

# Modelo unidimensional de la marea en el Golfo de California

P. Ripa y G. Velázquez

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, B. C.

Recibido: 11 de septiembre, 1992; aceptado: 13 de enero, 1993.

## RESUMEN

Siete componentes de la banda semidiurna y seis de la diurna de la marea superficial del Golfo de California, que abarcan un rango de energías de cinco ordenes de magnitud, se estudian mediante un modelo lineal unidimensional. Los resultados muestran un excelente ajuste a las observaciones en 19 o menos estaciones. El modelo explica un 99% de la varianza temporal total para la mayoría de las componentes y un 90% en los casos de mayor discrepancia. La mayor diferencia entre las observaciones y los resultados del modelo se encuentra en las fases de la banda diurna en general y de la semidiurna en la cuenca de Guaymas. Es probable que el coeficiente linealizado de fricción que proporciona el mejor ajuste, sea demasiado grande, lo que señala la necesidad de formular parametrizaciones no uniformes de la fricción lineal.

**PALABRAS CLAVE:** Marea, Golfo de California.

## ABSTRACT

A linear one-dimensional model is fitted to the semidiurnal and diurnal components of the surface tide in the Gulf of California. This simple model accounts for 99% of the total time variance in most components and 90% for the worst cases. Discussion suggests the need for introducing non-uniform parameterizations of linear friction.

**KEY WORDS:** Tides, Gulf of California.

## 1. INTRODUCCION

La mayoría de las simulaciones de la marea en el Golfo de California han sido hechas mediante modelos bidimensionales y alineales (Grijalva 1972, Stock 1976, Quirós 1983, Quirós *et al.*, 1992). Esto tiene la ventaja de ser el método más completo y probado en diferentes mares del mundo. Su desventaja radica en que su tamaño, tiempo y costo de cálculo dificultan su uso repetido para hacer un "barrido" en espacio de parámetros. Por otra parte, cuando estos modelos fallan (por ejemplo en la reproducción de observaciones) no siempre es fácil ver por qué lo hacen. Finalmente, por ser alineales, han sido utilizados exclusivamente para la componente más energética en el Golfo de California, la  $M_2$ . Para modelar otras componentes, es necesario incluirlas simultáneamente con la  $M_2$ ; al no ser aplicable el principio de superposición, no se pueden modelar las componentes en forma independiente (ver por ejemplo, Godín 1985). Para poder separar espectralmente las diversas componentes de las series producidas por el modelo alineal, es necesario integrarlo por un tiempo mayor al batido (período correspondiente a la diferencia de frecuencias) de los diversos pares de componentes.

Una alternativa complementaria es el uso de un modelo unidimensional y linealizado (De León 1988, De León y Ripa 1989, Ripa 1990). La aproximación lineal permite estudiar cada componente por separado, e inclusive, trabajar directamente en el espacio de frecuencias, para obtener amplitudes y fases en forma inmediata. Este modelo facilita la variación de parámetros. Claramente, el modelo de este trabajo no reemplaza a los bidimensionales, pero sus resul-

tados pueden ser utilizados para una inicialización más eficiente de éstos.

El resto de este trabajo está organizado en la forma siguiente: En §2 se desarrolla el modelo; en §3 y un Apéndice se discute la solución armónica; en §4 se presenta un ejemplo muy sencillo; en §5 se muestra la forma de obtener la solución numérica del caso general; en §6 se presentan los datos y se les compara, en §7 y §8, con las predicciones del modelo de la marea astronómica y con la producida por el Océano Pacífico. Los resultados para la banda semidiurna y diurna se analizan con mayor detalle en §9 y §10 y las conclusiones generales se presentan en §11.

## 2. ECUACIONES DE EVOLUCION

Sean  $x$  e  $y$  las coordenadas a lo largo y ancho del golfo, definidas tal que aumentan hacia la boca y hacia el continente (Figura 1), y  $u$  y  $v$  las componentes de la velocidad en esas mismas direcciones; definimos los vectores  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,  $\mathbf{u} = (u, v)$  y  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ . La altura de la superficie del mar desde el fondo es  $h(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x}, t)$ , donde  $h$  es la profundidad media. Las ecuaciones de evolución para  $\eta(\mathbf{x}, t)$  y  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , son (v. gr. Hendershott 1981)

$$\partial_t \eta + \partial_x((h + \eta)u) + \partial_y((h + \eta)v) = 0, \quad (2.1a)$$

$$(\partial_t + u\partial_x + v\partial_y)u - fv + g\partial_x \eta = -C_f h^{-1} |u| u - \partial_x \phi, \quad (2.1b)$$

$$(\partial_t + u\partial_x + v\partial_y)v + fu + g\partial_y \eta = -C_f h^{-1} |v| v - \partial_y \phi, \quad (2.1c)$$

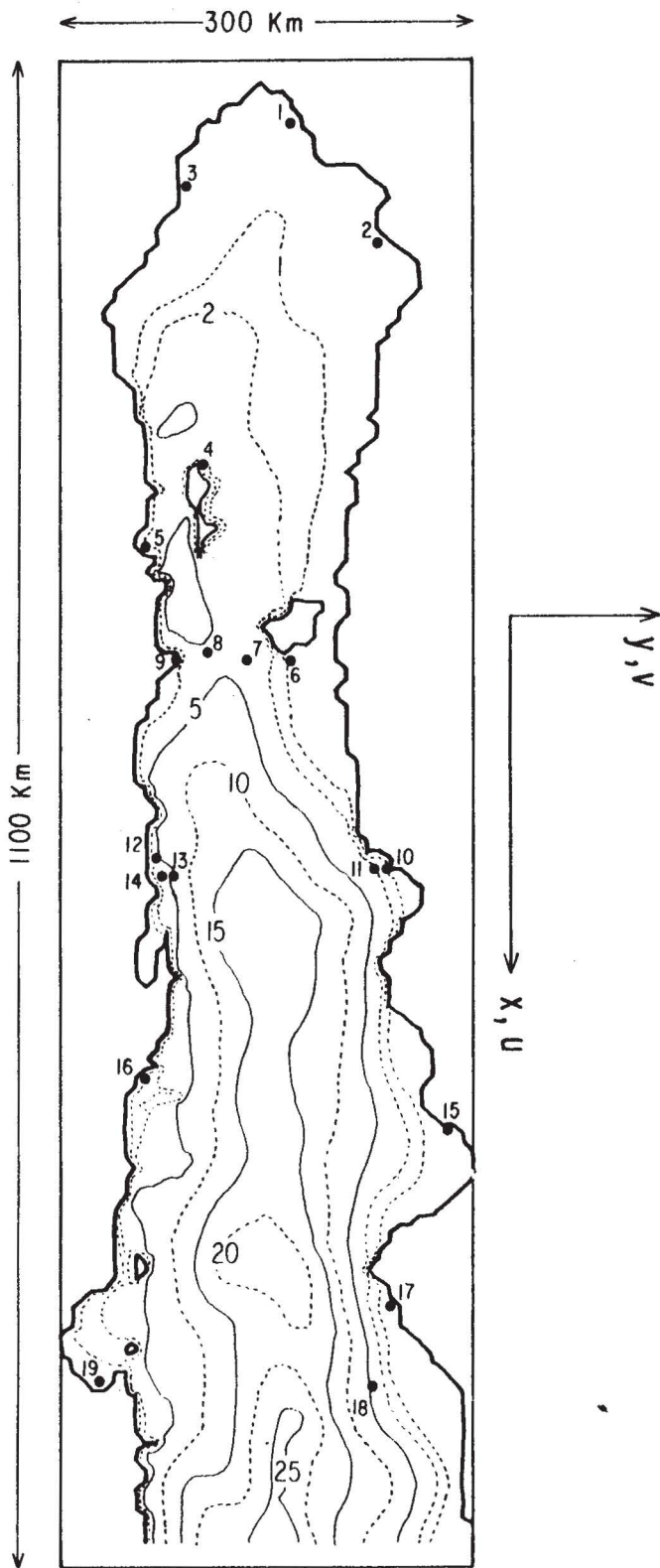


Fig. 1. Ejes coordenados y batimetría del Golfo de California. Los contornos, en cientos de metros, están indicados por números grandes. Las estaciones mareográficas están señaladas por puntos gruesos; los números pequeños corresponden a los de la Tabla 2.

donde  $f(x,y)$  es el parámetro de Coriolis,  $C_f$  es un coeficiente de fricción con el fondo y  $\varphi(x,t)$  es el potencial generador de mareas. La ecuación de ambas costas laterales y la condición de flujo normal nulo en ellas se expresan en la forma

$$y = y_j(x) \Rightarrow v(x, y_j(x), t) = u(x, y_j(x), t) y'_j(x) \quad (j = 1, 2), \quad (2.2)$$

donde la prima significa diferenciación con respecto a  $x$ . El problema dependiente del tiempo está bien planteado especificando las condiciones iniciales  $\eta(x,0)$  y  $u(x,0)$  y una condición adecuada en la boca del golfo.

Para desarrollar el modelo unidimensional, se deben hacer una serie de aproximaciones. En primer lugar,

- i) Despreciamos los términos alineales  $\nabla \cdot (\eta u)$  y  $u \cdot \nabla u$ .
- ii) Reemplazamos  $C_f h^{-1} |u|$  por una constante  $\lambda$ .
- iii) Despreciamos la aceleración de Coriolis,  $-fv$ , frente a los otros términos en (2.1b).

De esta forma (2.1a) y (2.1b) se reducen a

$$\partial_t \eta + \partial_x (hu) + \partial_y (hv) = 0, \quad (2.3a)$$

$$\partial_t u + g \partial_x \eta + \lambda u = -\partial_x \varphi; \quad (2.3b)$$

nótese que (2.1c) no es necesaria en este nivel, aunque haremos uso de ella más adelante. En segundo lugar

iv) Reemplazamos a  $h(x,y)$  en (2.3a) por su media transversal, en cada  $x$ ,

$$\bar{h}(x) = \frac{1}{W(x)} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} h(x,y) dy, \quad (2.4)$$

donde  $y = y_1(x)$  y  $y = y_2(x)$  definen las costas laterales del golfo y

$$W(x) = y_2(x) - y_1(x) \quad (2.5)$$

es su anchura. Los campos  $\bar{u}(x,t)$  y  $\bar{\eta}(x,t)$  se definen en forma similar, es decir, por medio de (2.4), pero con  $u$  ó  $\eta$ , en vez de  $h$ . Substituyendo  $h$  por  $\bar{h}(x)$  en (2.3), podemos integrar estas dos ecuaciones en  $y$ , para cada valor fijo de  $x$ . De (2.3a) resulta

$$W \partial_t \bar{\eta} + \int_{y_1}^{y_2} \partial_x (\bar{h}u) dy + \bar{h}v \Big|_{y_1}^{y_2} = 0. \quad (2.6)$$

Nótese que no podemos sacar el operador  $\partial_x$  fuera de la integral, porque  $y_1$  y  $y_2$  son funciones de  $x$ . De acuerdo con la Regla de Leibnitz, para todo  $\mu(x,y)$

$$\int_{y_1}^{y_2} \partial_x \mu \, dy = \partial_x \int_{y_1}^{y_2} \mu \, dy - y_2'(x) \mu(x, y_2(x)) + y_1(x) \mu(x, y_1(x)) = \partial_x (W\bar{\mu}) - (\mu y') \Big|_{y_1}^{y_2}, \quad (2.7)$$

donde, para cualquier variable función exclusivamente de  $x$  la prima indica diferenciación. Ya que  $\int \bar{h} \, u \, dy \equiv \bar{h} \int u \, dy = W \bar{h} \bar{u}$  la integración de (2.3a) resulta en

$$W \partial_t \bar{\eta} + \partial_x (W \bar{h} \bar{u}) = (\bar{h} u y' - \bar{h} v) \Big|_{y_1}^{y_2}. \quad (2.8)$$

Finalmente, la condición de flujo normal nulo en cada costa, (2.2), implica que el lado derecho de (2.8) es idénticamente nulo.

