

Geof. Int., Vol. 28-3, 1989, pp. 467-479

**INVERSION UNIDIMENSIONAL DE DATOS DE POLARIZACION
INDUCIDA PARA MEDIOS CON CONTRASTE PEQUEÑO
EN RESISTIVIDAD**

F. J. ESPARZA*

E. GOMEZ-TREVIÑO*

(Recibido: 5 de noviembre, 1987)

(Aceptado: 20 de septiembre, 1988)

RESUMEN

La interpretación de sondeos de polarización inducida para medios con contraste pequeño en resistividad se plantea en términos de una ecuación integral lineal. Se presentan dos soluciones de esta ecuación: (a) una solución analítica mediante transformadas integrales, y (b) una solución numérica mediante programación lineal. La primera indica que el problema inverso tiene, al menos en principio, solución única, y la segunda permite la construcción de modelos a partir de datos de campo. La construcción de modelos se ilustra con casos de contraste nulo en resistividad, para los cuales la ecuación integral es exacta y se extiende a casos de contraste moderado. También se incluyen aplicaciones del algoritmo a datos de campo.

ABSTRACT

The interpretation of induced polarization soundings for low resistivity contrast media is posed in terms of a linear integral equation. Two solutions of this equation are presented: (a) an analytic solution by means of integral transforms, and (b) a numerical solution using linear programming. The first establishes that the inverse problem has, at least in principle, a unique solution, and the second allows the construction of models from field data. The construction of models is illustrated assuming zero resistivity contrast, for which the integral equation is exact, and it is extended to cases that involve resistivity variations. Applications of the algorithm to field data are also included.

* *Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), Ensenada, Baja California, 22830, MEXICO.*

INTRODUCCION

Los sondeos eléctricos verticales de polarización inducida (SEV-PI) generalmente se interpretan cualitativamente (*e.g.*, Roy y Elliot, 1980), o bien mediante la comparación con respuestas teóricas (*e.g.*, Seara y Granda, 1987). No existen trabajos en la literatura donde se exponga la aplicación de técnicas de inversión a este tipo de sondeos. En general el problema tiene una doble naturaleza; para interpretar un SEV-PI se requiere de antemano interpretar el correspondiente sondeo eléctrico vertical (SEV).

Como anticipación a la solución general, en este artículo presentamos dos soluciones particulares del problema inverso de SEV-PI, las cuales son aplicables a situaciones en las que exista poco contraste en resistividad. Este tipo de condiciones, comunes en la práctica, han sido tratadas en dos dimensiones por Comparán *et al.* (1989), y en tres dimensiones por Cavazos-Garza y Gómez-Treviño (1989). Para tratar el problema de SEV-PI o unidimensional, partimos de las expresiones desarrolladas por Elliot y Lauritsen (1977), quienes obtuvieron la solución del problema directo de una tierra estratificada en cargabilidad y uniforme en resistividad.

En términos del problema inverso, las expresiones de Elliot y Lauritsen (1977) conducen a un problema no lineal, en el cual las incógnitas son los espesores y las cargabilidades de las capas. Para evitar la no linealidad, en el presente trabajo convertimos dichas expresiones a integrales y consideramos la cargabilidad como una función arbitraria de la profundidad. El resultado es una ecuación integral lineal para la función de cargabilidad, sobre cuya base desarrollamos dos aspectos del problema inverso: la unicidad de la solución (solución analítica) y la construcción de modelos a partir de datos de campo (solución numérica).

FORMULACION DEL PROBLEMA INVERSO

Con base en la formulación de Seigel (1959), Elliot y Lauritsen (1977) desarrollaron las expresiones para la cargabilidad aparente (m_a) de una tierra estratificada en cargabilidad y uniforme en resistividad. Estas expresiones son de la forma

$$m_a = \sum_{j=1}^{\ell} B_j m_j \quad , \quad (1)$$

donde ℓ es el número de capas y m_j es la cargabilidad de la j -ésima capa. El coefi-

ciente B_j depende solamente del dispositivo electródico que se utilice y del espesor de la capa correspondiente. Para el dispositivo Schlumberger, B_j se reduce a:

$$B_j = r^3 [(r^2 + 4z_j^2)^{-3/2} - (r^2 + 4z_{j+1}^2)^{-3/2}] , \quad (2)$$

donde r representa la distancia $(AB/2)$ entre el centro del dispositivo y los electrodos de corriente, y z_j es la profundidad del techo de la j -ésima capa. Nótese la dependencia no lineal de m_a con respecto a las profundidades. Esto implica que el problema inverso no es lineal cuando se plantea en términos de los parámetros que caracterizan a la estratificación. Para convertirlo en lineal procedemos de la siguiente manera.

