

Geof. Int., Vol. 28-3, 1989, pp. 481-505

*HACIA LA INVERSION TRIDIMENSIONAL DE ANOMALIAS DE
RESISTIVIDAD Y POLARIZACION INDUCIDA*

R. CAVAZOS-GARZA*

E. GOMEZ-TREVIÑO**

(Recibido: 23 de marzo, 1988)

(Aceptado: 30 de junio, 1988)

RESUMEN

Se desarrolla un método aproximado para invertir datos de resistividad y polarización inducida. La inversión se efectúa en términos de estructuras cilíndricas de sección transversal y longitud arbitrarias. Los datos se suponen tomados a lo largo de perfiles perpendiculares al rumbo. El método no requiere de modelos iniciales y por lo general se obtienen resultados satisfactorios en una o dos iteraciones. Se suponen contrastes pequeños en resistividad, y tanto esta propiedad como la cargabilidad pueden variar espacialmente sobre el plano perpendicular al rumbo de la estructura. Numéricamente el problema se plantea en términos de un sistema de ecuaciones lineales, cuyas incógnitas representan valores discretos de las funciones de resistividad y cargabilidad. La solución se obtiene mediante el conocido método de la matriz inversa generalizada. Se incluyen resultados sobre experimentos numéricos así como aplicaciones a datos de campo.

* *Universidad de Monterrey, Monterrey, N. L.*

** *Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), Ensenada, Baja California, 22830, MEXICO.*

ABSTRACT

An approximate method is developed for inverting resistivity and induced polarization data. Inversion is effected in terms of cylindrical structures of arbitrary cross-section and length, using data taken along a profile perpendicular to strike. The method does not require an initial model and reasonable good results are obtainable in one or two iterations. The approximation assumes low resistivity contrast, and both resistivity and chargeability functions may vary over the plane perpendicular to strike. Numerically the problem is posed in terms of a system of linear equations whose unknowns represent discrete values of the resistivity and chargeability functions. The solution is obtained using the well-known method of generalized matrix inversion. Results of numerical experiments and applications to field data are included.

INTRODUCCION

En la última década se han desarrollado diversos métodos para invertir datos de resistividad y polarización inducida (PI) mediante modelos de dos y tres dimensiones (e.g., Pelton *et al.*, 1978; Petrick *et al.*, 1981; Smith and Vozoff, 1984; Tripp *et al.*, 1984; Rijo, 1984). Estos métodos consisten en ajustar a los datos la respuesta de determinado tipo de modelo cuyos parámetros se optimizan iterativamente a partir de valores iniciales. Invariablemente en todos los métodos existentes se supone que el número de parámetros es menor que el número de datos, por lo que genéricamente se trata de un problema de estimación de parámetros. La principal dificultad a vencer consiste en el cálculo de la respuesta del modelo, para cuyo fin se utilizan, en algunos casos, bancos de respuestas previamente calculadas. Estos bancos facilitan la interpretación, reduciéndola básicamente a un proceso de selección: el modelo óptimo es el que mejor ajusta los datos dentro del conjunto de modelos disponibles. Esto trae consigo una falta de flexibilidad cuyo grado depende de los modelos disponibles, los cuales por lo común tienen forma rectangular (Pelton *et al.*, 1978; Rijo, 1984).

En general se puede afirmar que los métodos existentes, aunque bastante estables y relativamente flexibles, no son lo suficientemente económicos y versátiles para ser ampliamente utilizados en interpretaciones de rutina. Es deseable, sobre todo, abatir los costos de computación e incrementar los tipos de modelos disponibles. Alcanzar estos dos objetivos motivó el presente trabajo.

Para obtener mayor versatilidad sobre el tipo de modelos disponibles suponemos que la resistividad y la cargabilidad del subsuelo son funciones arbitrarias de la posición. El problema inverso se reduce entonces a la estimación de funciones, situación que puede manejarse suponiendo mayor número de incógnitas que de datos. En el planteamiento inicial seguimos a Gómez-Treviño (1987, 1988), quien formula el pro-

blema en términos de ecuaciones integrales. Suponiendo que las variaciones en resistividad son pequeñas, estas ecuaciones se convierten, de no lineales en lineales. Mediante esta suposición el problema inverso se simplifica considerablemente, pudiéndose resolver sin grandes dificultades, aún en situaciones tridimensionales. El desarrollo que presentamos para las ecuaciones lineales es autosuficiente, y se basa directamente en el supuesto de contrastes pequeños en resistividad. La aproximación, así como la solución que describimos, representan el primer paso hacia soluciones más completas de las ecuaciones integrales no lineales.

APROXIMACION PARA CONTRASTES PEQUEÑOS EN RESISTIVIDAD

En esta sección presentamos una solución aproximada para la respuesta de resistividad y PI de cuerpos tridimensionales. Con base en la solución para una esfera y suponiendo contrastes pequeños en resistividad, se obtiene una expresión válida para cuerpos de forma arbitraria. El resultado será utilizado en la siguiente sección, donde trataremos el problema inverso.

Supóngase que en un espacio homogéneo de resistividad ρ_0 , se encuentra una esfera de resistividad ρ_1 , radio ϵ y con centro en el punto \underline{r}' . En presencia de un campo eléctrico externo y uniforme, el efecto de la esfera en puntos exteriores a la misma es equivalente al de un dipolo eléctrico colocado en su centro (Ward, 1967; Orellana, 1982). El potencial eléctrico debido a la esfera viene dado como

$$\Delta U(\underline{r}) = [\Delta\rho/(3\rho_0 + 2\Delta\rho)] E_0 \cdot (\underline{r}' - \underline{r}) \epsilon^3 / |\underline{r}' - \underline{r}|^3, \quad (1)$$

donde $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_0$; E_0 es el campo eléctrico en ausencia de la esfera y \underline{r} es un punto externo a la misma.

La ecuación (1) supone que la esfera se encuentra en un espacio homogéneo. Para obtener la expresión correspondiente a un semiespacio homogéneo generalmente se procede de la siguiente manera: se supone que el punto de observación \underline{r} se encuentra sobre la superficie del semiespacio y se multiplica la expresión (1) por dos, lo cual equivale a sumarle a la expresión original el potencial debido a la imagen de la esfera. El resultado de esta operación es una solución aproximada, ya que no se toma en cuenta la interacción de la esfera con su imagen. El efecto de la interacción es de segundo orden y resulta importante cuando $|\Delta\rho|/\rho_0 \gg 1$. Cuando $|\Delta\rho|/\rho_0 \ll 1$ el efecto puede despreciarse y podemos escribir

$$\Delta U(\underline{r}) = 2(\Delta\rho/3\rho_0) E_0 \cdot (\underline{r}' - \underline{r}) \epsilon^3 / |\underline{r}' - \underline{r}|^3, \quad (2)$$

para el potencial de la esfera en puntos sobre la superficie del semiespacio.

Si ahora suponemos que el campo eléctrico se debe a la presencia de un electrodo puntual colocado en la superficie del semiespacio, \underline{E}_0 viene dado como

$$\underline{E}_0 = \rho_0 I(\underline{r}' - \underline{r}) / (2\pi |\underline{r}' - \underline{r}_0|^3) \quad (3)$$

donde I es la corriente que se inyecta al terreno y \underline{r}_0 es la posición del electrodo. Suponiendo que $\epsilon \ll |\underline{r}' - \underline{r}_0|$. \underline{E}_0 será aproximadamente uniforme en la vecindad de la esfera, por lo que podemos sustituir la (3) en la (2) para obtener

$$\Delta U(\underline{r}) = I \Delta \rho (4\pi^2)^{-1} H(\underline{r}, \underline{r}', \underline{r}_0) dv \quad (4)$$

donde

$$H(\underline{r}, \underline{r}', \underline{r}_0) = (\underline{r}' - \underline{r}_0) \cdot (\underline{r}' - \underline{r}) / (|\underline{r}' - \underline{r}_0|^3 |\underline{r}' - \underline{r}|^3) \quad (5)$$

y $dv = 4\pi\epsilon^3/3$ es el volumen de la esfera. La ecuación (4) sigue representando el potencial debido a un dipolo eléctrico, el cual físicamente corresponde a las cargas de signos opuestos que se inducen en la superficie de la esfera. No existen efectos de polo debido a que la suma algebraica de las cargas es necesariamente cero, según se sigue de la ecuación de continuidad para el flujo de corriente.

