GEOFISICA INTERNACIONAL

REVISTA DE LA UNIÓN GEOFÍSICA MEXICANA, AUSPICIADA POR EL INSTITUTO DE GEOFÍSICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Director: Julián Adem | Subdirector: Manuel Maldonado-Koerdell

Vol. 5 | 1o. de Enero de 1965 | Núm. 1

UN METODO DE PERTURBACION PARA PROPAGACION DE ONDAS ELASTICAS, III — INHOMOGENEIDADES DELGADAS *

ISMAEL HERRERA * *

A PERTURBATION METHOD FOR ELASTIC WAVE PROPAGATION, III—THIN INHOMOGENEITIES *

ISMAEL HERRERA * *

RESUMEN

Se desarrolla una teoría de primer orden para tratar la dispersión de ondas elásticas por pequeñas inhomogeneidades, restringiéndose la atención a inhomogeneidades en que la perturbación de las propiedades elásticas no es pequeña, pero en las que la región perturbada es delgada. Las formaciones geológicas que satisfacen estas condiciones son diques, lentes, etc. Usando los teoremas de representación integral de la elastodinámica se expresan las soluciones como cuadraturas de cantidades conocidas.

ABSTRACT

A first order theory is developed to treat the scattering of elastic waves by small inhomogeneities. Attention is restricted to inhomogeneities for which the perturbation of the elastic properties is not small but the perturbed region is thin. Geological formations satisfying these conditions are dykes, lenses, etc. Using the integral representation theorems of elastodynamics the solutions are expressed as integrals of known quantities.

INTRODUCCION

Knopoff (1956) y de Hoop (1958) han estudiado los teoremas de representación integral en elastodinámica. Más recientemente, el autor (Herrera, I., 1964a) ha dado una prueba directa de estos teoremas de representación para movimientos casi-estacionarios en materiales no-homogéneos. Estos teoremas son muy importantes en relación con problemas de transmisión de ondas elásticas, no sólo porque los reducen a cuadraturas cuando se conoce la función de Green correspondiente a la región dada y las condiciones a la frontera, sino especialmente porque convienen mucho para obtener soluciones aproximadas usando los métodos clásicos de perturbación (Herrera, I., 1964b; Herrera, I. y A. K. Mal, 1964). Aún más, en la región de convergencia de la expansión en serie, la solución exacta puede aproximarse tanto como se quiera por medio de perturbaciones de orden suficientemente alto.

* *Publicación 395 del Instituto de Geofísica y Física Planetaria, Universidad de California, Los Angeles, California, EE. UU.*

* * *Investigador del Instituto de Geofísica y Asesor del Instituto de Ingeniería, U.N.A.M.*

INTRODUCTION

Knopoff (1956) and de Hoop (1958) have studied the integral representation theorems for elastodynamics. More recently, the author (Herrera, I., 1964a) has given a direct proof of these representation theorems for quasi-steady motions in non-homogeneous materials. These theorems are very important in connection with problems on elastic wave transmission not only because they reduce them to quadratures when the Green's function corresponding to the given region and boundary conditions is known, but especially because they are very suitable to obtain approximate solutions using classical perturbation methods (Herrera, I., 1964; Herrera, I. and A. K. Mal, 1964). Even more, in the region of convergence of the series expansion, the exact solution can be approximated as closely as desired by means of perturbations of sufficiently high order.

* *Publication 395 Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California, Los Angeles, California, U.S.A.*

* * *Institutes of Geophysics and Engineering, National Autonome University of Mexico.*

Las ideas básicas del método son aplicables a cualquier problema formulado en una región (llamada *región perturbada*) que se desvíe solo ligeramente de otra región (llamada la *región no perturbada*) para la cual (a) la correspondiente función de Green se conozca y (b) la solución del problema se conozca. Por "ligera desviación" quiere decirse arriba, no sólo que la geometría de la región perturbada difiere ligeramente de la geometría de la región no-perturbada, sino también que las propiedades físicas de ambas regiones son sólo ligeramente diferentes.