Para capas de espesor pequeño comparado con su profundidad, se tiene que

$$B_j = B(z) \doteq 12 r^3 z (r^2 + 4z^2)^{-5/2} \Delta z , \quad (3)$$

donde $z = (z_{j+1} + z_j)/2$ y $\Delta z = (z_{j+1} - z_j)$. Sustituyendo en la ecuación (1) y tomando el límite cuando Δz tiende a cero, obtenemos

$$m_a(r) = \int_0^{\infty} 12 r^3 z (r^2 + 4z^2)^{-5/2} m(z) dz , \quad (4)$$

donde se ha escrito explícitamente la dependencia de m_a con respecto a la separación $r = AB/2$. Nótese que la dependencia entre $m_a(r)$ y $m(z)$ es lineal.

En términos de la ecuación (4), el problema directo consiste en calcular $m_a(r)$ cuando se conoce $m(z)$; el problema inverso consiste en calcular $m(z)$ cuando se conoce $m_a(r)$. En el primer caso, la solución se obtiene por simple integración; en el segundo, la situación es más complicada, dado que $m(z)$ forma parte del integrando. Se impone entonces considerar la relación entre $m_a(r)$ y $m(z)$ como una ecuación integral para esta última.

UNICIDAD

La ecuación integral para $m(z)$ es relativamente sencilla y puede resolverse analíticamente. Esto es, puede obtenerse una fórmula para $m(z)$ en términos de $m_a(r)$. Con este fin, divídase la ecuación (4) por r^2 y tómesese en ambos miembros la transformada de Hankel

$$H[f(r)] = \int_0^{\infty} r f(r) J_1(\lambda r) dr . \quad (5)$$

La integral del lado izquierdo se puede escribir simplemente como $H[m_a(r)/r^2]$, mientras que la del lado derecho requiere ser evaluada. La evaluación se simplifica utilizando la fórmula

$$\int_0^{\infty} r^2 (r^2 + 4z^2)^{-5/2} J_1(\lambda r) dr = \lambda \exp(-2\lambda z) / 6z \quad , \quad (6)$$

la cual se sigue de la 6.565.3 en Gradshteyn y Ryzhik (1965). Así, el resultado de transformar la ecuación (4) se reduce a

$$H[m_a(r)/r^2] = \int_0^{\infty} s \cdot \exp(-sz) m(z) dz \quad , \quad (7)$$

donde $s = 2\lambda$. La integral en la ecuación (7) tiene la forma de una transformada de Laplace, por lo que la solución para $m(z)$ puede escribirse como

$$m(z) = L^{-1} [H[m_a(r)/r^2]/s] \quad , \quad (8)$$

donde el operador H ha de evaluarse en $\lambda = s/2$. L^{-1} representa el operador inverso de Laplace. Con esto hemos encontrado la solución de la ecuación integral (4). Es interesante observar que dicha solución es similar a la que se obtiene para la conductividad eléctrica, cuando los datos corresponden a mediciones electromagnéticas de baja frecuencia (Esparza y Gómez-Treviño, 1987).

En principio, la ecuación (8) puede utilizarse para calcular $m(z)$ dada $m_a(r)$. Para esto se requiere conocer esta última función en un número infinito de separaciones. Como esto no es posible en la práctica, donde además existen errores observacionales, las fórmulas del tipo de la ecuación (8) tienden a ser inestables. Más que por su aplicación práctica, la solución analítica de $m(z)$ es importante por sus implicaciones de principio. Una de éstas es que establece una correspondencia uno a uno entre $m_a(r)$ y $m(z)$, relación que se sigue como corolario de las correspondientes fórmulas de inversión para los dos tipos de transformadas integrales. En otras palabras, dada una curva de $m_a(r)$, podemos estar seguros de que existe solamente un modelo $m(z)$ que la reproduce. Si bien esta afirmación no se sostiene en la práctica, garantiza que al aumentar el número de mediciones y reduciendo su incertidumbre, nos acercaremos a la verdadera distribución de cargabilidad.