La aplicación de la ecuación (4) puede extenderse a elementos de volumen de forma arbitraria, con tal que las dimensiones de éstos sean pequeñas en relación con su distancia a los electrodos de corriente y de potencial. Esto es, que a grandes distancias los efectos de una esfera y un cubo, por ejemplo, deberán ser iguales cuando ambos tengan el mismo volumen. Esto se debe a que, en primer lugar, el momento dipolar inducido por unidad de volumen es idéntico en ambos casos, ya que éste depende del campo inductor y no de la forma del cuerpo. Por otro lado, aunque la forma es importante al considerar el potencial cerca del cuerpo, a grandes distancias el efecto es necesariamente dipolar, porque en una expansión multipolar de la distribución de carga, el primer término significativo es el correspondiente a dipolos, ya que no existen efectos de polo. Por lo anterior podemos tomar la expresión (4) como la adecuada para el potencial producido por cuerpos infinitesimales de forma arbitraria.

El efecto de varios de estos cuerpos puede calcularse fácilmente por superposición ya que las interacciones entre ellos serán de segundo orden, dada la superposición de contrastes pequeños en resistividad. Para un número M de tales cuerpos se tendrá

que

$$\Delta U(\underline{r}) = I(4\pi^2)^{-1} \sum_{j=1}^M \Delta\rho_j H(\underline{r}'_j, \underline{r}, \underline{r}_0) dv_j, \quad (6)$$

donde $\Delta\rho_j$ y dv_j corresponden al j -ésimo cuerpo; \underline{r}'_j representa el punto central del mismo.

La expresión (6) representa el potencial debido a la presencia de inhomogeneidades, por lo que habrá de sumársele el potencial debido al semiespacio. La suma corresponde al potencial que se mediría en una situación determinada. Tomando en cuenta que sobre un semiespacio $U(\underline{r}) = \rho_0 I / (2\pi |\underline{r} - \underline{r}_0|)$, y suponiendo un dispositivo polo-polo, las mediciones en términos de resistividad aparente (ρ_a) vienen dadas como

$$\rho_a = \rho_0 + (|\underline{r} - \underline{r}_0| / 2\pi) \sum_{j=1}^M \Delta\rho_j H(\underline{r}'_j, \underline{r}, \underline{r}_0) dv_j. \quad (7)$$

Para modelar las mediciones de PI utilizamos la formulación de Seigel (1959). En esta formulación la cargabilidad aparente (m_a) puede representarse como

$$m_a = m_0 + \sum_{j=1}^M \frac{\rho_j}{\rho_a} \frac{\partial \rho_a}{\partial \rho_j} (m_j - m_0), \quad (8)$$

donde m_j es la cargabilidad del j -ésimo cuerpo y m_0 la del semiespacio. Sustituyendo la (7) en la (8) y suponiendo que $\rho_a = \rho_0$ se tiene que

$$m_a = m_0 + (|\underline{r} - \underline{r}_0| / 2\pi) \sum_{j=1}^M (m_j - m_0) H(\underline{r}'_j, \underline{r}, \underline{r}_0) dv_j. \quad (9)$$

La suposición de que $\rho_a = \rho_0$ implica que esta expresión es exacta sólo para contraste nulo en resistividad, y que representa una aproximación para contrastes pequeños.

Las expresiones (7) y (9) representan aproximaciones para contrastes pequeños en resistividad, y corresponden al tipo de dispositivo más sencillo: un electrodo de corriente y uno de potencial. Las expresiones para los diferentes dispositivos electrónicos de uso común se pueden obtener por superposición y utilizando los factores geométricos correspondientes. Nótese que en el límite cuando dv_j tiende a cero y M a infinito las ecuaciones (7) y (9) representan ecuaciones integrales lineales.

SOLUCION NUMERICA Y EJEMPLOS

En términos de las ecuaciones (7) y (9), el problema inverso consiste en obtener, a partir de determinado número de mediciones de ρ_a y m_a , información acerca de las distribuciones de resistividad y cargabilidad. Con este fin describiremos, a continuación, dos procedimientos basados en el álgebra de matrices. Mediante el primero se construyen modelos de mínima norma cuyas respuestas se ajustan a los datos y mediante el segundo se estiman valores promedio de las distribuciones; cada caso se ilustra con ejemplos. Algunas aplicaciones de estos procedimientos se consideran en la siguiente sección.

Reducción a forma matricial

Para efectuar el análisis numérico de las ecuaciones (7) y (9) se procedió a reducir las a ecuaciones matriciales. Utilizaremos solamente una de ellas para describir el proceso ya que ambas tienen la misma forma. Considérese por caso la ecuación (9), la cual puede reescribirse para un número N de mediciones como

$$m_a(\underline{r}_i) = m_0 + (|\underline{r}_i - \underline{r}_{0i}|/2\pi) \sum_{j=1}^M \Delta m_j H(\underline{r}'_j, \underline{r}_i, \underline{r}_{0i}) dv_j, \quad i = 1, N, \quad (10)$$

donde

$$\Delta m_j = m_j - m_0. \quad (11)$$

Seguidamente se considera que Δm_j varía sobre el plano X-Z, solamente dentro del rectángulo de área $4a \times 6a$ según se muestra en la figura 1. Fuera de este rectángulo la cargabilidad no varía y vale simplemente m_0 . En la dirección paralela al rumbo la cargabilidad es constante desde $y = -L/2$ hasta $y = L/2$, y fuera de este intervalo varía y vale simplemente m_0 . Dentro del rectángulo se consideran M-1 valores Δm_j los cuales junto con m_0 representan las incógnitas a determinar. De esta manera la ecuación (10) se reduce a la forma algebraica estándar

$$\underline{Y} = \underline{A} \underline{X}. \quad (12)$$

es un vector $N \times 1$ que contiene los datos, \underline{X} es un vector $M \times 1$ que contiene las incógnitas ($X_1 = m_0$, $X_j = \Delta m_j$, $j \neq 1$), y \underline{A} es una matriz $N \times M$. Los elementos de la primera columna de \underline{A} valen la unidad y representan los coeficientes de m_0 ; los demás dependen dados por

$$A_{ij} = (|\underline{r}_i - \underline{r}_{0i}|/2\pi) \int_{V_j} H(\underline{r}'_j, \underline{r}_i, \underline{r}_{0i}) d^3 \underline{r}'_j. \quad (13)$$

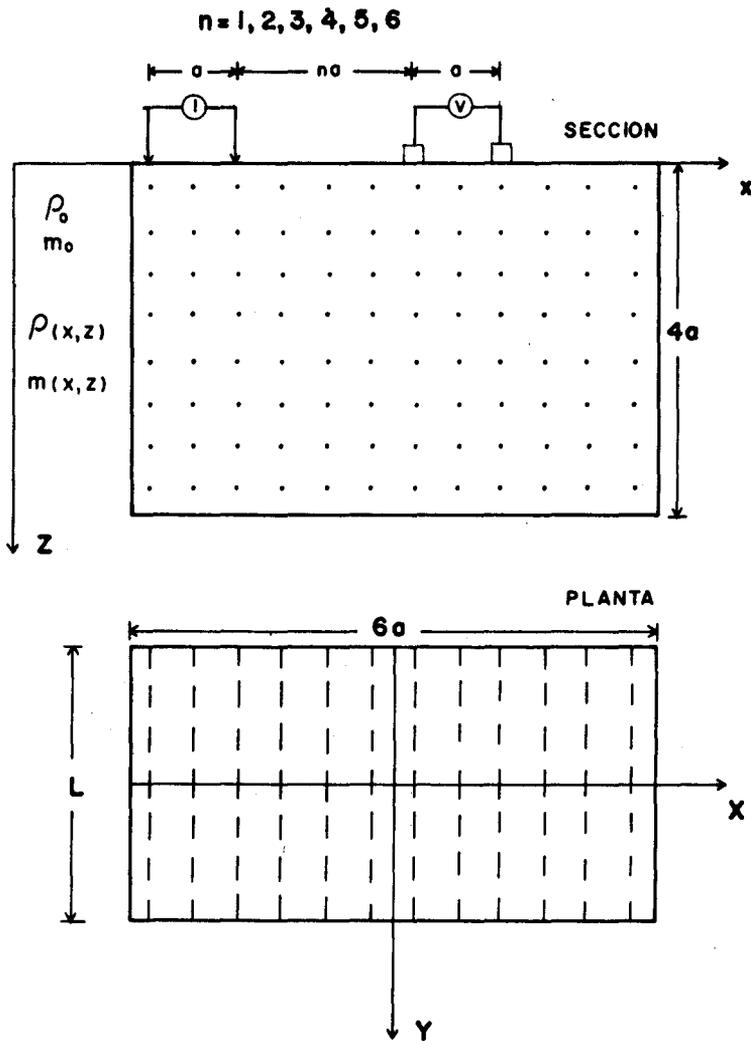


Fig. 1. Vista en sección y en planta de la geometría del modelo a estimar.