Por otra parte integrando (2.3b) en  $y$  obtenemos

$$W(\partial_t \bar{u} + \lambda \bar{u} + g \partial_x \bar{\eta} - \phi) = g[(\eta - \bar{\eta}) y'] \Big|_{y_1}^{y_2}, \quad (2.9)$$

donde  $\phi = -W^{-1} \int \partial_x \phi \, dy$ . Nótese que de la integración de  $g \partial_x \eta$  resulta el término  $g \partial_x (W \bar{\eta})$ , escrito como  $W g \partial_x \bar{\eta}$ , en el lado izquierdo de (2.9), más  $g \bar{\eta} W' \equiv g \bar{\eta} (y_2' - y_1')$ , en el derecho.

Por último

v) Despreciamos la diferencia entre  $\eta(x,y,t)$  y  $\bar{\eta}(x,t)$  en el lado derecho de (2.9).

Con todas estas aproximaciones, de (2.8) y (2.9) obtenemos las siguientes ecuaciones para la evolución de los nuevos campos  $\bar{u}(x,t)$  y  $\bar{\eta}(x,t)$

$$\partial_t \bar{\eta} + W^{-1} \partial_x (W \bar{h} \bar{u}) = 0, \quad (2.10a)$$

$$\partial_t \bar{v} + \lambda \bar{v} + g \partial_x \bar{\eta} = \phi. \quad (2.10b)$$

Estas ecuaciones diferenciales deben ser suplementadas por la condición de no flujo en la cabeza del golfo

$$W \bar{h} \bar{u} = 0, \text{ en } x = 0 \quad (2.11)$$

(que implica  $\bar{u}(0,t) = 0$  si y sólo si  $W(0) \bar{h}(0) \neq 0$ ) y la condición en la boca

$$\bar{\eta}(L,t) = \eta_0(t). \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12) constituyen el modelo unidimensional. De ellas, multiplicando (2.10a) por  $g \bar{\eta}$ , (2.10b) por  $W \bar{h} \bar{u}$  y sumando, se obtiene la siguiente ley de conservación:

$$\partial_t \mathcal{E} + \partial_x \mathcal{F} = \mathcal{T} - \mathcal{D}, \quad (2.13)$$

donde

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho W (g \bar{\eta}^2 + \bar{h} \bar{u}^2) \quad (2.14a)$$

es la energía mecánica (potencial más cinética) por unidad de longitud a lo largo del golfo,  $\rho$  es la densidad del agua,

$$\mathcal{F} = \rho W g \bar{h} (\bar{\eta} \bar{u}) \quad (2.14b)$$

representa el flujo de energía

$$\mathcal{T} = \rho W \bar{h} (\bar{u} \phi) \quad (2.14c)$$

es el trabajo realizado por la fuerza astronómica y

$$\mathcal{D} = \lambda \rho W \bar{h} \bar{u}^2 \quad (2.14d)$$

es la disipación de la marea debida a la fricción en el fondo. Los signos del flujo  $\mathcal{F}$  y del trabajo externo  $\mathcal{T}$  no están definidos *a priori*: dependen de la correlación entre la corriente  $\bar{u}$  y la presión  $g \bar{\eta}$  o el forzamiento  $\phi$ , respectivamente.

### 3. SOLUCION ARMONICA

Como las ecuaciones del modelo son lineales, y el tiempo  $t$  no aparece explícitamente, podemos trabajar con cada componente armónica en forma separada. La formulación compleja es presentada en el Apéndice.

Para cada componente armónica del forzamiento,

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= \Re e[\Phi(x) e^{-i\omega t}] \\ \eta_0(t) &= \Re e[\eta_b e^{-i\omega t}] \end{aligned} \quad (3.1)$$

escribimos la solución del modelo unidimensional como

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(x,t) &= \Re e[Z(x) e^{-i\omega t}] \\ \bar{u}(x,t) &= \Re e[U(x) e^{-i\omega t}], \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $Z(x)$  y  $U(x)$  son complejos. Reemplazando en las ecuaciones del modelo (2.10) y usando (A.4) resulta

$$\begin{aligned} -i\omega Z + W^{-1}(W\bar{h}U)' &= 0, \\ i(\omega + i\lambda)U + gZ' &= \Phi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

A su vez, las condiciones de contorno (2.11) y (2.12) se transforman en

$$\begin{aligned} W\bar{h}U &= 0 \text{ en } x = 0, \\ Z &= \eta_b \text{ en } x = L. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Estas ecuaciones son lineales; los términos inhomogéneos (no proporcionales a  $Z$  ó  $U$ ) son  $\Phi$  en (3.3) -que representa el forzamiento astronómico- y  $\eta_b$  en (3.4) -que representa el forzamiento oceánico, en la boca. Es fácil descomponer la solución  $(Z, U)$  en una parte debida al forzamiento astronómico, independiente de  $\eta_b$ , y una parte debida al forzamiento en la boca, independiente de  $\Phi$ , es decir

$$Z(x) = Z_a(x) + Z_b(x), \quad U(x) = U_a(x) + U_b(x), \quad (3.5)$$

donde  $(Z_a, U_a)$  satisfacen

$$\begin{cases} -i\omega Z_a + W^{-1}(W\bar{h}U_a)' = 0 \\ -i(\omega + i\lambda)U_a + gZ_a' = \Phi \end{cases} \quad 0 < x < L, \\ W\bar{h}U_a = 0 \text{ en } x = 0, \\ Z_a = 0 \text{ en } x = L, \end{cases} \quad (3.6)$$

mientras que  $(Z_b, U_b)$  cumplen

$$\begin{cases} -i\omega Z_b + W^{-1}(W\bar{h}U_b)' = 0 \\ -i(\omega + i\lambda)U_b + gZ_b' = 0 \end{cases} \quad 0 < x < L, \\ W\bar{h}U_b = 0 \text{ en } x = 0, \\ Z_b = \eta_b \text{ en } x = L. \end{cases} \quad (3.7)$$

Para finalizar esta sección, obtendremos la forma de la ley de conservación de energía, (2.13), para una componente armónica. Ya que esa ley involucra sólo términos cuadráticos en los campos, de acuerdo con (A.5) hay dos contribuciones: una oscilante con frecuencia  $2\omega$  y la otra constante, igual al valor medio. De (3.3)

$$-2i\omega \frac{1}{2} W(gZ^2 + \bar{h}U^2) + (gW\bar{h}ZU)' = W\bar{h}U\Phi - \lambda W\bar{h}U^2, \quad (3.8)$$

que corresponde a la parte oscilante de (2.13), y

$$(gW\bar{h} \langle Zu \rangle' = W\bar{h} \langle U\Phi \rangle - \lambda W\bar{h} \langle U^2 \rangle), \quad (3.9)$$

que es el valor medio de esa misma ley (ver A.6).

#### 4. EL CANAL DE SECCION HOMOGENEA

Consideremos un caso muy sencillo:  $W$  constante (y arbitrario, ya que desaparece de (3.3)) y  $\bar{h}(x)$  también igual a una constante  $\bar{h}_0$ . De León (1988) presenta otro caso con solución analítica, donde  $\bar{h}$  y  $W$  son funciones suaves de  $x$ . Vamos a suponer que  $\Phi(x)$  es igual a una constante  $\Phi_a$ , es decir, la fuerza astronómica no varía con la posición, aunque sí con el tiempo. Empezando por (3.7), es fácil ver que tanto  $Z_b$  como  $U_b$  son una suma de senos y cosenos de  $kx$ , donde

$$k^2 := \frac{\omega(\omega + i\lambda)}{gh_0}. \quad (4.1)$$

La condición en la cabeza,  $U_b = 0$  en  $x = 0$ , implica que  $U_b$  es igual a  $u_0 \text{sen}kx$ ;  $Z_b$  se obtiene entonces fácilmente de la primera ecuación en (3.7) y, ya que tiene que ser igual a  $\eta_b$  en  $x = L$ , se determina el coeficiente  $u_0$ . El resultado final es

$$Z_b(x) = \eta_b \frac{\text{cos}kx}{\text{cos}kL}, \quad (4.2)$$

$$U_b(x) = \frac{ig\eta_b k}{\omega + i\lambda} \frac{\text{sen}kx}{\text{cos}kL}.$$

En cuanto a la solución de (3.6), vemos que las dos primeras ecuaciones se satisfacen para  $Z_a = 0$  y  $U_a = i\Phi_a/(\omega + i\lambda)$ . Sin embargo, esta solución no satisface la condición de flujo normal nulo en la cabeza ( $U_a = 0$  en  $x = 0$ ): debemos agregarle, por lo tanto, una solución de la ecuación homogénea (la de senos y cosenos de  $kx$ ) tal que se cumplan ambas condiciones de contorno. El resultado final es

$$Z_a(x) = \frac{\Phi_a}{gk} \frac{\text{sen}k(x-L)}{\text{cos}kL}, \quad (4.3)$$

$$U_a(x) = \frac{i\Phi_a}{\omega + i\lambda} \left[ 1 - \frac{\text{cos}k(x-L)}{\text{cos}kL} \right].$$

Recuérdese que  $k$  es un número complejo (excepto para el caso particular sin fricción,  $\lambda = 0$ ) y por lo tanto también lo serán las funciones  $\text{sen}kx$  y  $\text{cos}kx$ . Si la fricción es suficientemente débil, tal que  $\lambda \ll \omega$ , entonces de (4.1)

$$\text{resulta } \Re e[k] = \frac{\omega}{\sqrt{gh_0}} \text{ e } \text{Im}[k] = \frac{\lambda}{2\sqrt{gh_0}} \text{ el}$$

denominador  $|\text{cos}kL|$  será muy pequeño, y la respuesta a un forzamiento dado muy grande, cuando  $\Re e[kL] \approx \pi/2, 3\pi/2, \dots$ , es decir, cuando la longitud del golfo corresponde a un número impar de cuartos de longitud de onda (definida por  $2\pi/\Re e[k]$ ); se presenta el fenómeno de *resonancia*.