CONSTRUCCION

La construcción de modelos a partir de observaciones puede plantearse de la siguiente

te manera. Encontrar modelos $m(z)$ tales que

$$m_a(r_i) - e_i \leq \int_0^{\infty} g_i(z)m(z) dz \leq m_a(r_i) + e_i, \quad i = 1, n, \quad (9)$$

donde

$$g_i(z) = 12r_i^3 z(r_i^2 + 4z^2)^{-5/2}$$

$m_a(r_i)$ y e_i representan respectivamente las observaciones y sus incertidumbres, y n es el número de observaciones. Planteado en esta forma, el problema tiene infinidad de soluciones, por lo que es conveniente imponer restricciones adicionales. De la infinidad de modelos se selecciona el que minimiza

$$\phi = \int_0^{\infty} |m'(z)| dz, \quad (10)$$

donde $m'(z)$ es la derivada de $m(z)$ con respecto a z . La minimización de ϕ asegura que el modelo seleccionado será, de entre todos los que cumplen con (9), el que tenga el menor número de máximos y mínimos (capas).

En los aspectos generales del algoritmo seguiremos a Oldenburg y Samson (1979), quienes utilizaron el mismo tipo de extremización en un problema de interferometría. Integrando por partes, el conjunto de desigualdades puede reescribirse como

$$d_i - e_i \leq \int_0^{\infty} G_i(z)m'(z) dz \leq d_i + e_i, \quad i = 1, n, \quad (11)$$

donde

$$G_i(z) = -r_i^3(r_i^2 + 4z^2)^{-3/2}$$

y $d_i = m_a(r_i) - m(0)$. Para la aplicación de técnicas de programación lineal, se hace una partición en el eje Z , y se supone que $m'(z) = m'_j$ es constante ($m(z)$ lineal) sobre cada uno de los intervalos resultantes (generalmente se requiere un mínimo de 30 intervalos). Con esto, las expresiones anteriores pueden expresarse en la forma algebraica

$$d_i - e_i \leq \sum_{j=1}^{\ell} C_{ij}m'_j \leq d_i + e_i, \quad i = 1, n, \quad (12)$$

donde

$$C_{ij} = \int_{z_j}^{z_{j+1}} G_i(z) dz .$$

La función a minimizar se reduce en este caso a

$$\phi = \sum_{j=1}^{\ell} |m'_j| (z_{j+1} - z_j) . \quad (13)$$

Debido a que m'_j puede en general tomar tanto valores positivos como negativos, el problema no tiene la forma estándar requerida por las técnicas de programación lineal. La manera usual de salvar este obstáculo, y la que utilizaremos aquí, consiste en definir dos variables auxiliares no negativas p_j y q_j tales que $m'_j = p_j - q_j$, y en minimizar la forma equivalente

$$\psi = \sum_{j=1}^{\ell} (p_j + q_j) (z_{j+1} - z_j) . \quad (14)$$

De esta manera, las expresiones (12) y (14) tienen la forma requerida. Una vez obtenidos los valores de m'_j , $j = 1, \ell$, la función de cargabilidad se evalúa mediante la expresión

$$m(z) = m(0) + m'_j (z - z_j) + \sum_{i=1}^{j-1} m'_i (z_{i+1} - z_i) , \quad (15)$$

para $z_j < z < z_{j+1}$. $m(0)$, la cargabilidad en la superficie del terreno, se supone conocida y en la práctica puede estimarse a partir de los valores de $m_d(r_i)$ para separaciones pequeñas. La ecuación (15) puede también utilizarse para imponer restricciones extras sobre $m(z)$ a cualquier profundidad.