Según la ecuación (12) el problema inverso se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales el cual tiene la característica de poseer menor número de ecuaciones que de incógnitas.

Modelos de mínima norma

Aun en el mejor de los casos en que no exista error en los datos, un sistema de ecuaciones con menor número de ecuaciones que de incógnitas no puede tener solución única. Es por lo tanto necesario imponer restricciones externas con el fin de construir una solución. En el presente trabajo construimos modelos de mínima norma cuyas respuestas se ajusten a los datos. Con este fin utilizamos la matriz inversa generalizada (e.g., Lanczos, 1961; Wiggins, 1972). En esta formulación el modelo construido \hat{X} se expresa como

$$\hat{X} = \underline{V} \underline{\Lambda}^{-2} \underline{U}^T \underline{Y} \quad (14)$$

donde \underline{V} y \underline{U} son matrices que se obtienen de las factorizaciones ortogonales de $\underline{A}^T \underline{A}$ y $\underline{A} \underline{A}^T$ respectivamente, y $\underline{\Lambda}$ es la matriz de eigenvalores no nulos y comunes a ambas factorizaciones. Denotaremos estos eigenvalores como λ_i , $i = 1, N$.

Para ilustrar la construcción de modelos a partir de datos sin ruido, en la figura 2 se presenta el caso de un modelo rectangular. El vector \underline{Y} , los datos, está representado en la pseudosección superior y el vector \underline{X} , el modelo construido, por los contornos sobre el modelo rectangular hipotético. La figura 2.b corresponde a la pseudosección calculada mediante el modelo estimado. Como puede observarse, ambas pseudosecciones son idénticas, lo que significa que el sistema de ecuaciones se satisface. De los 48 eigenvalores disponibles de la factorización, se utilizaron solamente 38 debido a la presencia de ruido numérico, siendo éstos suficientes para hacer que el sistema de ecuaciones se satisfaga. En cuanto a los contornos del modelo construido, se obtuvieron tomando como base 96 incógnitas, según se muestra en la figura 1. Como puede observarse, el modelo de mínima norma se aproxima bastante al modelo rectangular hipotético. En este ejemplo, como en todos los que le siguen, los datos corresponden a un dispositivo dipolo-dipolo. Asimismo, la cargabilidad de todos los cuerpos anómalos se supone unitaria.

Es importante observar que el criterio de mínima norma no siempre lleva a resultados satisfactorios como los mostrados en la figura 2. Los modelos que se obtienen dependen, según se muestra en la figura 3, del número de datos utilizados en la inver-

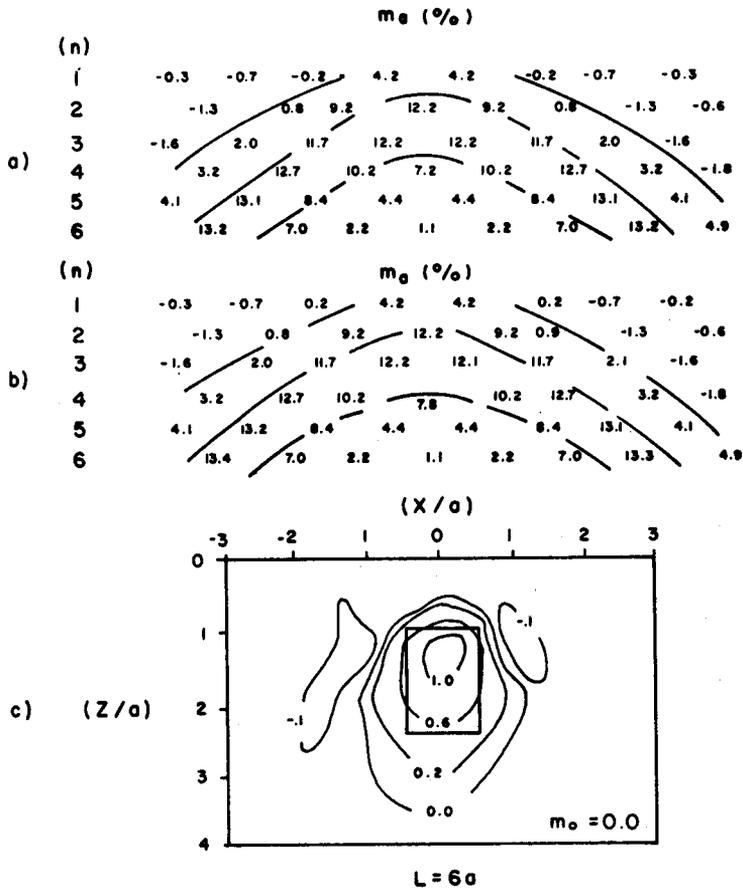


Fig. 2. Inversión de datos sin ruido para un modelo rectangular. (a) Datos generados a partir del modelo rectangular. (b) Respuesta teórica del modelo de mínima norma. (c) Contornos del modelo de mínima norma. Se utilizaron 6 separaciones interelectródicas: $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 .

sión. Considérese primero el modelo representado en la figura 3.a, el cual se obtuvo invirtiendo los 8 primeros datos ($n = 1$) de la figura 2. Los contornos del modelo resultante distan mucho de sugerir la existencia de un cuerpo a profundidad, a pesar de que tanto el cuerpo rectangular como el modelo de contornos producen la misma respuesta para la separación considerada. Este resultado es desalentador, y se debe a que con un dispositivo de geometría fija no existe discriminación de profundidad. La

situación es muy parecida a la que se presenta cuando el criterio de mínima norma se aplica a datos gravimétricos y magnetométricos (Shuey y Wannamaker, 1978). Sin embargo, en el presente caso existe la flexibilidad de regular la profundidad de penetración. Como se muestra en la figura 3, a medida que se aumenta el número de datos, mediante la incorporación de valores asociados a diferentes separaciones de electrodos, se delimita mejor el modelo hipotético. Esto se debe a que diferentes separaciones dan información sobre profundidades diferentes. El ejercicio ilustra que la solución de mínima norma es aplicable al presente caso, cuando los datos corresponden a separaciones múltiples de electrodos.

En el caso de datos con error se utiliza el mismo tipo de solución que el descrito anteriormente. Para esto se premultiplica la ecuación (12) por una matriz diagonal formada por los inversos de las desviaciones estándar de las mediciones. Para construir el modelo, una vez efectuada la factorización, se van agregando eigenvalores de mayor a menor y se selecciona el modelo en

$$\chi^2 = (N - K)^{-1} \sum_{i=1}^N (Y_{ic} - Y_i)^2 / \sigma_i^2 \approx 1 \quad , \quad (15)$$

donde K es el número de eigenvalores utilizados en la construcción; Y_{ic} es el valor teórico correspondiente al i -ésimo dato y σ_i es la desviación estándar. El efecto de incluir más, o menos, de los eigenvalores necesarios se ilustra en la figura 4, donde se presentan casos con $\chi^2 \gg 1$, $\chi^2 \approx 1$ y $\chi^2 \ll 1$. Si los datos no se ajustan apropiadamente, como en el primer caso, se obtienen modelos muy simples. Por otro lado, si los datos se ajustan demasiado, como en el último caso, los modelos resultan muy complicados. Al modelo que cumple con la relación (15) se le considera como el modelo representativo. En estos ejemplos se utilizaron los mismos datos de la figura 2, a los cuales se les sumó un 10 por ciento de ruido aleatorio.

Se sabe por experiencia que la cargabilidad de los materiales homogéneos es siempre positiva. En tales condiciones de homogeneidad la cargabilidad aparente coincide con la cargabilidad del material y es, por lo tanto, también positiva. Es posible, sin embargo, que en materiales heterogéneos la cargabilidad aparente resulte negativa. Un ejemplo de esto puede observarse en la figura 2, donde por efectos geométricos aparecen cargabilidades aparentes negativas, las cuales están asociadas al modelo rectangular, cuya cargabilidad es y debe ser siempre positiva. De lo anterior se sigue que independientemente del signo de la cargabilidad aparente, los valores de la cargabilidad de los materiales del subsuelo deben ser siempre positivos. Esto es, que en el proceso de inversión todas las incógnitas deben ser positivas.