Los resultados de la Tabla 1 fueron calculados a partir de una batimetría del Golfo de California, con una malla de

6.62 km x 6.62 km; una grilla de 162 x 40 celdas cubre completamente el golfo. El punto central de la boca del golfo está aquí situado en 24°N, 108°30'W y la orientación del eje longitudinal, el eje x, es de 146.48° respecto del Norte, en el sentido de las manecillas del reloj.

Tabla 1

Golfo de California

volumen	$1.14 \times 10^{14} \text{ m}^3$
área superficial	$1.56 \times 10^{11} \text{ m}^2$
longitud L	$1.07 \times 10^6 \text{ m}$
$W_0 = \text{área}/L$	$1.46 \times 10^5 \text{ m}$
$h_0 = \text{vol.}/\text{área}$	$7.29 \times 10^2 \text{ m}$

Tomando  $h_0$  como la profundidad media (volumen/área) resulta  $\sqrt{gh_0} = 84.5 \text{ ms}^{-1}$  y  $4L/\sqrt{gh_0} = 14\text{h}$ , que está cerca del período de las componentes semidiurnas; esperamos entonces algo cercano a resonancia para esta banda de componentes armónicas (aunque por supuesto el Golfo de California no tiene profundidad y ancho constante ni está forzado por su valor de  $\eta$  en la boca).

### 5. SOLUCION NUMERICA

En el caso más general, cuando  $\bar{h}$ ,  $W$ , y/o  $\Phi$  son variables, la solución debe encontrarse en forma numérica. Para eso, definamos una discretización, con  $Z$  y  $U$  en puntos alternados, por medio de los arreglos complejos

$$\left. \begin{aligned} Z_j &:= Z(x) \text{ en } x=(j-1/2)\Delta x \\ U_j &:= U(x) \text{ en } x=(j-1)\Delta x \end{aligned} \right\} j = 1 \dots N, \quad (5.1)$$

donde  $\Delta x = L/(N-1/2)$ , de manera que  $Z_N$  corresponda a la elevación en la boca y  $U_1$  a la velocidad en la cabeza. Asimismo definimos los arreglos reales

$$\left. \begin{aligned} W_j &:= W(x) \text{ en } x=(j-1/2)\Delta x \\ U_j &:= W(x)\bar{h}(x) \text{ en } x=(j-1)\Delta x \end{aligned} \right\} j = 1 \dots N, \quad (5.2)$$

Finalmente, vamos a usar un arreglo complejo auxiliar

$$T_j = U_j A_j \quad (j = 1 \dots N). \quad (5.3)$$

Empecemos por la solución de la parte forzada en la boca, es decir, el sistema (3.7). En primer lugar hacemos

$$T_1 = 0, Z_1 = 1. \quad (5.4)$$

La primer ecuación no es más que la condición de contorno en la cabeza, (3.13c) (ver (5.1) a (5.3) para  $j = 1$ ); la segunda no corresponde al valor correcto de  $Z_1$ , pero, como veremos más adelante, ésto no importa. Partiendo de (5.4) se obtienen los demás valores en la forma

$$\begin{aligned} & j = 1 \\ & T_{j+1} = T_j + i\omega W_j Z_j \Delta x \\ & U_{j+1} = T_{j+1} / A_{j+1} \\ & Z_{j+1} = Z_j + i(\omega + i\lambda) U_{j+1} \Delta x g^{-1} \\ & j \rightarrow j+1 \\ & \text{No} \rightarrow \boxed{¿j > N?} \rightarrow \text{Si} \rightarrow \text{Fin} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Nótese que la segunda y cuarta ecuación no son más que la discretización, en diferencias finitas centradas, de (3.13a) y (3.13b), respectivamente. Al llegar a este punto,  $Z_N$  no será, en general, igual al valor requerido  $\eta_b$ . Esto no es problema ya que como  $Z$  y  $U$  satisfacen ecuaciones lineales y homogéneas (salvo en lo que compete a la condición en la boca), entonces si  $(Z_j, U_j)$  es una solución ( $\mu Z_j, \mu U_j$ ) también lo es, para cualquier constante (compleja)  $\mu$ . El valor de  $\mu$  que transforma a la solución de (5.4)/(5.5) en la correcta (es decir, tal que satisfaga la condición en la boca) es  $\eta_b / Z_N$ ; luego la solución se completa haciendo

$$U_j^b \leftarrow U_j \eta_b / Z_N \quad (j = 2 \dots N), Z_j^b \leftarrow Z_j \eta_b / Z_N \quad (j = 1 \dots N). \quad (5.6)$$

La solución de la parte debida al forzamiento astronómico es también muy fácil de obtener: primero se construye una solución de la inhomogénea partiendo de

$$T_1 = 0, Z_1 = 0, \quad (5.7)$$

en vez de (5.4), y siguiendo por

$$\begin{aligned} & j = 1 \\ & T_{j+1} = T_j + i\omega W_j Z_j \Delta x \\ & U_{j+1} = T_{j+1} / A_{j+1} \\ & Z_{j+1} = Z_j + [i(\omega + i\lambda) U_{j+1} + \Phi_{j+1}] \Delta x g^{-1} \\ & j \rightarrow j+1 \\ & \text{No} \rightarrow \boxed{¿j > N?} \rightarrow \text{Si} \rightarrow \text{Fin} \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde  $\Phi_{j+1} = \Phi(j\Delta x)$  ( $j = 1, \dots, N-1$ ), que corresponde a la discretización, por diferencias finitas centradas, de (3.12a) y (3.12b). Esta solución no dará, en general, el valor deseado en la boca,  $Z_N = 0$ . Digamos que el valor de  $Z_N$  correspondiente a esta primera vuelta sea  $v$ ; a ésta solución debe sumársele la obtenida por el procedimiento (5.4) a (5.6) con  $\eta_b = -v$ . La suma de esta última con la de (5.7)/(5.8) constituye la solución discreta ( $Z_j^a, U_j^a$ ) del sistema completo (3.6).

Para finalizar esta sección veamos si la aproximación en diferencias finitas respeta las leyes de conservación (3.8) y (3.9). De las discretizaciones (5.5) ó (5.8) se puede obtener

$$-2i\omega \frac{1}{2} [W_j g Z_j^2 + A_{j+1} U_{j+1}^2] + g(Z_{j+1} T_{j+1} - Z_j T_j) \Delta x = \Phi_{j+1} T_{j+1} - \lambda A_{j+1} U_{j+1}^2 \quad (5.9)$$

para la parte oscilante con frecuencia  $2\omega$ , y

$$g \Re(Z_{j+1}^* T_{j+1} - Z_j^* T_j) / \Delta x = \Re(\Phi_{j+1} T_{j+1}) - \lambda A_{j+1} |U_{j+1}|^2, \quad (5.10)$$

para el valor medio; éstas son las versiones discretizadas de (3.8) y (3.9); las ecuaciones globales de conservación de energía se obtienen sumando (5.9) y (5.10) desde  $j = 1$  hasta  $N-1$ , y multiplicando por  $\Delta x$ . En conclusión, vemos que la discretización utilizada sí respeta la ley de conservación de energía, tanto en su parte fluctuante como en el promedio temporal. Nótese que los flujos de energía,  $\frac{1}{2} g A_j Z_j U_j$  y  $\frac{1}{2} g A_j \Re(Z_j^* U_j)$ , involucran valores de  $Z$  y  $U$  en posiciones distantes en  $\Delta x/2$ .

## 6. DATOS

Las observaciones corresponden a las componentes armónicas correspondientes a 19 estaciones en el Golfo de California, más una (Mazatlán) fuera de él, pero cerca de su boca. En la Tabla 2 se presentan el nombre, ubicación y duración del registro de cada una de las estaciones, así como la sigla de la institución responsable (Scripps Institution of Oceanography SIO, Universidad Nacional Autónoma de México UNAM, y Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada CICESE).

El análisis en componentes de marea es realizado en forma rutinaria por la sección de Mareografía del CICESE, en forma individual para cada estación e incluyendo una cantidad de componentes (etiquetadas por su frecuencia  $\omega$ ) que depende de la duración del registro. El máximo número de componentes es 67, correspondientes a 6 de período largo, 21 y 18 en las bandas diurna y semidiurna respectivamente, y 22 de período corto. La columna  $\sqrt{\langle \eta^2 \rangle}$  en la Tabla 2

corresponde a la raíz de la predicción de dicho análisis para el cuadrado de la elevación, calculada en la forma

$$\langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\omega} |O_a(\omega)|^2 \quad (6.1)$$

donde  $O_a(\omega)$  es la amplitud compleja de la marea en la estación "a" correspondiente a la frecuencia  $\omega$ ; el factor 1/2 es del promedio temporal, indicado en (A.6).

Estos datos provienen, entonces, de tomar todas las frecuencias para cada estación en forma independiente. Con el modelo podemos comparar todas las estaciones para cada frecuencia en forma independiente. De esta forma, se puede establecer si la distribución espacial de las observaciones es compatible con la dinámica representada por el modelo, lo que posibilita un control de calidad de dicho análisis.

## 7. MAREA ASTRONOMICA

En una primera aplicación del modelo, presentamos el cálculo de la marea astronómica, (3.6), para las componentes cuyo potencial tabula Hendershott (1981); el valor medio de fuerza de marea a lo largo del Golfo,  $\Phi_a$ , es presentado en la Tabla 3. El cálculo fue hecho utilizando el algoritmo (5.7)/(5.8) y agregando una solución (5.4)/(5.5) de manera de lograr  $Z_N = 0$ . El coeficiente de fricción utilizado es  $\lambda = 1.7 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ .

La raíz de la elevación cuadrática media corresponde a un promedio tanto temporal, en un período, como aritmético, sobre las 19 estaciones, es decir,

$$\langle \eta^2 \rangle = \begin{cases} \frac{1}{19} \sum_{a=1}^{19} \frac{1}{2} |O_a|^2 & (\text{Observaciones}) \\ \frac{1}{19} \sum_{a=1}^{19} \frac{1}{2} |M_a|^2 & (\text{Modelo}) \end{cases} \quad (7.1)$$

donde  $M_a$  es la amplitud producida por el modelo, interpolada al lugar de la estación "a". Es evidente que la marea astronómica es muy pequeña frente a la observada, se confirma que la más importante es la marea de oscilación. Sin embargo, es interesante retener esta tabla para comparar, más adelante, a la marea astronómica con la diferencia entre las observaciones y la predicción del modelo para la marea forzada en la boca.