RESULTADOS

A continuación se presentan algunos resultados obtenidos mediante la aplicación del algoritmo descrito en la sección anterior. En la primera parte se consideran experimentos numéricos realizados con datos sintéticos, y en la segunda se aplica el algoritmo a la interpretación de datos de campo.

Datos sintéticos

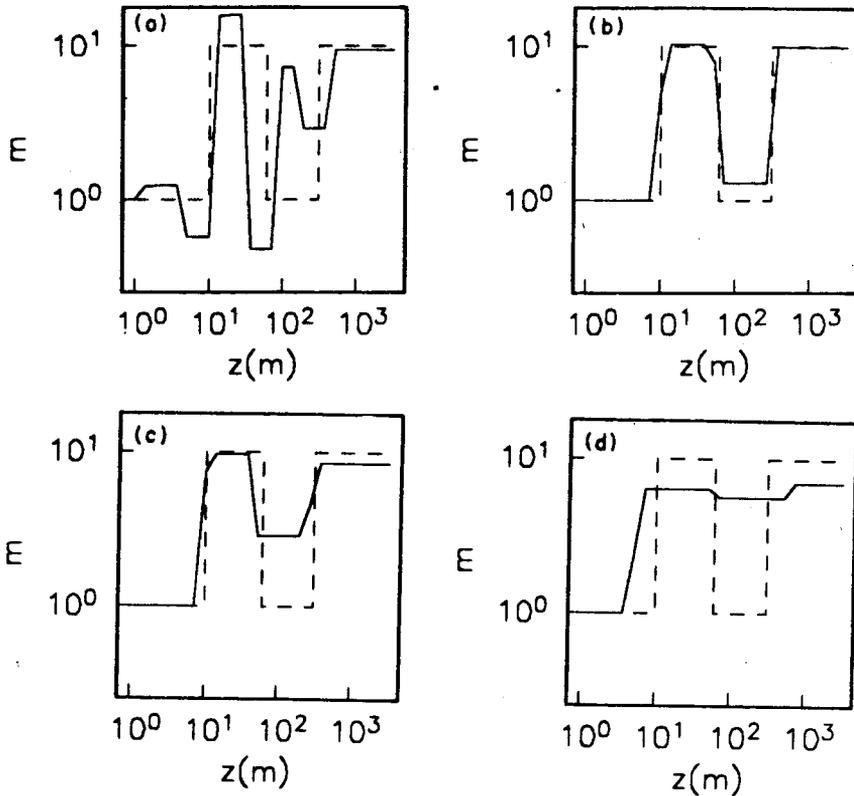


Fig. 1. Construcción de modelos para el caso de contraste nulo en resistividad. La línea a trazos representa el modelo verdadero y la continua el modelo estimado. La desviación estándar de los datos y las supuestas en cada inversión son, respectivamente (a) 15 y 8%, (b) 1 y 1%, (c) 15 y 15% y (d) 15 y 30%. Las unidades de carga-bilidad son arbitrarias.

En la figura 1 se muestra el caso de un modelo estratificado en cargabilidad y uniforme en resistividad. Los modelos estimados fueron construidos a partir de datos sintéticos, a los cuales se les sumó ruido aleatorio para simular datos de campo. Para construir los modelos se supuso que la desviación estándar en los datos era menor, igual, y mayor, sucesivamente, que la asignada. Los resultados demuestran la importancia de estimar correctamente los errores en los datos. Si los errores se subestiman (figura 1a) aparecen capas ficticias, mientras que si se sobreestiman (figura 1d) algunas tienden a desaparecer. Los resultados que se obtienen cuando se supone que la desviación estándar de los datos es igual a la asignada se presentan en las figuras 1b y 1c.

En la figura 2 se muestra el caso de un modelo estratificado, tanto en cargabilidad como en resistividad. Con este ejemplo se ilustra la aplicación del algoritmo a situaciones en que existe poco contraste en resistividad. Como en el caso anterior, los modelos se construyeron a partir de la respuesta teórica del modelo, a la cual se le sumó ruido aleatorio. En la construcción de los modelos se supuso que la desviación estándar de los datos era menor, igual, y mayor, sucesivamente, que la asignada. El resultado de subestimar o sobreestimar los errores en los datos es similar al del caso anterior.