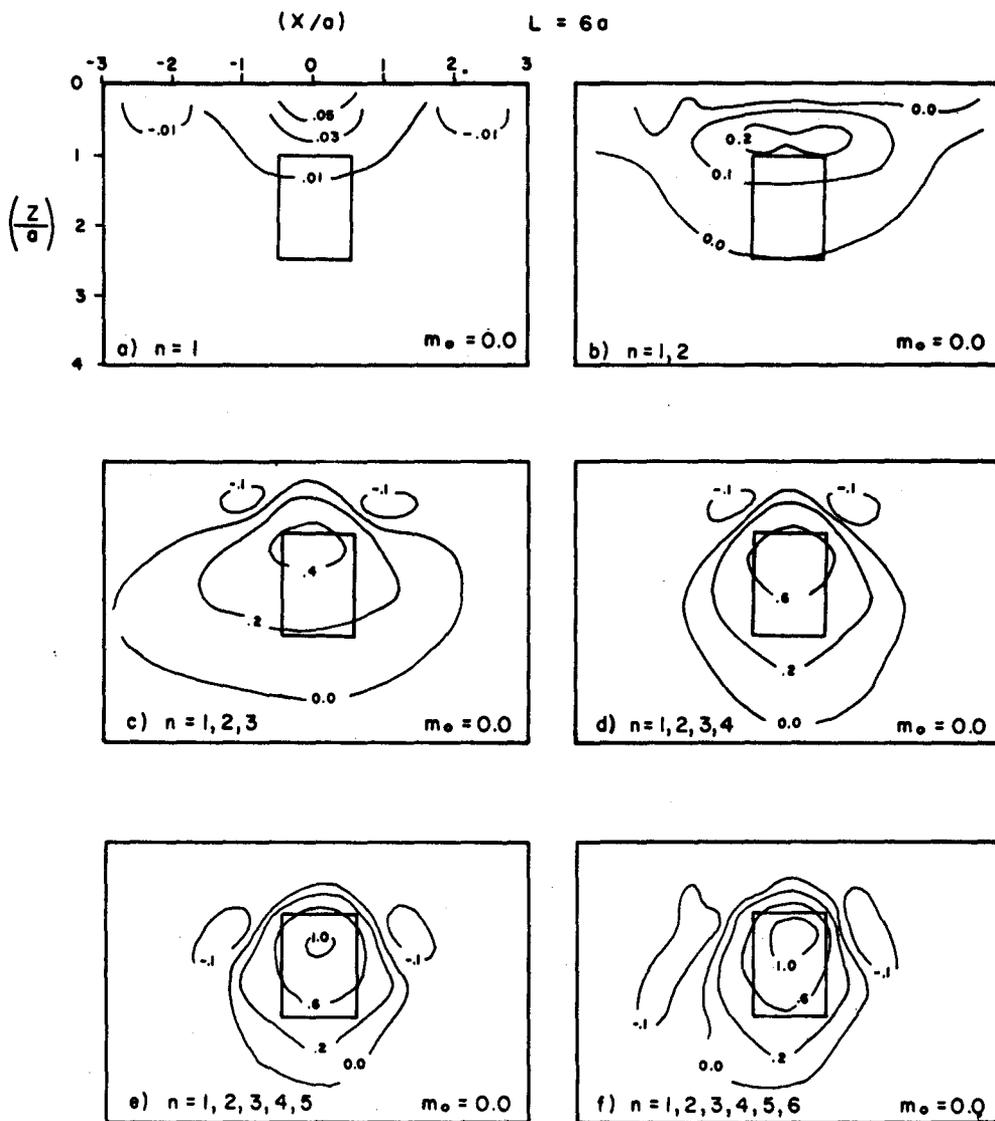


Fig. 3. Inversión de datos sin ruido para un modelo rectangular. Los contornos corresponden a modelos de mínima norma construidos a partir de diferentes números de datos. (a) $n = 1$. (b) $n = 1, 2$. (c) $n = 1, 2, 3$. (d) $n = 1, 2, 3, 4$. (e) $n = 1, 2, 3, 4, 5$. (f) $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 .

Por lo anterior, es necesario tomar en cuenta que una de las características del criterio de mínima norma es que permite que algunas de las incógnitas sean negativas. En algunos casos, sobre todo cuando $m_0 = 0$, como en los ejemplos anteriores, valores negativos de Δm_j implican valores negativos para la cargabilidad, los cuales no son físicamente permisibles. En estos casos, y en general, si se quiere que el cuerpo anómalo posea solamente valores mayores (o menores) que el del semiespacio, se impone una segunda iteración. En ésta se procede como se describe a continuación. El modelo seleccionado en la primera iteración, el cual contiene valores negativos, se utiliza para construir un modelo que tenga sólo valores positivos. Para esto simplemente se reemplazan los valores negativos por valores positivos cercanos a cero. El nuevo modelo, por supuesto, no ajusta los datos en la medida en que lo hace el modelo original y se utiliza como modelo inicial de la misma manera que si el problema fuera no lineal. Esto es, el sistema de ecuaciones se replantea de tal manera que en el nuevo sistema las incógnitas representen incrementos fraccionarios de los valores originales. Para obtener valores positivos en esta segunda iteración se considera que

$$\Delta X_j / X_j = \Delta \ln X_j \quad , \quad (16)$$

donde X_j es el valor inicial del j -ésimo parámetro. El nuevo valor de este parámetro se obtiene como $X_j \exp(\Delta X_j)$, por lo que resulta siempre del mismo signo que el valor inicial.

Hemos observado que este procedimiento mejora considerablemente la demarcación de las anomalías. En la figura 5 se muestra el proceso con un modelo de un dique inclinado. Se presentan ambos casos de datos con y sin ruido. Como puede observarse la demarcación de la anomalía es superior en la segunda iteración, sobre todo en el caso en que los datos tienen ruido. Es pertinente aclarar, por otro lado, que los modelos de valores puramente positivos no ajustan los datos en la medida en que lo hace el modelo que incluye tanto valores positivos como negativos. Sin embargo, creemos que los resultados son satisfactorios y lo suficientemente exactos, y que no se requiere de una tercera iteración, la cual mejoraría la solución pero incrementaría el costo de la inversión.

Resolución y modelos promedio

Según se discutió anteriormente, el sistema de ecuaciones (12) no tiene solución única. De la infinidad de soluciones posibles, el operador utilizado selecciona la solución de mínima norma. Esta solución, según se demostró mediante ejemplos, es

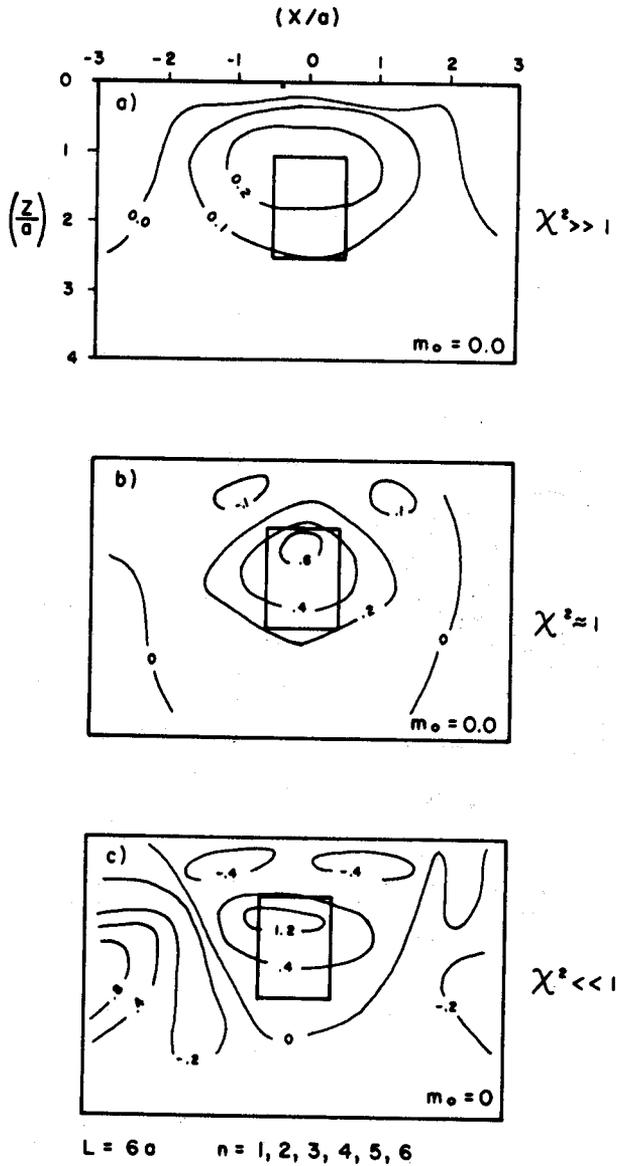


Fig. 4. Inversión de datos con ruido para un modelo rectangular. (a) Modelo demasiado simple cuya respuesta no se ajuste a los datos apropiadamente. (b) El modelo seleccionado cuya respuesta se ajusta a los datos apropiadamente. (c) Modelo muy complicado cuya respuesta se ajusta demasiado a los datos.