El gran interés que este tipo de problemta tiene en Geofísica (Hudson, J. A. y L. Knopoff, 1964; Knopoff, L. y J. A. Hudson, 1964a y b; De Noyer, J., 1961; Mal, A. K., 1962a y b; Obukov, C. G., 1963) y en algunos otros campos como la Ingeniería, inició al autor en un programa de investigación cuya finalidad era explorar las posibilidades que los teoremas de representación integral de la Elastodinámica tienen cuando se usan conjuntamente con métodos clásicos de perturbación.

En el trabajo I de esta serie (Herrera, I., 1964b), el método fue formulado para problemas en que se perturba la geometría de la región. Específicamente, se formuló para problemas en un medio espacio con estratificación múltiple cuyas fronteras son ligeramente no-paralelas. En el trabajo II (Herrera, I. y A. K. Mal, 1964) el método fue discutido en relación con problemas en que se perturban las propiedades físicas de los materiales. En dicho trabajo se mencionó que en muchos casos las funciones de Green son conocidas cuando los materiales son homogéneos y que los métodos de perturbación pueden aplicarse cuando el medio dado se desvía ligeramente de la homogeneidad. Aquí también la ligera desviación de la homogeneidad puede interpretarse en más de una forma. Por una parte, las propiedades físicas (tensor elástico y densidad) del medio perturbado pueden diferir en pequeñas cantidades en una gran región, de las propiedades físicas del medio no-perturbado y por otro, las propiedades elásticas del medio perturbado pueden diferir grandemente en una pequeña región de las propiedades elásticas del medio no perturbado. La primera posibilidad se discutió en II.

La segunda posibilidad también se discutió en II, restringiéndose la atención a las ondas de Love, que es un problema escalar, ya que la formulación de este método de perturbación es considerablemente más complicada para problemas donde el carácter vectorial del desplazamiento es esencial. El propósito de este trabajo es presentar el método para este tipo más general de problemas.

El método se presenta para problemas en que las propiedades elásticas del medio son perturbadas en una región delgada (llamada "inhomogeneidad delgada"). Cuando se trata de aplicar el tipo de razonamiento usado en II para el caso de la onda de Love a un caso más general en que el desplazamiento tiene tres componentes, surgen algunas dificultades que pueden superarse por medio de una fórmula que se desarrollará posteriormente.

El interés desde el punto de vista de la aplicación del presente trabajo reside en el hecho de que lentes, diques y

The basic ideas of the method are applicable to any problem formulated in a region (called the *perturbed region*) which deviates only slightly from another region (called the *unperturbed region*) for which (a) the corresponding Green's function is known, and (b) the solution to the problem is known. By "slight deviation," above, is meant not only that the geometry of the perturbed region differs slightly from the geometry of the unperturbed region, but also that the physical properties of both regions are only slightly different.

The great interest that this type of problem has in Geophysics (Hudson, J. A. and L. Knopoff, 1964; Knopoff, L. and J. A. Hudson, 1964a and b; De Noyer, J., 1961; Mal, A. K., 1962a and b; Obukhov, C. G., 1963) and in some other fields such as Engineering, initiated the author in a program of research whose aim is to explore the possibilities which the integral representation theorems of elastodynamics have when they are used together with classical perturbation methods.

In paper I of this series (Herrera, I., 1964b), the method was formulated for problems in which the geometry of the region is perturbed. Specifically, it was formulated for problems in a multi-layered half space with non-parallel boundaries. In paper II (Herrera, I. and A. K. Mal, 1964), the method was discussed in connection with problems in which the physical properties of the materials are perturbed. It was mentioned in that paper that in many cases the Green's functions are known when the materials are homogeneous and perturbation methods can be applied when the given medium deviates slightly from homogeneity. Here again the slight deviation from homogeneity may be interpreted in more than one way. On one hand, the physical properties (elastic tensor and density) of the perturbed medium can differ by small amounts in a large region, from the physical properties of the unperturbed medium. On the other hand, the elastic properties of the perturbed medium may differ by a large amount in a small region, from the elastic properties of the unperturbed medium. The first possibility was discussed in II.

The second possibility was also discussed in II, but attention was restricted to Love waves which is a scalar problem, because the formulation of this perturbation method is considerably more complicated for problems where the vectorial character of the displacement is essential. It is the purpose of this paper to present the method for this more general type of problems.