## 8. LA MAREA FORZADA POR EL OCEANO PACIFICO

Con base en los resultados de la sección anterior, vamos a ignorar el forzamiento directo astronómico, para concentrarnos en el sistema (3.6), cuya solución numérica es un múltiplo (complejo) de la solución de (5.4)/(5.5). En este cálculo hay tres parámetros libres: las partes real e imaginaria de la elevación media en la boca,  $\eta_b$ , y el coc-

Tabla 2

	Nombre	Lat. N	Lon. W	Dur. años	$\sqrt{\langle \eta^2 \rangle}$ (cm)	Inst.
1	Santa Clara	31.67	114.50	0.5	159.6	SIO
2	Puerto Peñasco	31.30	113.55	1	140.2	UNAM
3	San Felipe	31.02	114.82	1	137.8	CICESE
4	Scripps No. 8	29.58	113.58	0.5	90.4	SIO
5	B. Los Angeles	28.95	113.55	8	63.8	CICESE
6	Scripps No. 5	28.78	112.30	1	40.9	SIO
7	Scripps No. 6	28.67	112.53	0.5	42.3	SIO
8	Scripps No. 7	28.58	112.78	0.5	46.2	SIO
9	Scripps No. 4	28.43	112.92	1	45.5	SIO
10	Guaymas	27.93	110.90	26	31.3	UNAM
11	Scripps No. 1	27.88	110.97	1	28.3	SIO
12	Santa Rosalía	27.25	112.20	1	29.4	CICESE
13	Scripps No. 2	27.22	112.03	1	27.1	SIO
14	Isla San Marcos	27.17	112.08	0.5	29.6	CICESE
15	Yavaros	26.70	109.52	1	33.1	UNAM
16	Loreto	26.02	111.37	5.7	29.3	CICESE
17	Topolobampo	25.60	109.05	17	37.5	UNAM
18	Scripps No. 3	25.03	108.90	1	34.7	SIO
19	La Paz	24.17	110.35	21	31.9	UNAM
20	Mazatlán	23.20	106.42	18.6	37.5	UNAM

Tabla 3

Componente	Banda	$ \Phi_a $ ( $10^{-8} \text{ ms}^{-2}$ )	$\sqrt{\langle \eta^2 \rangle}$ (cm)	
			Obser.	Astr.
SSA	1/2 año	3.1	3.44	0.12
MM	1 mes	3.4	1.05	0.14
MF	1/2 mes	6.6	2.56	0.29
P <sub>1</sub>	1 día	7.7	6.92	0.24
O <sub>1</sub>	1 día	17	14.87	0.52
K <sub>1</sub>	1 día	23	22.86	0.71
M <sub>2</sub>	1/2 día	44	52.97	1.42
S <sub>2</sub>	1/2 día	21	30.75	0.67
N <sub>2</sub>	1/2 día	8.5	13.59	0.27
K <sub>2</sub>	1/2 día	5.6	9.00	0.20

ficiente de fricción,  $\lambda$ . Estos parámetros son elegidos por un criterio de cuadrados mínimos, comparando las observaciones en las distintas estaciones (para una frecuencia dada)  $O_a$ , y las predicciones del modelo en los mismos lugares,  $M_a$ . En cuanto a estas predicciones, podemos utilizar una interpolación de los  $Z_j$  (a las posiciones de las estaciones), pero también vamos a intentar la siguiente modificación *ad hoc*:

El modelo unidimensional (2.10) fue deducido a partir de (2.1a) y (2.1b); la tercera ecuación (2.1c) no ha sido utilizada hasta el momento. Si suponemos que en ésta podemos despreciar los términos que involucran a la velocidad transversal  $v$ , el balance geostrofico resultante nos sugiere la siguiente mejora

$$fu + g\partial_y \eta \approx 0 \Rightarrow \eta(x, y, t) \approx \bar{\eta}(x, t) - gf^{-1} \bar{u}(x, t)(y - \bar{y}(x)); \quad (8.1)$$

el parámetro de Coriolis puede ser escrito en la forma

$$f(x) = f_0 = \beta x, \quad (8.2)$$

donde  $f_0$  y  $\beta$  son constantes, o simplemente  $f = f_0$

Elegir el valor de  $\eta_b$  es equivalente a elegir  $Z_I$ , ya que el modelo es lineal. En consecuencia, el procedimiento adoptado fue resolver (5.4)/(5.5), que supone  $Z_I = 1$ , y luego multiplicar a todos los ( $Z_j, U_j$ ) por un factor común (complejo)  $\mu$ . Una posibilidad es elegir  $\mu$  de manera que  $\eta_b$  coincida con las observaciones en Mazatlán. Sin embargo, ésto implicaría darle mayor peso a esta estación, frente a los otros datos. Por lo tanto, se decidió dejar a los datos de Mazatlán fuera del proceso de cálculo de  $\mu$ , para ser utilizados en una comparación *a posteriori*. El  $\mu$  óptimo fue elegido por el criterio

$$\varepsilon_c^2(\lambda) = \frac{\text{Min}}{\mu} \frac{\sum_a |O_a - \mu M_a|^2}{\sum_a |O_a|^2} \Rightarrow \mu = \frac{\sum_a M_a^* O_a}{\sum_a |M_a|^2} \quad (8.3)$$

También usaremos el criterio alternativo de ajustar amplitudes y fases independientemente, es decir,

$$\varepsilon_\lambda^2(\lambda) = \frac{\text{Min}}{\mu} \frac{\sum_a (|O_a| - |\mu| |M_a|)^2}{\sum_a |O_a|^2} \Rightarrow |\mu| = \frac{\sum_a |M_a| |O_a|}{\sum_a |M_a|^2}, \quad (8.4a)$$

y

$$\varepsilon_f^2(\lambda) = \frac{\text{Min}}{\mu} \frac{\sum_a |O_a|^2 (\alpha(O_a) - \alpha(\mu) - \alpha(M_a))^2}{\sum_a |O_a|^2} \Rightarrow \alpha(\mu) = \frac{\sum_a |O_a|^2 (\alpha(O_a) - \alpha(M_a))}{\sum_a |O_a|^2} \quad (8.4b)$$

donde  $\alpha(q)$  es la fase del número complejo  $q$  (es decir,  $q = |q| \exp(i\alpha(q))$ ).

Debemos hacer un par de aclaraciones respecto de los criterios de cuadrados mínimos utilizados para obtener el mejor ajuste del modelo a las observaciones. En primer lugar, la normalización de los  $\varepsilon^2$ , el denominador  $\sum |O|^2$  en las tres definiciones, no influye en absoluto en la obtención del valor óptimo de  $\mu$ . Se podría haber utilizado para los denominadores las varianzas espaciales de las  $O_a$ ,  $|O_a|$  y  $\alpha(O_a)$  (v. gr., De León 1988); los valores óptimos de  $\mu$  y  $\lambda$  serían idénticos, aunque el valor correspondiente de  $\varepsilon^2$  fuera diferente. La normalización utilizada aquí es tal que  $100x(1 - \varepsilon_c^2)$  es el porcentaje de la varianza temporal

explicada por el ajuste (recordar A.6). En segundo lugar, si los residuos  $O_a - \mu M_a$  son pequeños entonces se debe cumplir

$$\varepsilon_c^2 \approx \varepsilon_A^2 + \varepsilon_F^2, \quad (8.5)$$

ya que si  $A_R + iA_I = |A| e^{i\alpha}$  entonces  $(dA_R)^2 + (dA_I)^2 = (d|A|)^2 + |A|^2 (d\alpha)^2$ .

Como expresábamos en la introducción, la ventaja de un modelo sencillo como éste es la posibilidad de hacer fácil y rápidamente un estudio exhaustivo del espacio de parámetros, determinando no sólo cual es el punto óptimo (mayor coincidencia entre modelo y observaciones) sino también la sensibilidad de este ajuste a los cambios de estos parámetros. Esto está ilustrado en la Tabla 4 donde se presenta el valor de  $\varepsilon_c^2$  para las cuatro componentes principales (dos semidiurnas y dos diurnas), con 24 diferentes versiones del modelo, que resultan de tomar  $\bar{h}$  como función de  $x$  o como constante ( $h_0 = 729$  m); de hacer otro tanto con el ancho  $W$ ; de incluir o no la corrección transversal indicada en (8.1), con  $f = f_0$  ó con  $f = f_0 + \beta x$ ; y de incluir o no la disipación ( $\lambda = 0$  ó  $\lambda = 2.0 \times 10^{-5} s^{-1}$  que es el valor óptimo para la M2). Estos ajustes corresponden a las 19 estaciones de la Tabla 2, y las diferentes opciones se indican por una x en la primera columna de la Tabla 4.

Resalta en la Tabla 4 un muy buen ajuste del modelo a las observaciones, con errores mínimos iguales a 1.2%, 1.6%, 0.3% y 0.8% para la M2, S2, O1 y K1, pero se observa un comportamiento muy diferente para las componentes semidiurnas y diurnas. Para las primeras, el ajuste empeora sensiblemente de su valor óptimo ( $\varepsilon^2 \sim 1\%$ ) si no se incluye la fricción ( $\varepsilon^2 \sim 4\%$ ), ídem con las variaciones del ancho ( $\varepsilon^2 \sim 10\%$ ), e ídem con las de profundidad ( $\varepsilon^2 \sim 40\%$ ); aunque el ajuste empeora al omitir al efecto- $\beta$  o todo el efecto de Coriolis, ésto no es muy importante. Por el contrario, el ajuste de las componentes diurnas muestra mucho menos sensibilidad a la variación de parámetros, con errores de tan sólo 1.1% y 1.7% para un modelo con profundidad y ancho constantes, sin Coriolis y sin fricción (Caso 9). En resumen, las cuatro componentes principales muestran sensibilidad, en orden de importancia, a las variaciones de la profundidad, ídem del ancho, a la fricción y al efecto de Coriolis; esta sensibilidad es notablemente más marcada para las semidiurnas que para las diurnas. Ambas bandas se analizan con más detalle en las dos secciones siguientes.