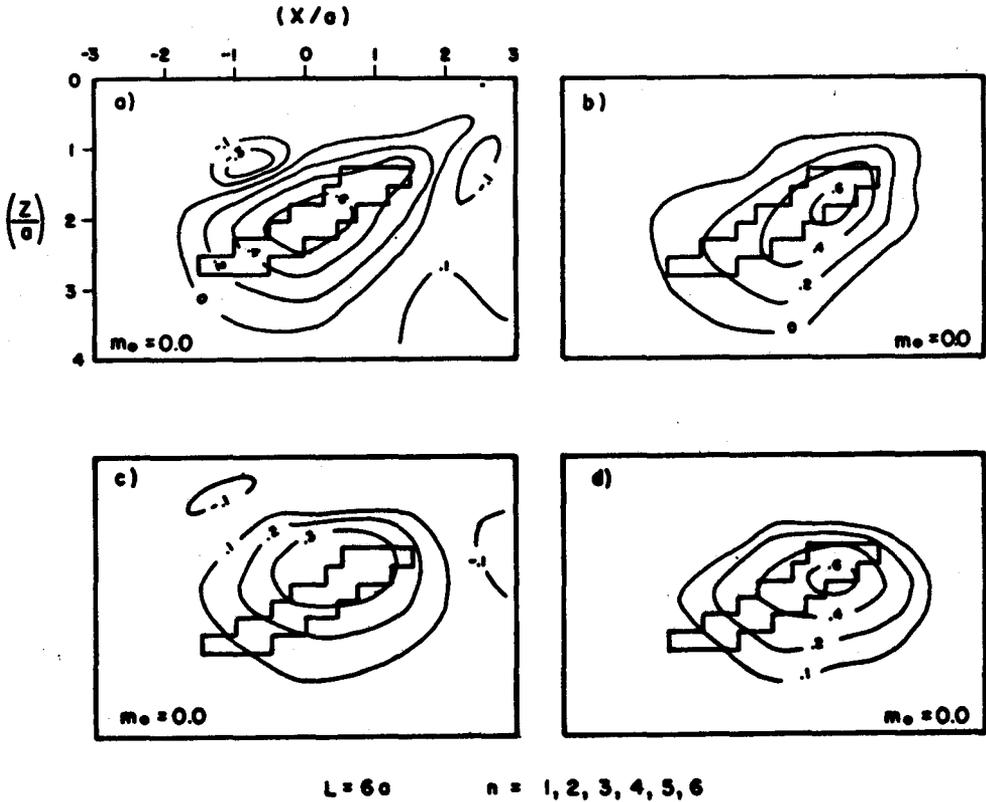


Fig. 5. Inversión de datos con y sin ruido para el modelo de un dique inclinado. (a) Modelo de mínima norma obtenido en la primera iteración a partir de datos sin ruido. (c) Modelo de mínima norma obtenido en la primera iteración a partir de datos con ruido. (d) Modelo correspondiente a la segunda iteración, donde la cargabilidad es siempre positiva.

útil para estimar las principales características de anomalías compactas. Queda pendiente, sin embargo, el problema de la no unicidad.

La metodología desarrollada por Backus y Gilbert (1970) permite tratar este problema de una manera rigurosa, aunque debido al carácter discreto de nuestras incógnitas, su aplicación en el presente caso produce resultados de menor generalidad que si nuestras incógnitas fueran funciones continuas. El método enfatiza la estimación de promedios espaciales del modelo real, en lugar de modelos que de alguna manera ajustan los datos. Estos promedios tienen asociadas determinadas funciones prome-

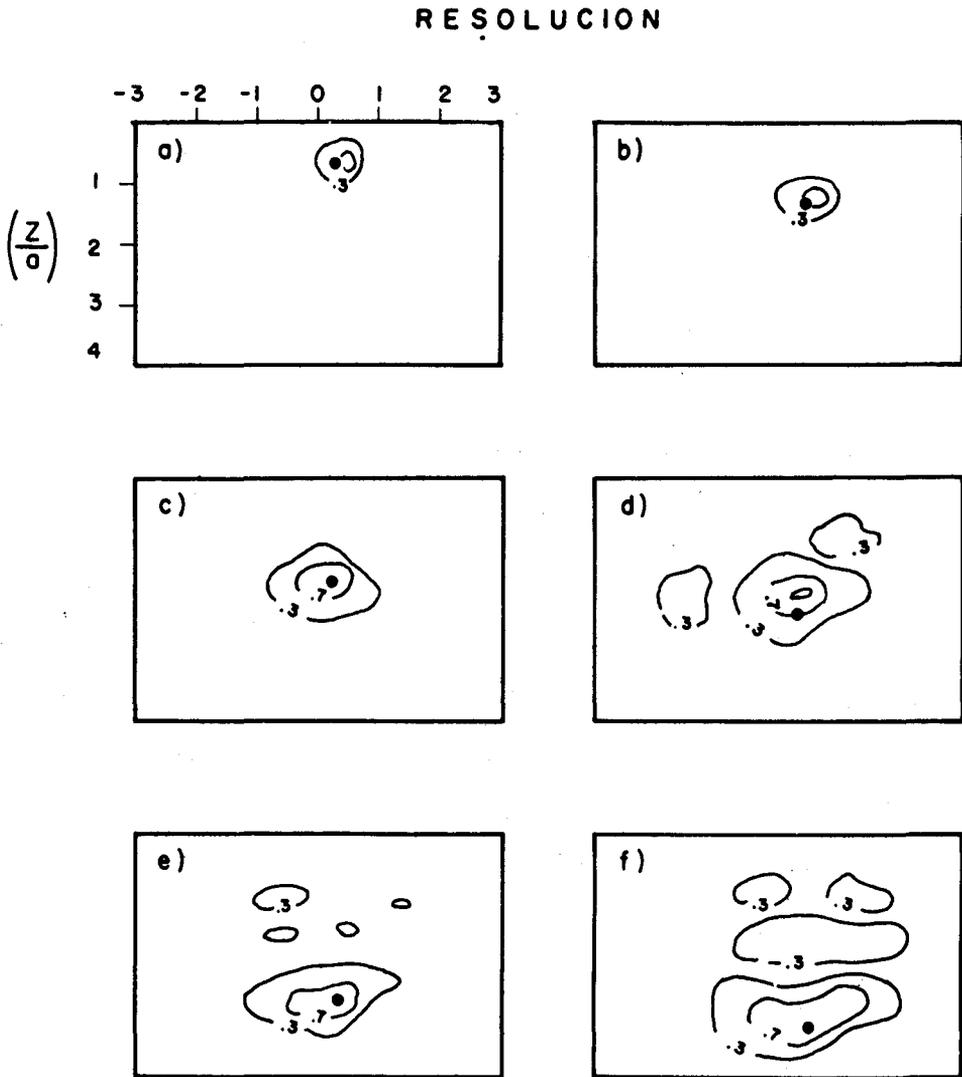


Fig. 6. Contornos de resolución para los datos sin ruido de la Fig. 2. Los puntos oscuros indican la localización de los promedios correspondientes. Como puede observarse el poder resolutivo se deteriora con la profundidad.

diantes, y tienen la característica de ser únicos. El modelo promedio $\langle X \rangle$ se forma como una combinación lineal de los datos. Esto es,

$$\langle X \rangle = B Y \quad (17)$$

donde la matriz B está por lo pronto indeterminada. Sustituyendo la ecuación (12) en la (16) se tiene que

$$\langle X \rangle = R X \quad (18)$$

donde

$$R = B A \quad (19)$$

Por otro lado, de la ecuación (16) se deduce que

$$\text{Var}(\langle X_i \rangle) = \sum_{j=1}^N B_{ij}^2 \text{Var}(Y_j) \quad (20)$$

El valor del i -ésimo promedio puede expresarse como

$$\langle X_i \rangle = \sum_{j=1}^M R_{ij} X_j \quad (21)$$

Los valores promedio y sus varianzas (ecuaciones 20 y 19) dependen de la matriz B , la cual en principio puede ser arbitraria. Es deseable, sin embargo, hacer que $R_{ij} \approx 0$ para $i \neq j$ y $R_{ij} \approx 1$ para $i = j$, para que de esta manera el i -ésimo promedio pueda identificarse con el valor correspondiente del modelo real. Cuando tal situación es posible, se dice que existe buena resolución. Es deseable también, por otro lado, que en la selección de la matriz B la varianza del mismo promedio resulte pequeña. Se puede demostrar que en general existe un compromiso entre resolución y varianza, el cual puede expresarse en términos de la factorización descrita anteriormente. Los elementos de la matriz R se expresan como