The method is presented for problems in which the elastic properties of the medium are perturbed in a thin region (called "thin inhomogeneity"). When one tries to apply the type of reasoning used in II for the Love wave case, to the more general case in which the displacement has three non-vanishing components, some difficulties arise. They have been overcome by means of a formula which is developed in a following section.

The interest from the point of view of the applications of the present work, lies in the fact that lenses, dykes, and muchas otras formaciones geológicas pueden incluirse en el tipo de inhomogeneidades delgadas que se tratan aquí.

Debe observarse que la aproximación usada aquí no es del tipo de la pantalla negra. En problemas elásticos, la pantalla negra corresponde a una placa infinitamente rígida y no puede tratarse por estos métodos de perturbación porque la perturbación producida por una placa rígida es diferente de cero aunque el espesor de la placa sea cero.

La teoría desarrollada en este trabajo se presenta con relación a la dispersión de ondas elásticas, aunque con ligeras modificaciones puede también aplicarse a problemas elastodinámicos.

many other geological formations may be included within the type of thin inhomogeneities treated here.

It must be observed that the approximation used here is not of the black screen type. In elastic problems, the black screen corresponds to an infinitely rigid plate and it cannot be treated by these perturbation methods because the perturbation produced by a rigid plate is different to zero even when the thickness of the plate is zero.

The theory developed in this paper is presented in connection with the scattering of elastic waves but with slight modifications, it can also be applied to elastodynamic problems.

TEOREMAS DE REPRESENTACION

Nos ocuparemos de las ecuaciones de la elasticidad que para movimientos de la forma

REPRESENTATION THEOREMS

modifications. it can also be applied to electrodynamic which for motions of the form

$$\mathbf{u}\ (\mathbf{x})\ e^{-iwt}$$

son

are

$$\frac{\partial \tau_{ij}\ (\mathbf{u})}{\partial x_j} = -\rho\omega^2\ u_i \tag{2.1.a}$$

Aquí

Here

$$\tau_{ij}\ (\mathbf{u}) = C_{ijpq}\frac{\partial u_p}{\partial x_q} \tag{2.1.b}$$

se supone qué índices repetidos se suman y que el tensor elástico C_{ijpq} tiene las siguientes simetrías [1]

and summation is understood over repeated indices. The elastic tensor C_{ijpq} is assumed to have the following symmetries [1]

$$C_{ijpq} = C_{jipq} = C_{ijqp} = C_{pqij} \tag{2.2}$$

Las soluciones $\mathbf{u}$ $(\mathbf{x})$ de (2.1.a) consideradas en lo que sigue se suponen continuas y produciendo esfuerzos normales continuos a través de las interfases, v. gr. (ver el Apéndice de Anotaciones)

The solutions $\mathbf{u}$ $(\mathbf{x})$ of (2.1.a) considered in what follows are assumed to be continuous and yield continuous normal stresses across interfaces, i.e. (see the appendix on notation)

$$[\ u_i\ ] = 0 \tag{2.3.a}$$

$$n_j\ [\tau_{ij}\ (\mathbf{u})] = 0 \tag{2.3.b}$$

Aquí, por interfase se quiere decir una superficie a través de la cual las propiedades físicas del medio tienen saltos de discontinuidad, $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a la interfase y los corchetes indican el salto de discontinuidad de las cantidades en su interior.

Sea $\mathbf{u}$ la solución de (2.1) y (2.3) en una región limitada R con frontera S. Como se ha demostrado (Herrera, I., 1964a) [2] para cada $\mathbf{x}$ en R tenemos

Here by an interface, it is meant a surface across which the physical properties of the medium have jump discontinuities, $\mathbf{n}$ is a unit normal vector to the interface and the brackets stand for the jump discontinuity of the quantities inside them.

Let $\mathbf{u}$, be a solution of (2.1) and (2.3) in a bounded region R with boundary S. Then, it has been shown (Herrera, I., 1964a) [2] that for every $\mathbf{x}$ in R, we have

[1] Ver por ejemplo: "On dissipation inequalities and linear viscoelasticity" por M. E. Gurtin e I. Herrera (que aparecerá en *Quart. Appl. Math,* 1965).

