lateral variations of surface wave velocities. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fisika Zemli*, 6, 30-60 (edición en inglés).
- ESPARZA, F. J., 1985. Condiciones de continuidad en la estimación local de velocidades de onda superficiales. Tesis de Maestría, CICESE, Ensenada, B. C., México, 76 pp.
- FORSYTH, D. W., 1975. The early structural evolution and anisotropy of the oceanic upper mantle. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 43, 103-162.
- FREZ, J., 1985. Comparación del método de regularización con el de descomposición de valores singulares para un problema inverso. Resúmenes, Reunión Anual 1985, Unión Geofísica Mexicana, Oaxaca, México.
- FREZ, J., 1986. Teoría de Inversión de Datos Geofísicos. Notas de Clase, CICESE, México 180 pp.
- FREZ, J., 1989. Un algoritmo de suavización para curvas empíricas. *Geof. Int.*, 28, 643-691.
- FREZ, J., 1992. Un método de regularización para invertir la ecuación integral de Fredholm de primera clase. (Preimpreso para enviarse a *Geof. Int.*).
- KAUSEL, E. G., A. R. LEEDS y L. KNOPOFF, 1974. Variations of Rayleigh wave phase velocities across the Pacific Ocean. *Science*, 186, 139-141.
- KNOPOFF, L., 1972. Observation and inversion of surface-wave dispersion. *Tectonophysics*, 13, 497-519.
- KNOPOFF, L., 1983. The thickness of the lithosphere from the dispersion of surface waves. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 74, 55-81.
- LEEDS, A. R., 1973. Rayleigh Wave Dispersion in the Pacific Basin, Ph. D. Thesis, University of California, Los Angeles, California, 100 pp.
- LEEDS, A. R., 1975. Lithospheric thickness in the Western Pacific. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 11, 61-64.
- LEEDS, A. R., L. KNOPOFF y E. G. KAUSEL, 1974. Variations of the upper mantle structure under the Pacific Ocean, *Science*, 186, 141-143.
- MITCHELL, B. J. y G. Yu, 1980. Surface wave dispersion, regionalized velocity models, and anisotropy of the Pacific crust and upper mantle. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 63, 497-514.
- NESTEROV, A. N. y T. B. YANOVSKAYA, 1988. Lateral inhomogeneities of the lithosphere in southeastern Europe from surface wave observations. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fisika Zemli*, 24, 855-863 (edición en inglés).
- PHILLIPS, D. L., 1962. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. *J. Ass. Com. Mach.*, 9, 84-97.
- TRASLOSHEROS, C., J. FREZ, J. MADRID y C. REBOLLAR, 1990. Aplicación de la aproximación circular en la estimación de estructuras sísmicas bidimensionales. *Geof. Int.*, 29, 211-236.
- TIKHONOV, A. N., 1963. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Math. Dolk*, 4, 1035-1038.
- TIKHONOV, A. N. y V. Y. ARSENIN, 1977. *Solution of Ill-posed Problems*, Winston & Sons, Washington, D.C., 258 pp.
- YANOVSKAYA, T. B., 1982. Group velocity distribution of surface waves in the north Atlantic. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fisika Zemli*, 18, 83-89.
- YANOVSKAYA, T. B., R. MAAZ, P. G. DITMAR y H. NEUNHOFER, 1988. A method for joint interpretation of the phase and group surface wave velocities to estimate lateral variations of the Earth's structure. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 51, 59-67.
- YANOVSKAYA, T. B. y P. G. DITMAR, 1990. Smoothness criteria in surface wave tomography. *Geophys. J. Int.*, 102, 63-72.

---

F. J. Esparza y J. Frez  
 División de Ciencias de la Tierra  
 Centro de Investigación Científica y de Educación Superior  
 de Ensenada  
 Av. Espinoza 843  
 Ensenada, B. C., 22830, México.