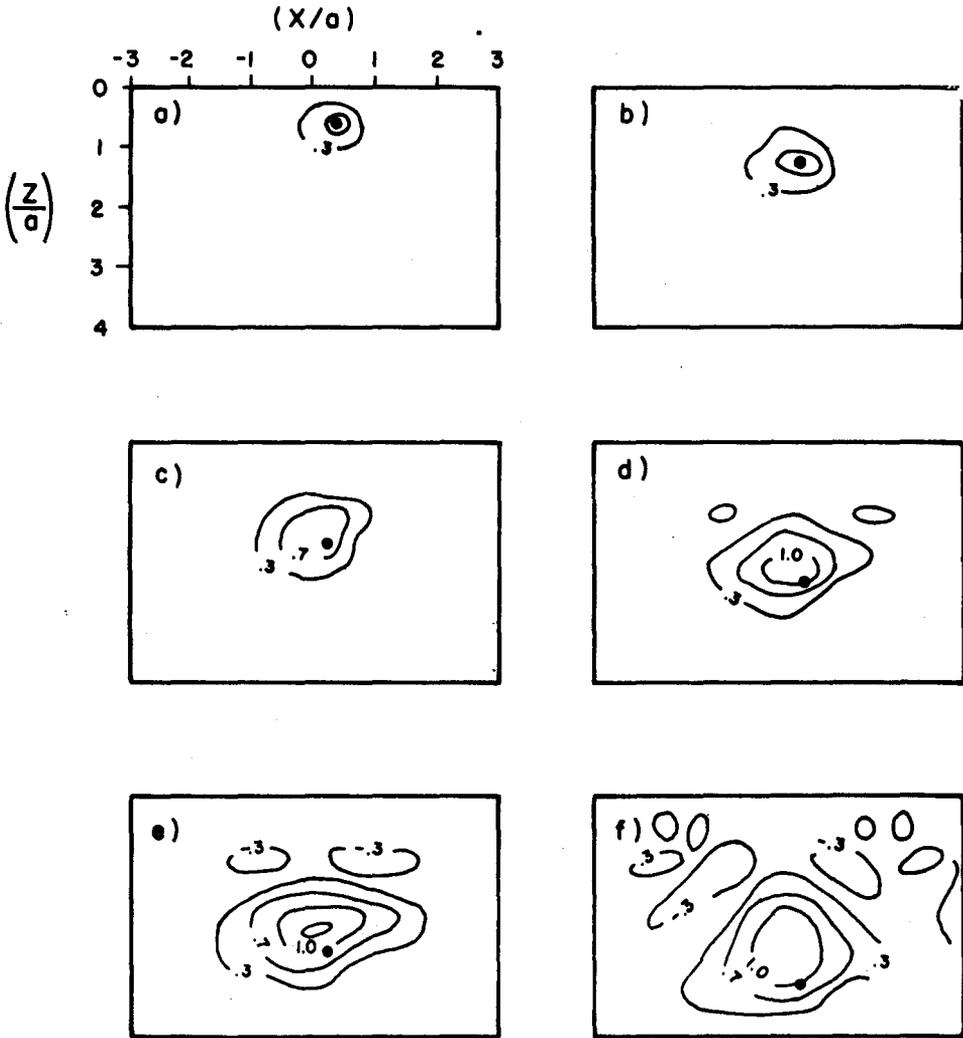
$$R_{ij} = \sum_{\ell=1}^P V_{i\ell} V_{\ell j} \quad (22)$$

y la varianza del i -ésimo promedio como

$$\text{Var}(\langle X_i \rangle) = \sigma_0^2 \sum_{j=1}^P (V_{ij}/\lambda_j)^2 \quad (23)$$

El compromiso entre ambas cantidades se efectúa variando el número P de eigenvalores. σ_0^2 representa la varianza de los datos, la cual se reduce simplemente a la unidad cuando los datos se normalizan con respecto a sus desviaciones estándar. Para un promedio dado el valor de P se determina a partir de la varianza requerida.

RESOLUCION



$$\text{var}(X_j) \leq 0.02$$

Fig. 7. Contornos de resolución para datos con ruido. Se utilizaron los datos de la Fig. 2 contaminados con 10 por ciento de ruido aleatorio. Como puede observarse (compárese con la figura anterior) el poder resolutorio se deteriora por la presencia del ruido, ya que se requiere mantener la varianza de los promedios dentro de límites razonables.

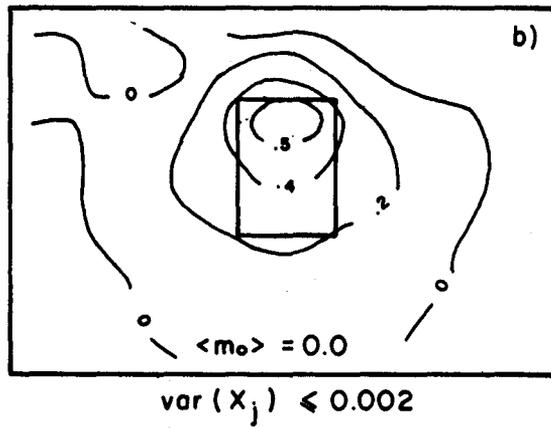
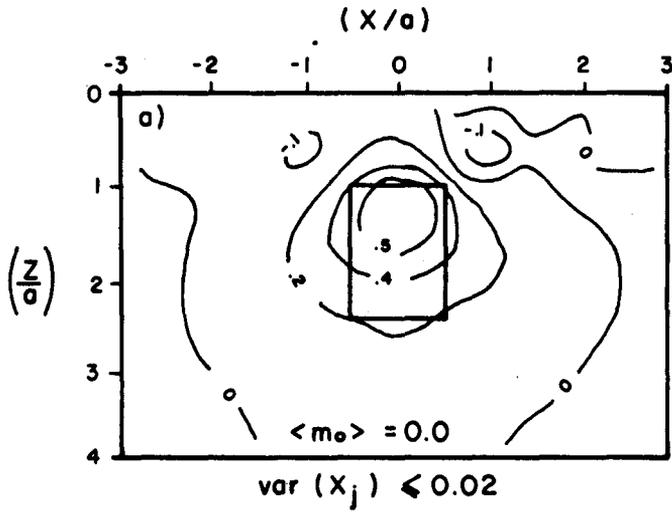
En la figura 6 se muestra la mejor resolución posible en diferentes puntos con los datos de la figura 2. Los resultados corresponden a datos sin error, por lo que se utilizó $P = 48$. Los contornos se obtuvieron de valores de R_{ij}/R_{ij} . Como puede observarse, el poder resolutivo se deteriora a medida que se consideran puntos a mayor profundidad. En general, la presencia de ruido en los datos deteriora el poder resolutivo si se quiere mantener la varianza dentro de límites razonables. En la figura 7 se muestran contornos de resolución para el mismo caso de la figura anterior, pero considerando errores en los datos y en los resultantes promedios espaciales. En la figura 8 se muestran modelos promedio correspondientes al modelo rectangular hipotético de la figura 2.

APLICACIONES

En esta sección demostramos que la aproximación para pequeños contrastes en resistividad puede ser utilizada para invertir datos aún en casos de contraste moderado. Se consideran tanto datos sintéticos como de campo. Primero consideraremos datos sintéticos publicados por varios autores en relación con soluciones numéricas del problema directo. Para efectuar la inversión de estos datos se les sumó el 10 por ciento de ruido aleatorio.

En la figura 9 se presentan los resultados de invertir datos tomados de Snyder (1976), quien desarrolló un método para modelar la respuesta de cuerpos bidimensionales. Para adaptar nuestro algoritmo de tres a dos dimensiones supusimos la longitud a lo largo del rumbo igual a $16a$. Como se puede observar en la figura 9, tanto los modelos de mínima norma como los modelos promedio permiten delimitar al modelo hipotético. En la figura 10 se muestran ejemplos del ajuste de la respuesta teórica a los datos.

En la figura 11 se presentan los resultados de invertir datos tomados de Hohmann (1977), quien desarrolló un método para modelar la respuesta de cuerpos tridimensionales. Se invirtieron datos de polarización inducida correspondientes a un dique inclinado, el cual puede ser más, o menos conductor que el semiespacio encajonante. En ambos casos, como puede observarse en la figura 11, los modelos de mínima norma permiten delimitar el dique inclinado. En la misma figura se presentan resultados suponiendo que el modelo tiene longitudes diferentes de la real. Como era de esperarse, la amplitud de la anomalía se subestima o sobreestima, dependiendo de si se suponen cuerpos más o menos largos que el modelo real.