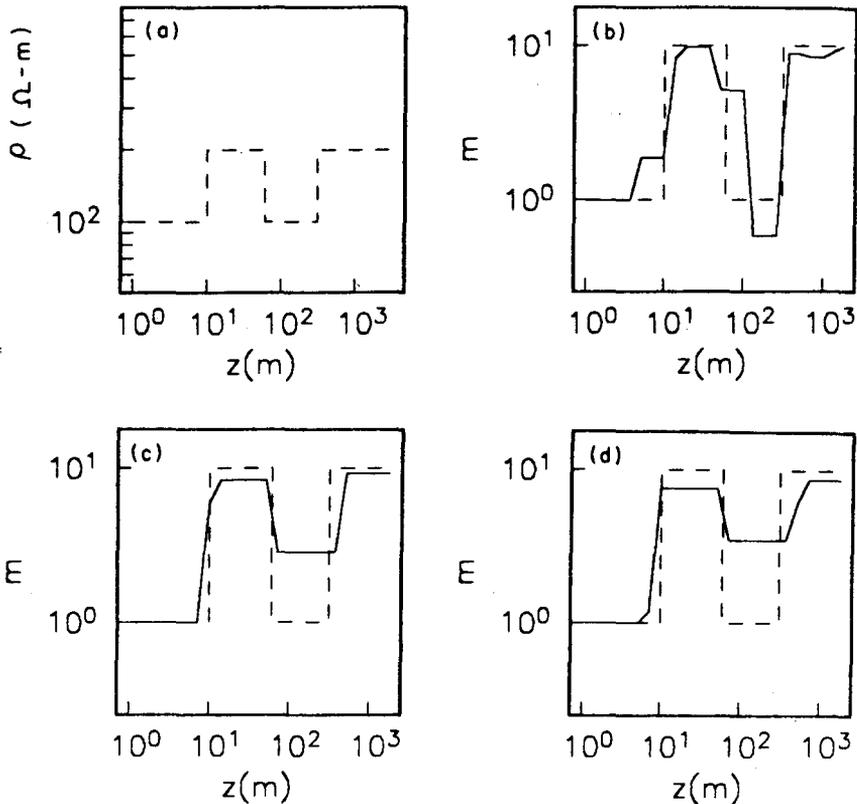


Fig. 2. Construcción de modelos para el caso de contraste pequeño en resistividad. La variación de la resistividad se representa en (a). En las demás gráficas la línea a trazos representa el modelo verdadero de cargabilidad, y la línea continua el modelo estimado. Las desviaciones estándar de los datos y las supuestas en cada inversión son, respectivamente: (b) 5 y 1%, (c) 5 y 5% y (d) 5 y 30%. Las unidades de cargabilidad son arbitrarias.