## 9. BANDA SEMIDIURNA

En la Figura 2 se muestra el error del ajuste,  $\varepsilon^2(\lambda)$ , para la componente más energética en el Golfo de California, la M2, utilizando el criterio (8.3) u (8.4). En la misma figura se muestra la disipación total, promediado en un ciclo de marea, calculado con base en (5.10) como

$$D_T = \frac{1}{2} \rho \lambda \sum_{j=1}^N A_j |U_j|^2 \equiv -\frac{1}{2} \rho g A_N \Re e(Z_N^* U_N). \quad (9.1)$$



Tabla 4  
 $\epsilon_c^2$  (%)

	$\bar{h}(x)$	$W(x)$	$f_0$	$\beta$	$M_2$		$S_2$		$O_1$		$K_1$	
					$\lambda$ (s <sup>-1</sup> )		$\lambda$ (s <sup>-1</sup> )		$\lambda$ (s <sup>-1</sup> )		$\lambda$ (s <sup>-1</sup> )	
					0	$2 \times 10^{-5}$	0	$2 \times 10^{-5}$	0	$2 \times 10^{-5}$	0	$2 \times 10^{-5}$
1	x	x	x	x	4.4	1.2	4.9	1.6	0.3	0.6	0.8	1.0
2	x	x	x		4.5	1.2	5.0	1.7	0.3	0.6	0.8	1.0
3	x	x			3.6	1.6	4.2	2.4	0.4	0.6	0.9	1.1
4	x		x	x	13.8	11.0	14.5	12.2	0.4	0.8	1.1	1.5
5	x		x		14.2	11.3	14.8	12.5	0.4	0.9	1.1	1.5
6	x				12.8	11.3	13.8	12.9	0.4	0.8	1.1	1.5
7			x	x	40.1	38.4	47.6	45.8	1.1	1.3	1.7	1.9
8			x		40.1	38.4	47.6	45.8	1.1	1.3	1.7	1.8
9					40.1	38.5	47.6	45.8	1.1	1.3	1.7	1.8
10		x	x	x	41.6	40.0	49.1	47.4	1.1	1.3	1.7	1.8
11		x	x		41.6	40.0	49.1	47.4	1.1	1.3	1.7	1.8
12		x			41.6	40.6	49.2	47.5	1.2	1.3	1.8	1.8

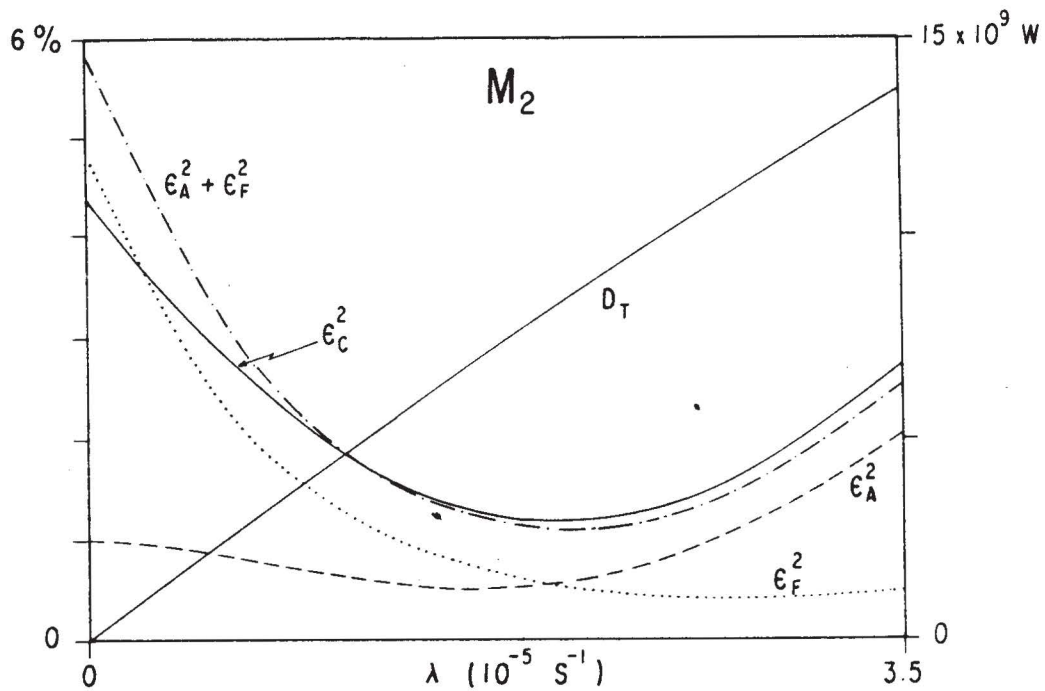


Fig. 2. Error del ajuste,  $\epsilon^2$ , y disipación total,  $D_T$ , como función del parámetro de fricción,  $\lambda$ . Las curvas etiquetadas por  $\epsilon_c^2$  (continua) y  $\epsilon_A^2 + \epsilon_F^2$  (punto y raya) corresponden a la amplitud compleja de normalización,  $\mu$ , obtenida por el criterio (8.3) u (8.4);  $\epsilon_A^2$  (rayas) y  $\epsilon_F^2$  (puntos) son el error del ajuste independiente de las amplitudes y de las fases.

Evidentemente, el mínimo de  $\epsilon^2$  provee la mejor estimación de  $\lambda$ ; es claro de la Figura 2, que los criterios (8.3) y (8.4) son prácticamente equivalentes, como se indica en (8.5) (la minúscula diferencia entre ambas estimaciones de  $D_T$  proviene de la diferencia de la estimación de  $\mu$  entre (8.3) y (8.4);  $D_T$  varía como  $|\mu|^2$ ). El ajuste individual de las amplitudes ( $\epsilon_A^2$ ) es menos sensible a cambios de  $\lambda$  que el de las fases ( $\epsilon_F^2$ ).

El mejor ajuste se obtiene para  $\lambda = 2.0 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$  y corresponde a  $\epsilon_C^2 = 1.16 \times 10^{-2}$ ,  $\epsilon_A^2 = 0.57 \times 10^{-2}$  y  $\epsilon_F^2 = 0.52 \times 10^{-2}$ . De (7.1) y (8.3) vemos que la raíz cuadrática media (*rcm*), temporal y sobre las estaciones, de la diferencia entre modelo y observaciones es igual a  $\epsilon_C \sqrt{\langle \eta^2 \rangle} = 5.70 \text{ cm}$ . La *rcm* de la diferencia de amplitudes es igual a  $\epsilon_A \sqrt{2 \langle \eta^2 \rangle} = 5.66 \text{ cm}$  y la *rcm* del desfasaje es igual a  $\epsilon_F = 7.2 \times 10^{-2}$  radianes, equivalente a 8.6 minutos. Podemos comparar estos errores mínimos con los resultados de un modelo bidimensional y alineal, el sistema (2.1) (M.L. Argote, A. Amador y M. Lavín, comunicación personal 1992); las diferencias con las observaciones de 15 estaciones<sup>1</sup> resulta en los errores  $\epsilon_C^2 = 2.87 \times 10^{-2}$ ,  $\epsilon_A^2 = 0.24 \times 10^{-2}$  y  $\epsilon_F^2 = 2.65 \times 10^{-2}$ , de acuerdo con las definiciones (8.3) y (8.4). Ambos modelos reproducen satisfactoriamente los datos, siendo más favorable el ajuste del bidimensional y alineal para las amplitudes y *viceversa* para las fases.

En la Figura 3 se observan la amplitud y fase, en observaciones y modelo, para esta componente (los resultados del modelo son cada 6.6 km, por lo que se los presenta en forma continua). De la boca a la cabeza se observa un gran incremento de la amplitud y un cambio de fase del orden de  $\pi$ , correspondiente a la presencia de un punto anfídromico virtual, cerca de la cuenca de Guaymas (Hendershott y Speranza 1971). El acuerdo entre modelo y observaciones es muy bueno, aunque la fase predicha es cerca de una hora demasiado grande en la cuenca mencionada (es decir, el incremento de fase observado es más abrupto que el predicho por el modelo). Esta discrepancia no es inconsistente con la bondad del ajuste ya que (8.4b) muestra que las diferencias de fase son pesadas menos allí donde las amplitudes son menores. Los datos de Mazatlán, considerados como fuera del golfo, no fueron incluidos en el ajuste: el hecho de que las curvas del modelo extrapolen suavemente hacia ellos es otra indicación de la bondad de los resultados del modelo.

A continuación discutimos con algún detalle el análisis de las siete componentes semidiurnas más energéticas; los resultados principales se presentan en la Tabla 5.

La componente  $S_2$ , con un tercio de la energía de la  $M_2$ , experimenta un ajuste óptimo para el mismo valor del

coeficiente de fricción  $\lambda$  que ésta. Los residuos (Figura 4), tanto en amplitud como en fase, muestran una distribución muy similar a los de la Figura 3, lo que indica diferencias sistemáticas, no aleatorias, entre observaciones y modelo, atribuibles a una deficiencia de éste o a una peculiaridad de la estación mareográfica.

Las siguientes cuatro componentes ( $N_2$ ,  $K_2$ ,  $v_2$  y  $2N_2$ ) muestran valores óptimos similares para  $\lambda$ , con gráficos (no mostrados aquí) similares a los de las Figuras 2 y 3. La última componente analizada (la  $T_2$ ) presenta problemas: el ajuste del modelo a las 10 estaciones que reportan observaciones resulta en  $\epsilon_C^2$  mínimo para  $\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$  y  $\epsilon_A^2 + \epsilon_F^2$  para  $\lambda = 0.23 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ . Los residuos, en un gráfico similar al de las Figuras 3 y 4, muestran que los datos de Sta. Rosalía e Isla San Marcos son los responsables de estas anomalías; eliminando a estas dos estaciones del ajuste se obtienen los resultados (satisfactorios) presentados en la Tabla 5. *A posteriori*, es explicable que estas dos estaciones presenten problemas con la  $T_2$ , ya que el batido de la  $T_2$  y la  $S_2$  es de un año, y los registros de ambas estaciones tienen tan sólo uno y medio año de duración, respectivamente: el ajuste al modelo puede ser utilizado como un control de calidad de las componentes armónicas (Ripa 1990).

En resumen, siete componentes semidiurnas (con un rango de casi tres órdenes de magnitud en energías) muestran un acuerdo satisfactorio entre modelo y observaciones, para un parámetro de fricción lineal igual a  $\lambda = 2.0 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ , que es la media pesada por las energías individuales. En la última columna de la Tabla 5 se presenta la potencia disipada por cada una de estas componentes, calculadas con este valor global de  $\lambda$ ; los 8.5 GW de la  $M_2$  son algo superior a las estimaciones de otros autores (Filloux 1973, Stock 1976, De León 1988).

## 10. BANDA DIURNA

El ajuste óptimo del modelo a los datos de las 19 estaciones para la componente diurna más energética (la  $K_1$ ) es excelente ( $\epsilon_C^2 = 0.8 \times 10^{-2}$ ), pero sugiere un valor de  $\lambda = 0.23 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ , inferior al que resulta de las componentes semidiurnas. Sin embargo, y a diferencia de la Figura 3; la curva de fase del modelo no extrapola suavemente al valor de Mazatlán. Estos resultados no son incompatibles, ya que las variaciones de fases de las componentes diurnas son muy pequeñas, inferiores a una hora. Esto contrasta con el caso de las semidiurnas, para las que la cercanía a resonancia produce una variación de fases cercana a medio ciclo (seis horas).