$L = 6a$ $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Fig. 8. Modelos promedio para el modelo rectangular de la Fig. 2. Los datos fueron contaminados con 10 por ciento de ruido aleatorio.

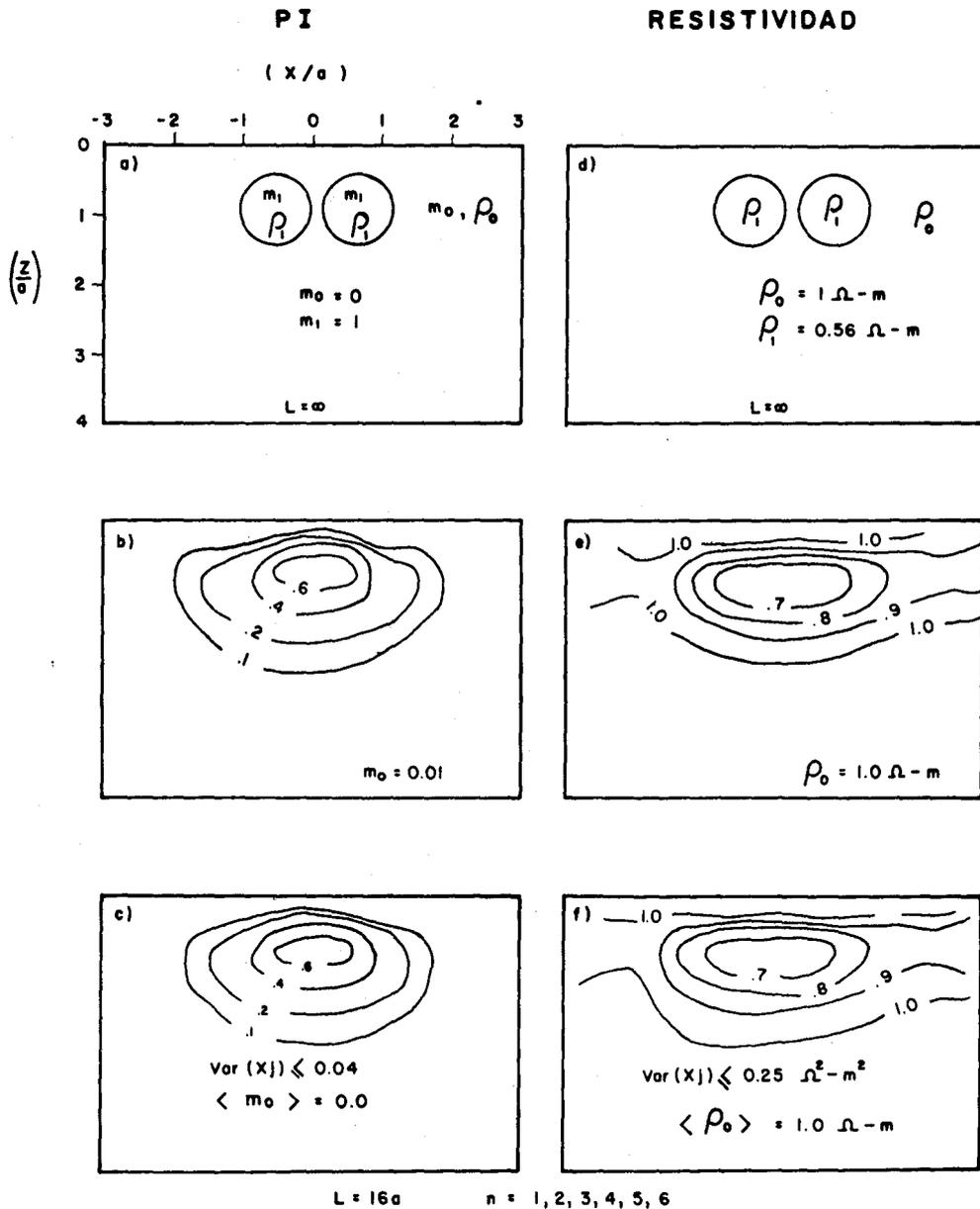


Fig. 9. Inversión de pseudosecciones de resistividad y polarización inducida tomadas de Shyder (1976). Tanto los modelos de mínima norma (b) y (e) como los modelos promedio (c) y (f) delimitan los cuerpos anómalos (a) y (d) con suficiente precisión.

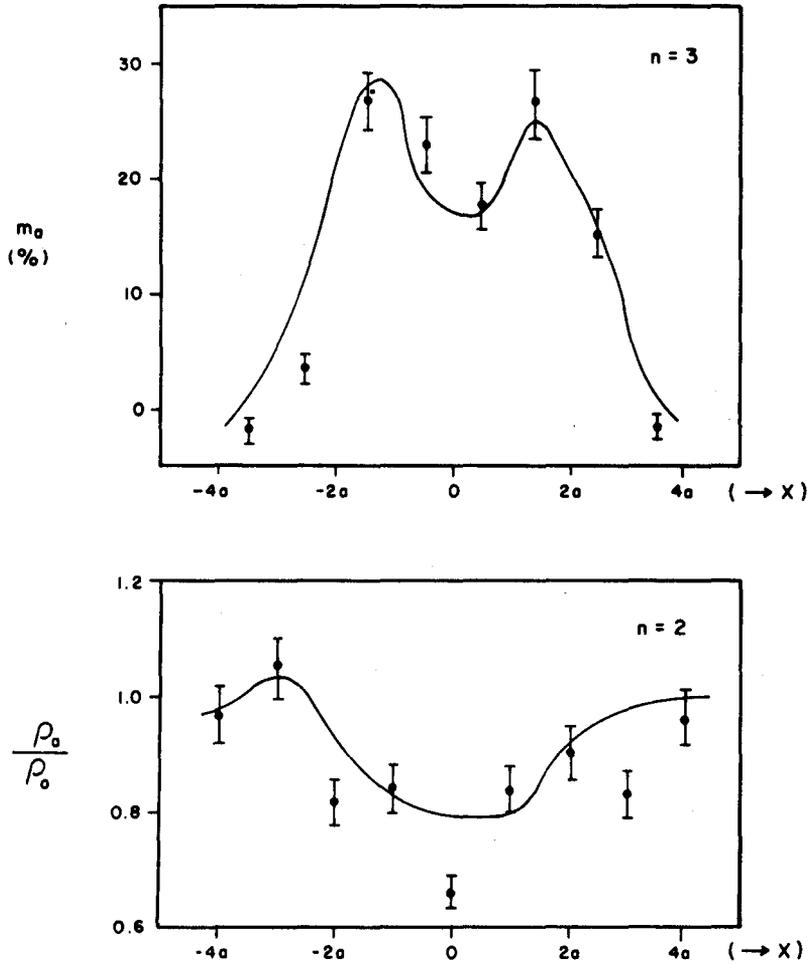
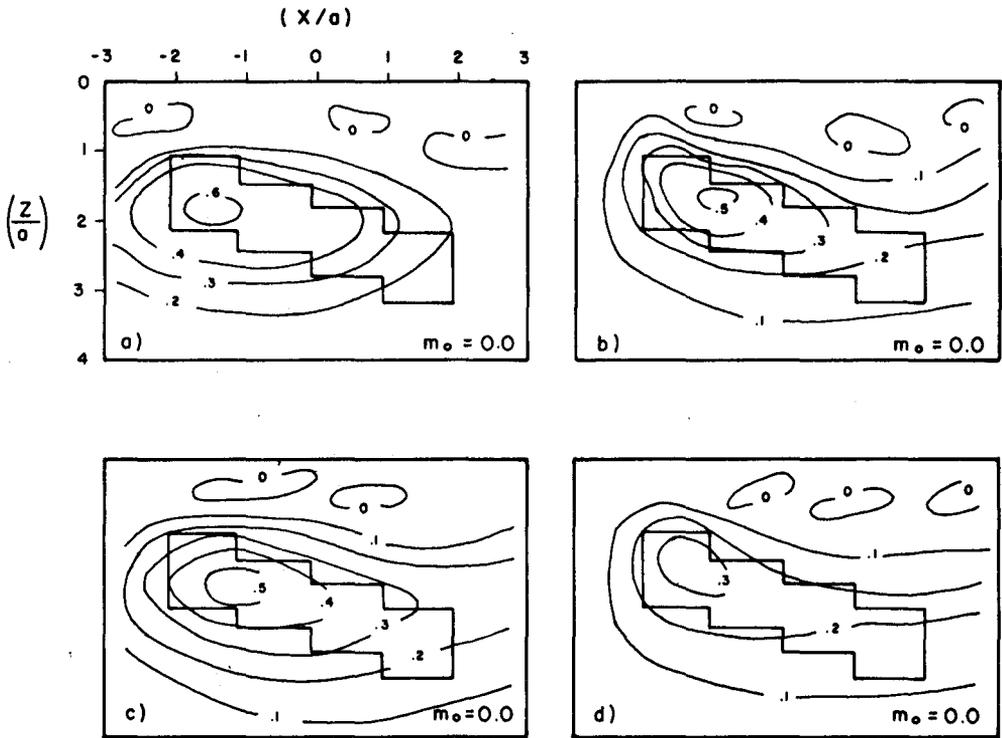


Fig. 10. Ejemplos del ajuste de la respuesta de los modelos de mínima norma de la Fig. 9 a los datos utilizados en la inversión. Los datos originales fueron tomados de Snyder (1976) y contaminados con un 10 por ciento de ruido aleatorio.