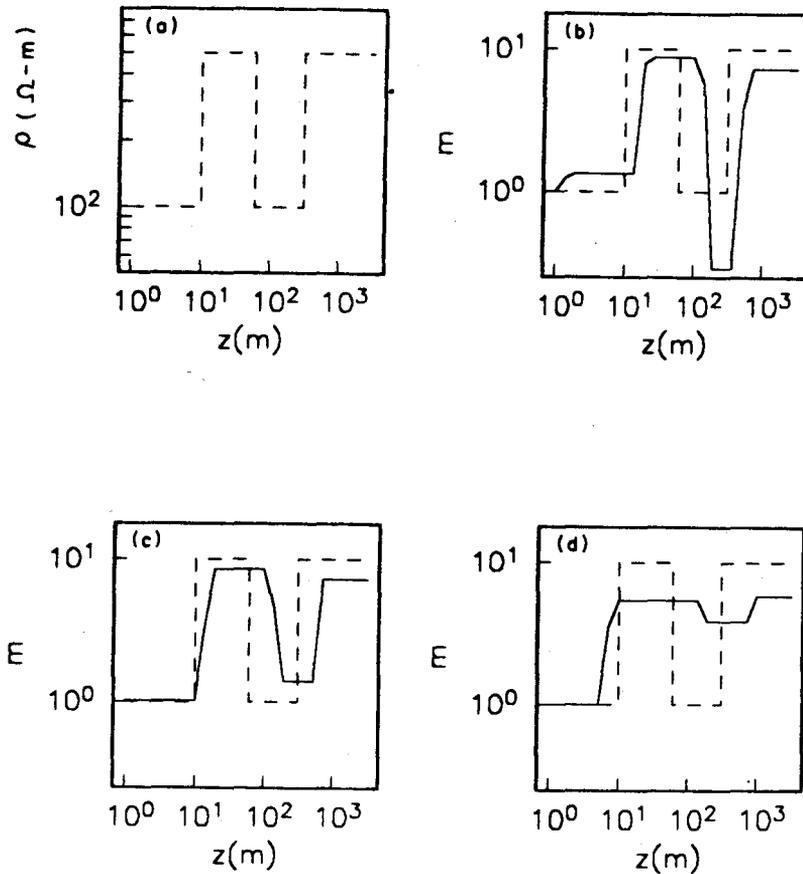


Fig. 3. Construcción de modelos para un caso extremo. La variación de la resistividad se representa en (a). En las demás gráficas la línea a trazos representa el modelo verdadero de cargabilidad y la línea continua el modelo estimado. Las desviaciones estándar de los datos y las supuestas en cada inversión son, respectivamente: (b) 5 y 13%, (c) 5 y 15% y (d) 5 y 30%. Las unidades de cargabilidad son arbitrarias.

Los resultados que se muestran en la figura 3 corresponden a un caso extremo en lo que respecta a la aproximación para pequeños contrastes en resistividad. Nótese que las interfaces de los modelos construidos se encuentran sistemáticamente por debajo de las correspondientes al modelo verdadero. Esto se debe a que la ecuación integral no toma en cuenta el contraste en resistividad, cuyo efecto es reducir la profundidad de penetración de la corriente eléctrica en el subsuelo. A esto se debe,