Las discrepancias entre el modelo y las observaciones podrían ser genuinas, por ejemplo, porque la pequeña propagación de fase sea en forma transversal al golfo (ver Gutiérrez y Morales 1986), cosa que obviamente no puede ser simulada por el modelo unidimensional. Podemos, sin embargo, intentar forzar un acuerdo, eliminando los datos

<sup>1</sup> No todas las de la Tabla 2; la elevación media, de acuerdo con (6.1), corresponde a  $\sqrt{\langle \eta^2 \rangle} = 49.3 \text{ cm}$ , en vez de los 53.0 cm de nuestros datos (ver Tabla 3).

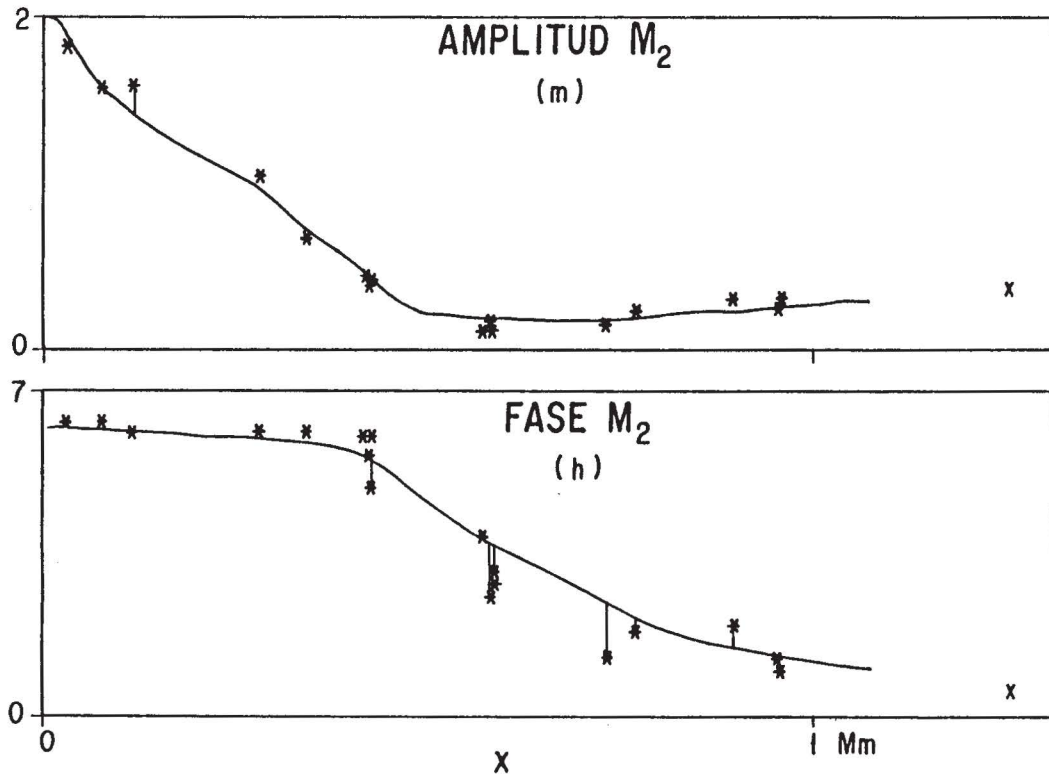


Fig. 3. Amplitud y fase de la M<sub>2</sub>. La línea continúa representa la predicción del modelo para  $\lambda = 2.0 \times 10^{-5} s^{-1}$  y sin corrección de Coriolis. Los asteriscos son las observaciones y están unidos por una línea vertical (no siempre visible) a la predicción del modelo que incluye la corrección de Coriolis (pendiente transversal proporcional a la corriente; ver 8.1). La cruz corresponde al dato de Mazatlán, que se considera fuera del Golfo pero cerca de su boca.

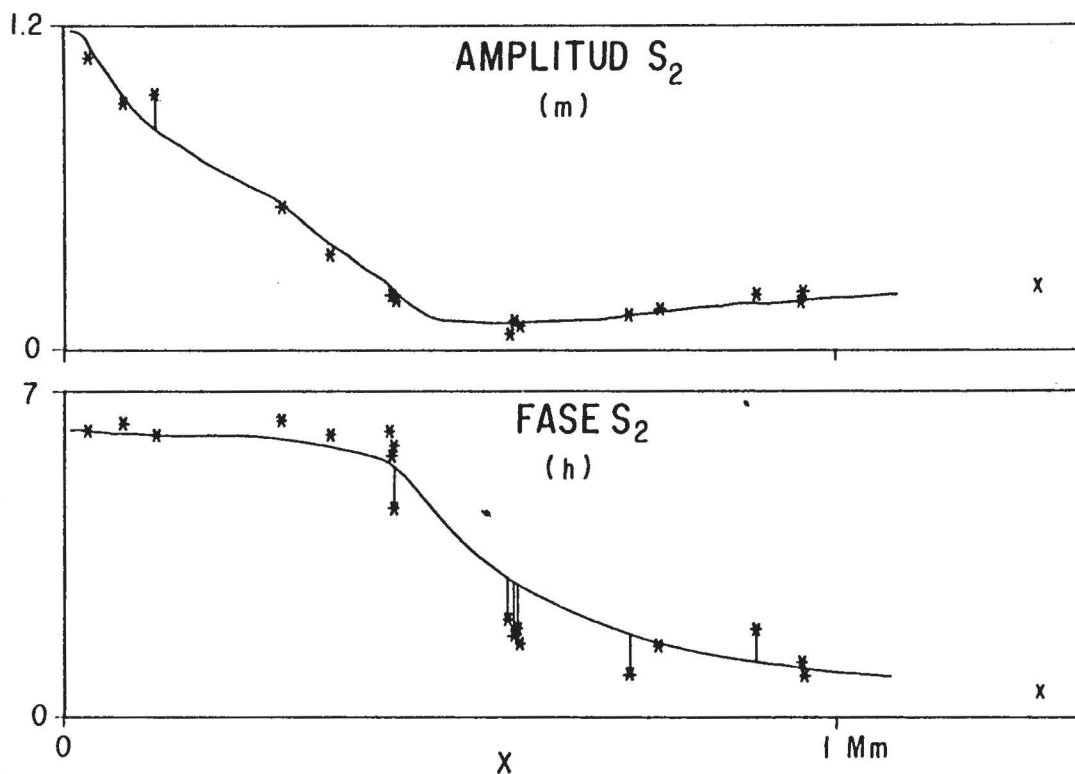


Fig. 4. Igual a la Figura 3, pero para la componente S<sub>2</sub>.

Tabla 5

Componentes Semidiurnas

Comp	Nest	%	$10^{-5} s^{-1}$		$10^{12} J$			$10^9 W$
			$\epsilon^2$	$\lambda_{opt}$	$D_T/\lambda$	$E_T$	$E_c$	$E_p$
M <sub>2</sub>	19	1.2	2.0	418	391	209	182	8.5
S <sub>2</sub>	19	1.6	2.0	142	132	71	61	2.9
N <sub>2</sub>	19	1.7	2.1	27	25.4	13.5	11.9	0.55
K <sub>2</sub>	16	1.9	2.2	11	10.7	5.7	5.0	0.22
v <sub>2</sub>	10	3.1	2.1	0.90	0.84	0.45	0.39	0.018
2N <sub>2</sub>	10	1.6	1.9	0.81	0.77	0.41	0.36	0.017
T <sub>2</sub> <sup>†</sup>	8	7.1	2.1	0.75	0.70	0.37	0.32	0.015

† Sin Santa Rosalía e Isla San Marcos.

‡ Para  $\lambda = 2.0 \times 10^{-5} s^{-1}$ .

de las ocho estaciones supervisadas por SIO, más Isla San Marcos, Topolobampo, La Paz y Yavaros; quedando sólo 7 estaciones (ver Tabla 2), para todas las componentes de la banda diurna. En estas condiciones, el ajuste de las amplitudes de la K<sub>1</sub> es insensible al valor de  $\lambda$ , mientras que el de fases es óptimo para  $\lambda = 1.0 \times 10^{-5} s^{-1}$  (Figura 5). Las curvas de amplitud y fase, satisfacen ahora el criterio de extrapolar suavemente a los datos de Mazatlán (Figura 6).

Las otras cinco componentes diurnas analizadas muestran un comportamiento similar (ver Tabla 6 y Figuras 7 y 8). Aunque P<sub>1</sub> y OO<sub>1</sub> experimentan el mejor ajuste para un valor pequeño o nulo de  $\lambda$ , para que los resultados del modelo en la boca se aproximen a los valores correspondientes a Mazatlán se necesita un valor de  $\lambda$  del orden de  $1 \times 10^{-5} s^{-1}$ . El valor medio de  $\lambda$  (pesado con las energías) para las otras cuatro componentes es de  $0.95 \times 10^{-5} s^{-1}$  es decir, cerca de la mitad del obtenido para las componentes semidiurnas. Sin embargo, insistimos en que no estamos demasiado confiados en lo robusto de este resultado, sobre todo en comparación con los de la sección anterior, porque es posible que las componentes en esta banda tengan un campo de fases irreproducible por el modelo unidimensional. De todos modos el porcentaje de varianza del nivel del mar en esta banda explicado por el modelo es cercano al 99%; la pequeña variación de las fases puede ser una sutileza que requiera de modelaje bidimensional.

### 11. DISCUSION

Se estudió la marea en el Golfo de California por medio de un modelo lineal unidimensional, cuyas variables dinámicas son la elevación  $\bar{\eta}(x,t)$  y la velocidad  $\bar{u}(x,t)$ , promediadas en la dirección transversal, y. El modelo es forzado tanto por la fuerza astronómica de marea como por la especificación de la elevación en la boca del golfo,  $\bar{\eta}(L,t)$ . Sus parámetros son la profundidad  $\bar{h}(x)$ , el an-

cho  $W(x)$  y el coeficiente de fricción  $\lambda$ ; a los efectos de comparar los resultados del modelo con las observaciones, se agregó *a posteriori* el efecto de Coriolis, parametrizado por  $f = f_0 + \beta x$ .

Para determinar la estructura de los campos correspondientes a alguna componente de marea, se elige la amplitud y fase de  $\bar{\eta}(L,t)$  mediante un ajuste por cuadrados mínimos a las observaciones disponibles, que son las componentes armónicas calculadas independientemente para cada una de (a lo sumo) 19 estaciones y para cada frecuencia de marea. Los ajustes a siete componentes semidiurnas y seis diurnas son excelentes, en el sentido de que un 99% de la varianza temporal, sumada sobre las estaciones, es reproducido por el modelo para la mayoría de las componentes, o un 90% para las menos energéticas.