Finalmente, para ilustrar la aplicación del algoritmo en la inversión de datos de campo, en la figura 12 se presentan los resultados de un caso práctico. Los datos fueron tomados de Pelton *et al.* (1978), quienes los invirtieron, suponiendo cuerpos rectangulares. En la figura se comparan sus resultados con los nuestros.



MODELO REAL

a) $\rho_1/\rho_0 = 1/5, L = 5a$

b) $\rho_1/\rho_0 = 5, L = 5a$

c) $\rho_1/\rho_0 = 5, L = 5a$

d) $\rho_1/\rho_0 = 5, L = 5a$

CONTORNOS

a) $\rho_1/\rho_0 = 1, L = 5a$

b) $\rho_1/\rho_0 = 1, L = 5a$

c) $\rho_1/\rho_0 = 1, L = 3a$

d) $\rho_1/\rho_0 = 1, L = 8a$

Fig. 11. Inversión de pseudosecciones de polarización inducida tomadas de Hohmann (1975). (a) Dique más resistivo que el semiespacio. (b) Dique menos resistivo que el semiespacio. (c) Dique más resistivo que el semiespacio; en la inversión se supuso una longitud menor que la real. (d) Dique más resistivo que el semiespacio; en la inversión se supuso una longitud mayor que la real.

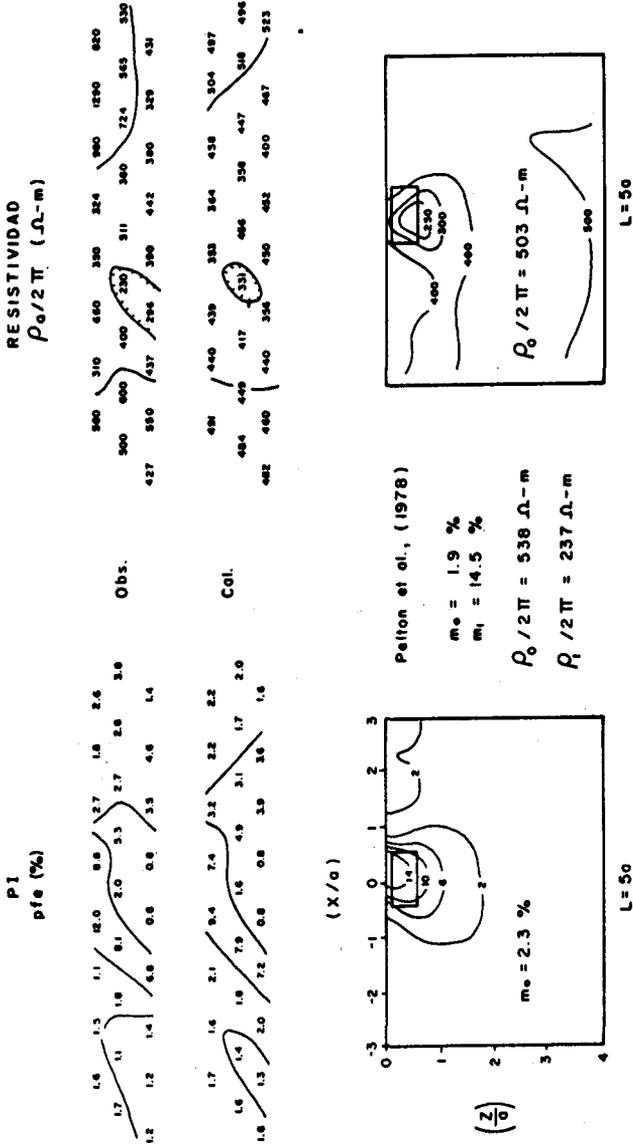


Fig. 12. Inversión de datos de campo. Los datos fueron tomados de Pelton *et al.* (1978), quienes los invirtieron y encontraron los modelos rectangulares que se ilustran en la figura. Los contornos de cargaabilidad y resistividad corresponden a los modelos de mínima norma construídos en el presente trabajo.

CONCLUSION

Los resultados presentados demuestran que los modelos de mínima norma, así como los modelos promedio, cuando se aplican en la inversión de datos de resistividad y PI, proporcionan valiosa información en situaciones geológicas comunes. Una de las principales ventajas del método descrito consiste en que se obtienen resultados satisfactorios en solamente una o dos iteraciones. No es necesario, por otra parte, suponer de antemano modelos iniciales.

El método proporciona mejores resultados en condiciones de contrastes pequeños en resistividad. Si bien esto representa una limitación, no lo es tanto, ya que es en este tipo de condiciones, también, en las que el método de polarización inducida es de mayor utilidad en problemas de exploración. Considérese como ejemplo el caso de las mineralizaciones diseminadas, las cuales, por lo general, poseen valores altos de cargabilidad, pero no presentan contraste en resistividad, por lo que resulta difícil su detección mediante otros métodos (electromagnéticos y de corriente continua). En casos como éste no existe limitación alguna al aplicar el presente método de inversión a datos de polarización inducida.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo fue realizado con el apoyo económico del CONACYT a través de una beca de maestría otorgada a R. Cavazos-Garza. Agradecemos también a J. Frez por sus valiosas discusiones, y a B. Escareño por mecanografiar el manuscrito.

BIBLIOGRAFIA

- BACKUS, G. and F. GILBERT, 1970. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross earth data. *Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A.*, 266, 123-192.
- GOMEZ-TREVIÑO, E., 1987. Nonlinear integral equations for electromagnetic inverse problems. *Geophysics*, 52, 1297-1302.
- GOMEZ-TREVIÑO, E., 1988. The Fréchet derivative for the three-dimensional resistivity problem and some of its applications. (Inédito).
- HOHMANN, G. W., 1975. Three-dimensional induced polarization and electromagnetic modelling. *Geophysics*, 40, 309-324.

- LANCZOS, C., 1961. Linear differential operators. Van Nostrand, London.
- ORELLANA, E., 1982. Prospección geoeléctrica en corriente continua. Paraninfo, Madrid.
- PELTON, W. H., L. RIJO and C. M. SWIFT, Jr., 1978. Inversion of two-dimensional resistivity and induced polarization data. *Geophysics*, 43, 788-803.
- PETRICK, W. R., W. M. SILL and S. H. WARD, 1981. Three-dimensional resistivity inversion using alpha centers. *Geophysics*, 46, 1148-1162.
- RIJO, L., 1984. Inversion of three-dimensional resistivity and induced polarization data. Presentado en la reunión anual de la SEG, Atlanta, Nov. de 1984.
- SHUEY, R. T. and P. E. WANNAMAKER, 1978. On: "Applications of the generalized inverse to the inversion of static potential data" por J. Cribb (*Geophysics*, 41, 1365-1369). *Geophysics*, 43, 194-196.
- SMITH, N. C. and K. VOZOFF, 1984. Two-dimensional DC resistivity inversion for dipole-dipole data. IEEE Trans. *In Geoscience and Remote Sensing*, GE-22, 21-28.
- SNYDER, D. D., 1976. A method for modeling the resistivity and IP response of two-dimensional bodies. *Geophysics*, 41, 997-1015.
- TRIPP, A. C., G. W. HOHMANN and C. M. SWIFT, Jr., 1984. Two-dimensional resistivity inversion. *Geophysics*, 49, 1708-1717.
- WARD, S. H., 1967. The electromagnetic method. *Mining Geophysics, Soc. Explor. Geophys.*, 2, 225-237.
- WIGGINS, R. A., 1972. The general linear inverse problem: Implications of surface waves and free oscillation for earth structure. *Rev. Geophys. and Space Phys.*, 10, 251-285.