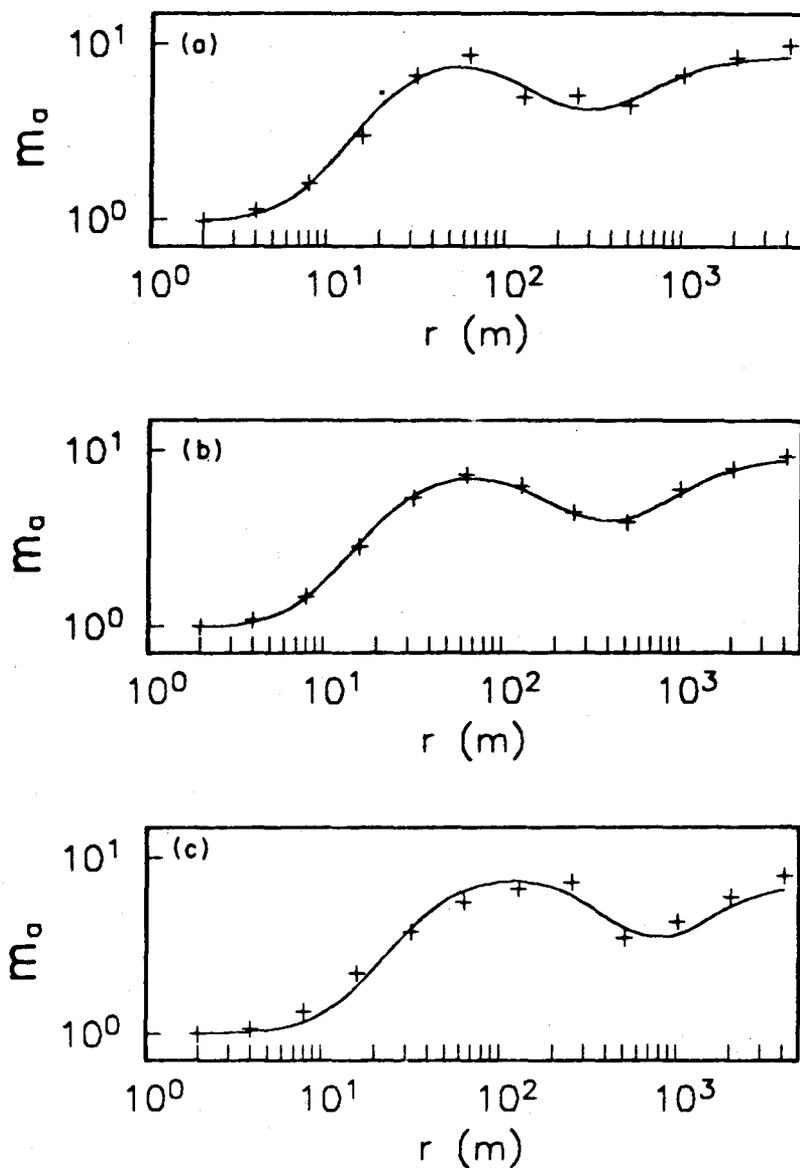


Fig. 4. Comparación de respuestas de modelos con los datos utilizados en su construcción. Las gráficas (a), (b) y (c) corresponden, respectivamente, a los modelos mostrados en las figuras 1c, 2c y 3c. Las unidades de cargabilidad aparente son arbitrarias.

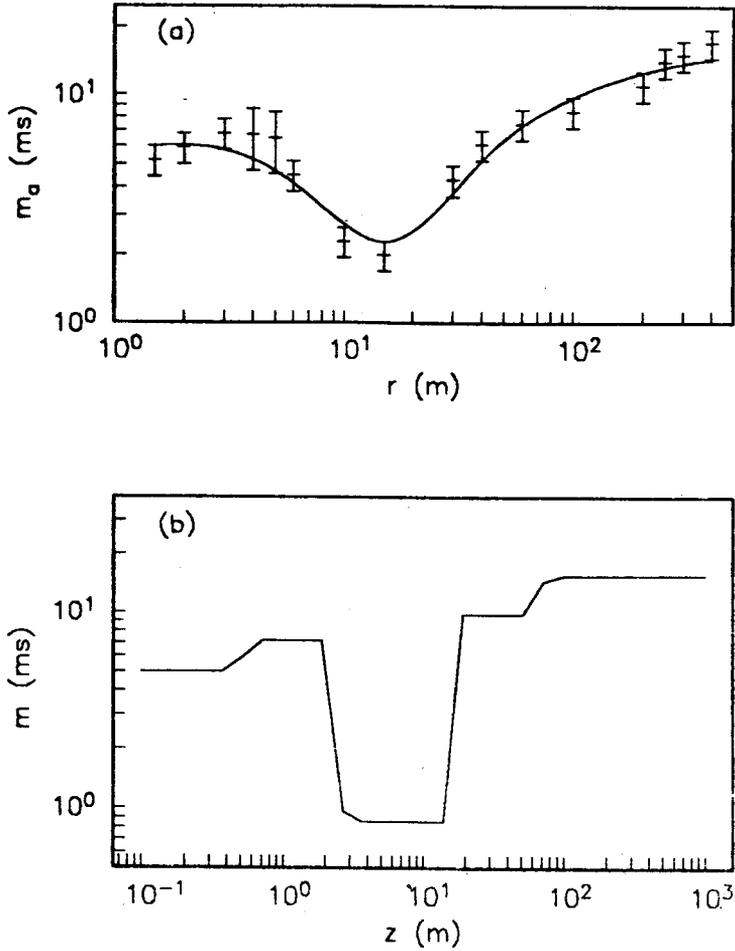


Fig. 5. Interpretación de datos tomados de Roy y Elliot (1980). (a) Comparación entre la respuesta del modelo estimado y los datos (las barras de error son nuestras). (b) El modelo estimado.

también, el que no se muestren modelos que sobreajusten (o que ajusten apropiadamente) los datos. Simplemente no existen tales modelos en el presente caso. La respuesta del modelo de la figura 3c, así como las correspondientes a los modelos de las figuras 1c y 2c, se comparan en la figura 4 con los datos utilizados en el proceso de construcción.