Por ejemplo, para la mayor componente, la M<sub>2</sub>, las observaciones dan  $\|\eta_0\| = 53$  cm y su diferencia con las predicciones del modelo corresponden a  $\|\eta_0 - \eta_M\| = 5.7$  cm, donde la norma  $\|\cdot\|$  está definida como la raíz del promedio (temporal y aritmético sobre las estaciones) del cuadrado. La marea de origen astronómico corresponde a  $\|\eta_A\| = 1.4$  cm, por lo que es despreciable aún frente a las discrepancias de modelo y observaciones. Sorprendentemente, un modelo bidimensional y alineal (M.L. Argote, A. Amador y M. Lavín, comunicación personal 1992) no da mejores resultados:  $\|\eta_0 - \eta_M\| = 8.4$  cm para unas estaciones que representan  $\|\eta_0\| = 49$  cm.

Al cambiar la estructura del modelo se determina que el ajuste es sensible, en orden de importancia y en forma mucho más marcada para la banda semidiurna, a: variaciones de la profundidad  $\bar{h}(x)$ ; variaciones del ancho  $W(x)$ ; presencia del parámetro de fricción  $\lambda$ ; el efecto global de Coriolis  $f_0$ ; y el efecto- $\beta$ .

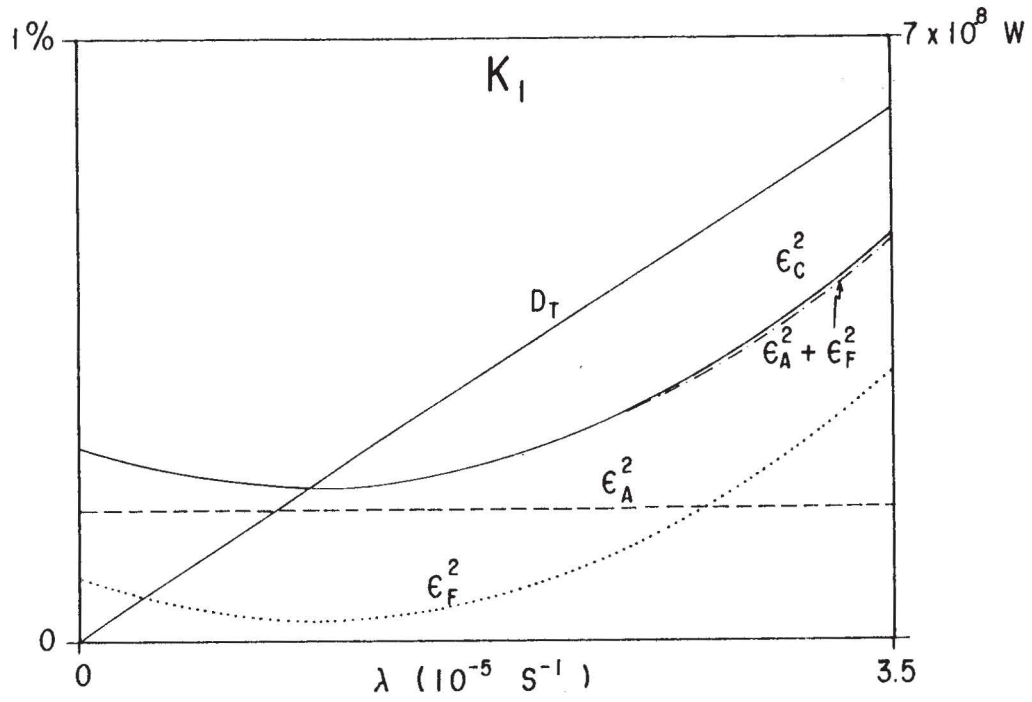


Fig. 5. Como en la Figura 2, para la componente  $K_1$ , con 7 estaciones.

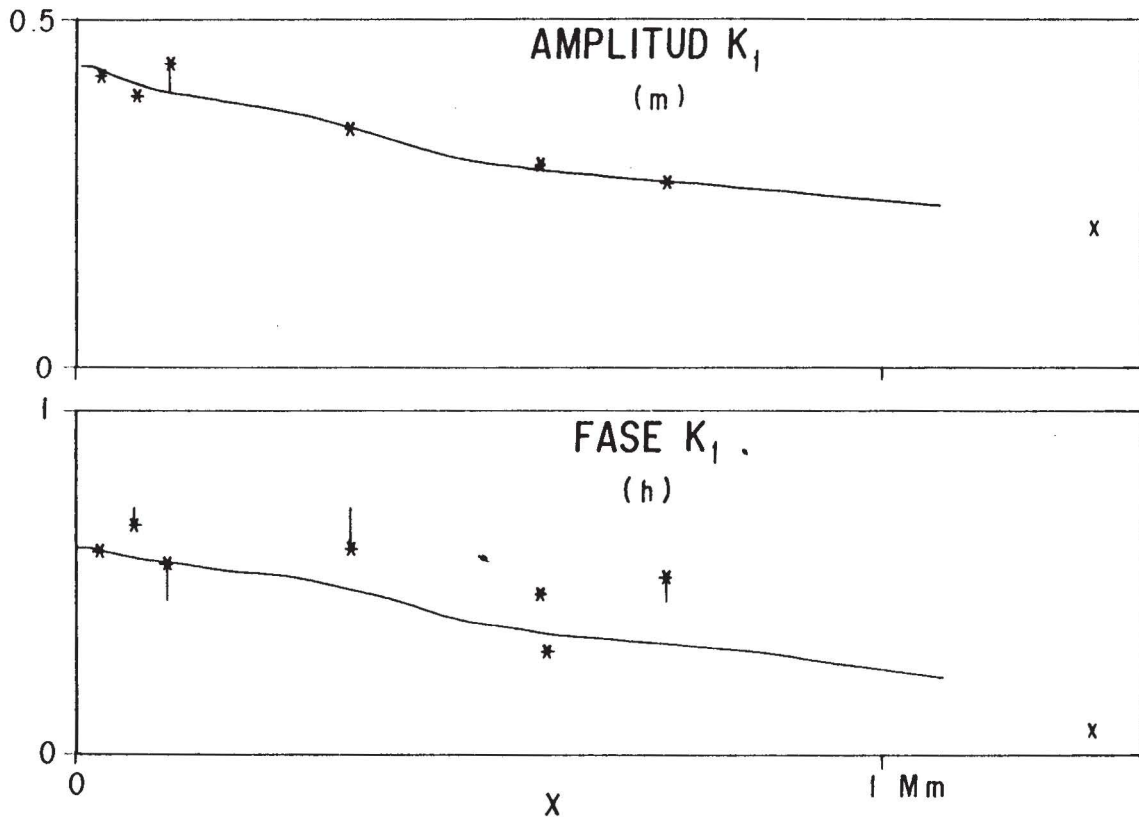


Fig. 6. Como en la Figura 3, para la componente  $K_1$ , con 7 estaciones.

Tabla 6

Comp	Nest	%	$10^{-5} s^{-1}$	$10^{12} J$	$10^{12} J$			$10^9 W$
					$D_T/\lambda$	$E_T$	$E_c$	
$K_1$	7	0.3	1.0	17.8	45.3	8.9	36.4	0.17
$O_1$	7	0.3	0.75	6.7	19.8	3.3	16.4	0.063
$P_1$	7	0.4	0.06	1.75	4.5	0.88	3.6	0.017
$Q_1$	7	1.7	0.87	0.23	0.73	0.11	0.62	0.0022
$J_1$	7	4.8	1.3	0.05	0.11	0.02	0.09	0.00047
$OO_1$	7	9.6	0.0	0.01	0.025	0.006	0.019	0.00009

† Para  $\lambda = 0.95 \times 10^{-5} s^{-1}$

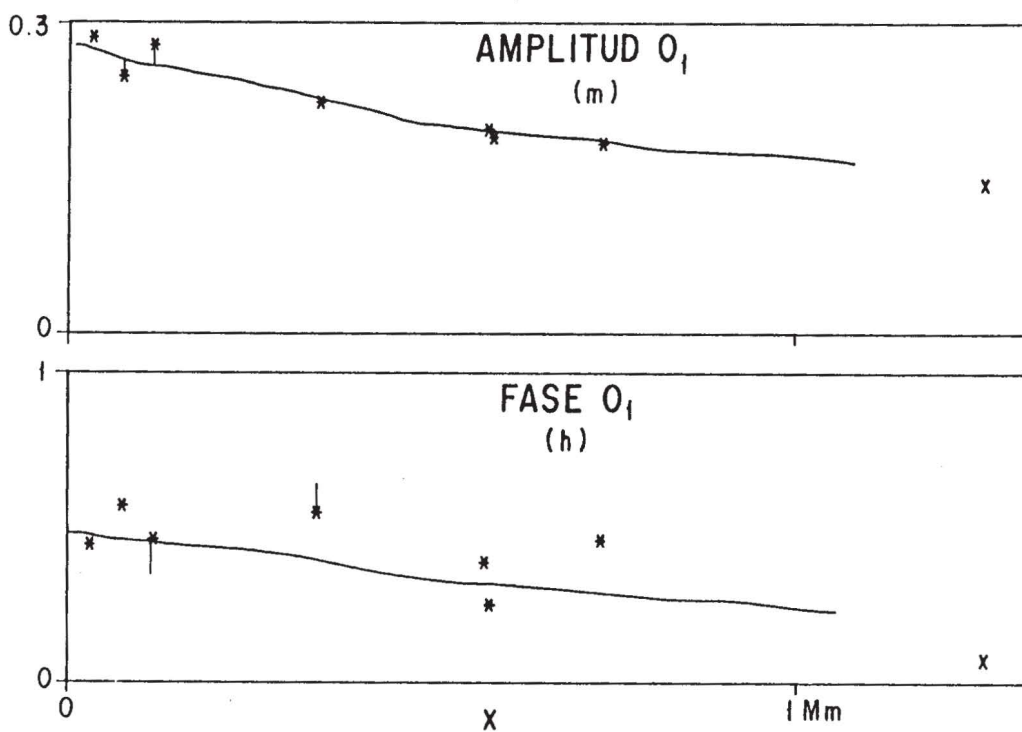


Fig. 7. Como en la Figura 3, para la componente  $O_1$ , con 7 estaciones.