Datos de campo

Con el fin de ilustrar la aplicación del algoritmo a datos de campo, se interpretó el SEV-PI No. 27 del estudio realizado por Roy y Elliot (1980). Se seleccionó este sondeo porque presenta contrastes pequeños en resistividad. Los resultados de la interpretación se muestran en la figura 5. El modelo se construyó suponiendo las barras de error que se muestran en la figura. El modelo muestra las 5 capas sugeridas por los datos.

Es interesante hacer notar que el peor ajuste a los datos ocurre donde la pendiente de la curva es negativa; al parecer, los datos requieren que esta pendiente sea más pronunciada. La discrepancia es muy probable que se deba a que existen efectos laterales que no pueden ser reproducidos por un modelo unidimensional. Se puede demostrar fácilmente, partiendo de las ecuaciones (1) y (2), que la pendiente logarítmica de una curva teórica no puede ser menor que -2 . Este valor se obtiene para separaciones muy grandes en el caso extremo de una capa superficial sobre un semiespacio no cargable. La presencia de capas cargables dentro del semiespacio tenderá necesariamente a elevar la curva y a incrementar su pendiente hacia valores positivos. En lo que respecta a los datos, su comportamiento requiere que el valor de la pendiente se acerque al mínimo absoluto, siendo que evidentemente no se trata del caso extremo de una capa superficial sobre un semiespacio no cargable. Esto quiere decir, como se mencionó anteriormente, que es muy probable que existan efectos laterales en los datos, y que una pendiente negativa tan pronunciada no puede ser reproducida por una tierra estratificada. Por lo demás, el ajuste es razonablemente bueno, considerando que el modelo contiene el mínimo número de capas.

CONCLUSIONES

Hemos presentado los siguientes aspectos del problema inverso de SEV-PI para medios con poco contraste en resistividad: (a) su formulación en términos de una ecuación integral, (b) un teorema de unicidad, y (c) un método para construir modelos a

partir de observaciones. Los resultados demuestran la flexibilidad del método, tanto en casos en que el medio sea de resistividad uniforme como cuando existan variaciones moderadas en resistividad.

Tanto el teorema de unicidad como el método para construir modelos descansan directamente sobre la formulación del problema en términos de la ecuación integral lineal. Sin ésta, sería muy difícil concebir una demostración de la unicidad, debido a que en términos de los parámetros originales (espesores y cargabilidades) el problema inverso no es lineal. Al mismo tiempo, sin la ecuación integral, la solución numérica que hemos desarrollado sería más difícil de justificar algebraicamente.

BIBLIOGRAFIA

- CAVAZOS-GARZA, R. y E. GOMEZ-TREVIÑO, 1989. Hacia la inversión tridimensional de datos de resistividad y polarización inducida. *Geofís. Int.*, (en este mismo número).
- COMPARAN, J. L., A. SANCHEZ G. y E. GOMEZ-TREVIÑO, 1989. Un método para modelar anomalías de resistividad y polarización inducida mediante potenciales logarítmicos. *Geofís. Int.*, 28, 1, 73-87.
- ELLIOT, C. L. and E. LAURITSEN, 1977. Induced polarization response of a horizontally multilayered earth with no resistivity contrast. *Geophys. Prosp.*, 25, 76-95.
- ESPARZA, F. J. and E. GOMEZ-TREVIÑO, 1987. Electromagnetic sounding in the resistive limit and the Backus-Gilbert method for estimating averages. *Geoexploration*, 24, 441-454.
- GRADSHTEYN, I. S. and I. M. RYZHIK, 1965. Tables of Integrals Series and Products. Academic Press, New York.
- OLDENBURG, D. W. and J. C. SAMSON, 1979. Inversion of interferometric data from cylindrically symmetric, refractionless plasmas. *J. Opt. Soc. Amer.*, 69, 927-942.
- SEARA, J. L. and A. GRANDA, 1987. Interpretation of I.P. time domain/resistivity soundings for delineating sea-water in some coastal areas of the Northeast of Spain. *Geoexploration*, 24, 153-167.
- ROY, K. K. and H. M. ELLIOT, 1980. Resistivity and IP surveys for delineating saline water and fresh water zones. *Geoexploration*, 18, 145-162.
- SEIGEL, H. O., 1959. Mathematical formulation and type curves for induced polarization. *Geophysics*, 24, 547-565.