En la estructura del campo de fases es donde se detectan las mayores discrepancias entre las observaciones y el modelo. En particular, la fase de las semidiurnas en la cuenca de Guaymas es del orden de una hora menor a la predicción del modelo (como la amplitud allí es pequeña, esto no influye demasiado en  $\|\eta_0 - \eta_M\|$ ). Por otra parte, las componentes diurnas muestran un rango de fases pequeño (inferior a una hora) a lo largo y a lo ancho del golfo, de manera que un modelo sin fricción ( $\lambda = 0$ ), para el que todos los puntos del golfo están en fase, da un ajuste correcto a las observaciones. De cualquier manera, la variación de fase observada puede ser reproducida por el modelo, limitando el número de estaciones a siete. Es posible que la propagación de fase sea más en la dirección transversal que en la longitudinal (Gutiérrez y Morales 1986), por lo que no podría

esperarse que un modelo unidimensional la reprodujera; este asunto amerita mayor investigación.

El valor de  $\lambda$  que resulta en el mejor ajuste es igual a  $2 \times 10^{-5} s^{-1}$  para las componentes semidiurnas y aproximadamente la mitad de este valor para las diurnas (cuyo ajuste, como fue señalado más arriba, es poco sensible a las variaciones de este parámetro). Ese valor de  $\lambda$  implica una disipación de 8.5 GW por la  $M_2$ , que es del orden de dos veces mayor a las estimaciones de otros autores (Filloux 1973, Stock 1976, De León 1988). La linealización de la fricción consistió en reemplazar  $C_f/|u|/h$  por  $\lambda u$ ; si estimamos *a posteriori* un valor efectivo de  $C_f$  para la  $M_2$ , imponiendo que la disipación de energía sea igual para ambas parametrizaciones, (donde  $\langle \cdot \rangle$  indica promedio tem-

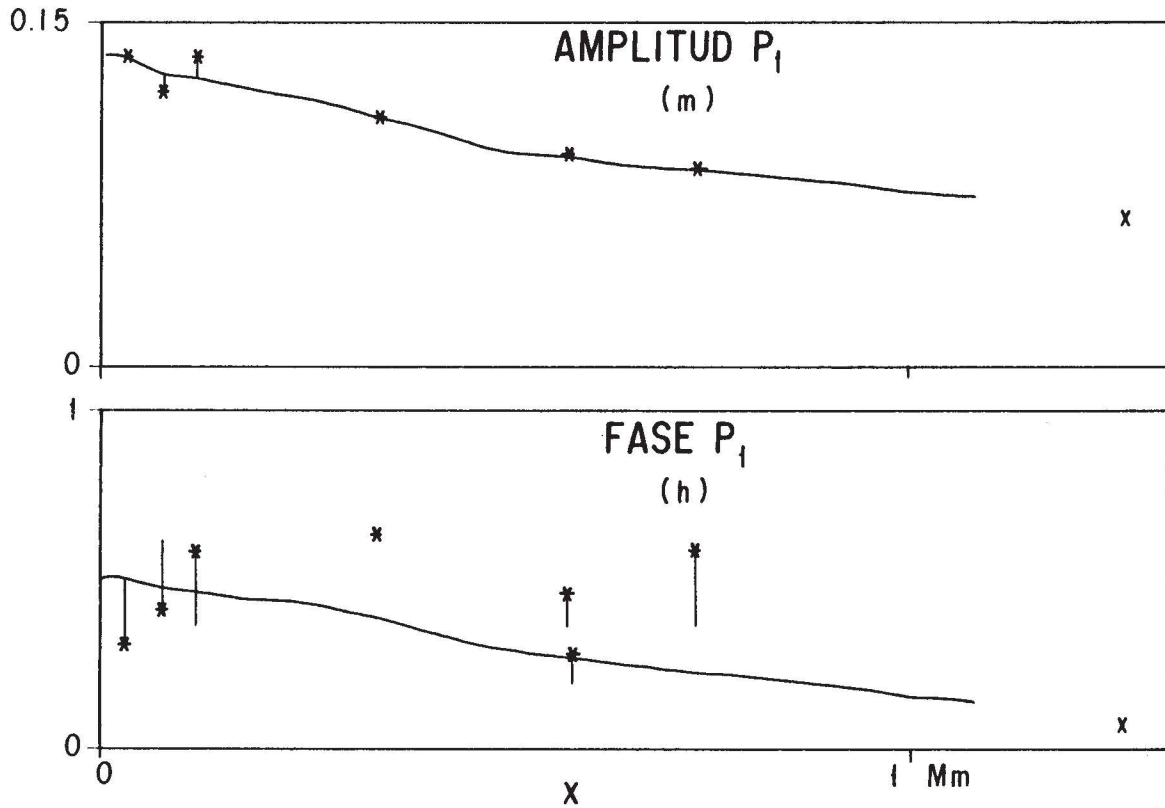


Fig. 8. Como en la Figura 3, para la componente P1, con 7 estaciones y  $\lambda = 1.0 \times 10^{-5} s^{-1}$ .

$$C_f \iint dx dy \langle |\bar{u}|^3 \rangle = \lambda \iint dx dy \bar{h} \langle \bar{u}^2 \rangle, \quad (11.1)$$

poral y  $\bar{u}(x,t)$  es la solución para la  $M_2$  del modelo unidimensional resulta en  $C_f = 0.032$ , que es un valor unas 10 veces mayor que el utilizado en los modelos bidimensionales alineales. Filloux (1973) también estimó valores demasiado grandes de  $C_f$  a partir de las observaciones, mientras que Godin (1985) logra utilizar con éxito un valor más bajo de  $C_f$ , estudiando simultáneamente las cinco componentes más energéticas. El ejercicio de la ecuación anterior arroja dudas sobre el valor óptimo de  $\lambda$  obtenido en este trabajo y, por consiguiente, también sobre el valor de la disipación de energía, que es esencialmente proporcional a  $\lambda$ .

Por otra parte, la linealización del modelo efectuada aquí permitió estudiar varias componentes de marea en forma independiente y directamente en el dominio de frecuencias, pero es claro que es importante estudiar una mejor parametrización lineal, con un  $\lambda$  dependiente de la posición; éste será el objeto de un trabajo futuro. Para hacer un estudio similar con un modelo alineal, se necesita incluir simultáneamente todas las componentes, lo que exige una integración (en el dominio temporal) muy larga, pues el batido de

algunos pares de componentes corresponde a un período de un año.

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por el CICESE, a través de su presupuesto global, y por el CONACYT, mediante el proyecto D111-903620 y apoyos puntuales para la participación en congresos. Se agradece al M.C. Alberto Amador los datos de la batimetría, al Oc. Ignacio González, de la Sección de Mareografía del CICESE, los datos de componentes armónicas. Estas provienen de datos de marea propios, de la UNAM y del SIO. Es un placer agradecer a Antoine Badan sus cuidadosas correcciones a la primera versión del manuscrito.

### APENDICE

Si una función  $a(t)$  es periódica, con período  $2\pi/\omega$ , la podemos escribir como

$$a(t) = \Re e [A e^{-i\omega t}], \quad (A.1)$$

donde  $\Re e$  significa "tomar la parte real" y  $A$  es un número complejo constante; si

$$A = A_R + iA_I = |A| e^{i\alpha}, \quad (A.2)$$

tenemos como alternativas de (A.1) a

$$a(t) = A_R \cos(\omega t) + A_I \sin(\omega t) = |A| \cos(\omega t - \alpha). \quad (\text{A.3})$$

Sea  $b(t)$  otra función armónica, de igual período, expresada en la forma (A.1) mediante su amplitud compleja  $B$ . Es muy fácil demostrar las siguientes relaciones

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= b(t) \\ a(t) &= \frac{db(t)}{db} \end{aligned} \right\} \forall t \Leftrightarrow \begin{cases} A=B \\ A=-i\omega B \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Nótese -ésto es muy importante- la doble implicación.

Finalmente, ya que para todo número complejo  $z$ ,  $\Re[z] = \frac{1}{2}(z + z^*)$  -donde el asterisco significa complejo conjugado- para el producto de dos funciones armónicas  $a(t)$  y  $b(t)$  con igual período, tenemos

$$\begin{aligned} a(t)b(t) &= \frac{1}{2} [Ae^{-i\omega t} + A^*e^{i\omega t}] \frac{1}{2} [Be^{i\omega t} + B^*e^{-i\omega t}] \\ &= \frac{1}{4} [ABe^{-2i\omega t} + A^*B^*e^{2i\omega t}] + \frac{1}{4} [A^*B + AB^*] \\ &= \frac{1}{2} \Re(ABe^{-2i\omega t}) + \frac{1}{2} \Re(A^*B). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

El primer término en el resultado final representa otra función armónica con el doble de frecuencia (mitad del período) y amplitud compleja  $\frac{1}{2}AB$ , y el segundo término una constante. En particular, tenemos

$$\langle ab \rangle = \frac{1}{2} \Re(A^*B), \quad (\text{A.6})$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  significa promedio temporal sobre un período.

## BIBLIOGRAFIA

- DE LEON, A., 1988. Modelos adimensionales de la marea en el Golfo de California. Tesis de licenciatura, U.A.B.C., 81 pp.
- DE LEON, A., y P. RIP A, 1989. Hacia un entendimiento de la marea en el Golfo de California, Memorias de la Unión Geofísica Mexicana: 206-213.

FILLOUX, J.H., 1973. Tidal patterns and energy balance in the Gulf of California. *Nature*, 243, 217-221.

GODIN, G., 1985. Frictional damping of the tide in the Gulf of California. *Geofís. Int.*, 24, 295-313.

GRIJALVA, N., 1972. Tidal computations in the Gulf of California I. *Geofís. Int.*, 12, 13-34.

GUTIERREZ, G. y R. MORALES, 1986. Revisión de los datos de marea para el Golfo de California. Informe Técnico OC-85-03, CICESE, 40 pp.

HENDERSHOTT, M.C., 1981. Long waves and ocean tides. En: Warren A. y C. Wunsch.(Ed). Evolution of physical oceanography, MIT press, Cambridge, Massachusetts; 292-341.

HENDERSHOTT, M.C. y A. SPERANZA, 1971. Co-oscillating tides in long, narrow bays; the Taylor problem revisited. *Deep Sea Res.*, 18, 959-980.

RIPA, P., 1990. Uso de un modelo sencillo de la marea en el Golfo de California para control de calidad de componentes armónicas, Comunicaciones Académicas, CICESE, Serie Oceanografía Física, CEOFN9001.

QUIROS, G., 1983. Circulación residual en el Golfo de California, un modelo numérico. Tesis de maestría, CICESE, 98 pp.

QUIROS, G., A. BADAN-DANGON y P. RIP A, 1992. M<sub>2</sub> currents and residual flow in the Gulf of California. *Neth. J. Sea Res.*, 28, 251-259.

STOCK, G.G., 1976. Modeling of tides and tidal dissipation in the Gulf of California. Ph. D. Thesis, University of California at San Diego, San Diego, California, 133 pp.

---

P. Ripa y G. Velázquez  
 Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada  
 Km 107 Carr. a Tijuana  
 22800 Ensenada, B. C., MEXICO