[2] La ecuación (2.4) se ha demostrado (Herrera, I., 1964a) solamente para soluciones bidimensionales. Sin embargo, los argumentos que se dan ahí pueden modificarse de una manera directa para demostrar que (2.4) también se aplica a problemas tridimensionales.

[1] See for example: "On dissipation inequalities and linear viscoelasticity" by M. E. Gurtin and I. Herrera (to appear in *Quart. Appl. Math*).

[2] Equation (2.4) has been shown (Herrera, I., 1964a) for two-dimensional solutions only. However, the arguments given there can be modified in a straightforward manner to show that (2.4) also holds in three dimensional problems.

$$u_k(\mathbf{x}) = \int_S \{ G_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x})\, \tau_{ij}(\mathbf{u}) - u_i(\mathbf{y})\, \tau_{ij}(\mathbf{G}_k) \}\, n_j\, d\mathbf{y} \tag{2.4}$$

donde la función de Green tensional G_{ki} ($\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$) tiene la interpretación física del desplazamiento en la dirección-i en el punto $\mathbf{y}$ producida por una fuerza unitaria concentrada en la dirección-k cuando se aplica en el punto $\mathbf{x}$. Más precisamente, la función de Green tensorial G_{ki} ($\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$) se supone que satisface las ecuaciones (2.1) y (2.3) como una función de $\mathbf{y}$ e i excepto en el punto $\mathbf{x}$ donde se aplica una fuerza unitaria concentrada en la dirección-k.

where the tensor Green's function G_{ki} ($\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$) has the physical interpretation of the displacement in the i-direction at the point $\mathbf{y}$ produced by a concentrated unit force in the k-direction when it is applied at the point $\mathbf{x}$. More precisely, the tensor Green's function G_{ki} ($\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$) is assumed to satisfy equations (2.1) and (2.3) as a function of $\mathbf{y}$ and i except at the point $\mathbf{x}$ where a concentrated unit force in the k-direction, is applied.

CONDICIONES DE RADIACION

En las siguientes secciones consideramos una región no-acotada R cuya frontera es S y una subregión acotada R^1 de R con frontera S^1. Ya que el teorema de representación (2.4) solamente se ha demostrado para regiones limitadas, en esta sección introducimos algunas nociones que nos permitirán extenderlo a regiones no-limitadas. Dichos resultados permitirán de paso una formulación precisa del problema de dispersión de una onda elástica en un medio no-limitado por una inhomogeneidad acotada.

Supongamos que $\mathbf{u}$ es una solución para (2.1) y (2.3) en la región $R\text{-}R^1$ y que G_{ki} ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, t) satisface en R, para $\mathbf{y}$ y k fijas, para cada $t \neq 0$,

RADIATION CONDITIONS

In the following sections we consider an unbounded region R whose boundary is S, and a bounded subregion R^1 of R, with boundary S^1. Since the representation theorem (2.4) has been only shown for bounded regions, in this section we introduce some notions which will permit us to extend it to unbounded regions. These results will allow by the way a precise formulation of the problem of scattering of an elastic wave in an unbounded medium by a bounded inhomogeneity.

Let $\mathbf{u}$ be a solution of (2.1) and (2.3) in the region $R\text{-}R^1$, and let G_{ki} ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, t) for fixed $\mathbf{y}$ and, k, satisfy in R, for every $t \neq 0$,

$$\frac{\partial \tau_{ij}(\mathbf{G}_k)}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 G_{ki}}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

junto con (2.3). Además supóngase que $\mathbf{G}_k$ se desvanece para $t < 0$ y que en $t = 0$ tiene en $\mathbf{y}$ una singularidad correspondiente a un impulso unitario concentrado en la dirección-k. Aquí debe entenderse que G_{ki} ($\mathbf{x}$, ξ, t) produce esfuerzos normales nulos sobre S y que $\mathbf{u}$ produce 0 esfuerzos normales en $S - R^1$. Bajo estas condiciones definimos para cada ω,

together with (2.3). Assume, even more, that $\mathbf{G}_k$ vanishes for $t < 0$ and that on $t = 0$ it has at $\mathbf{y}$ a singularity corresponding to a concentrated unit impulse in the k-direction. Here, it must be understood that G_{ki} ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, t) yields zero normal stresses on S and that $\mathbf{u}$ yields zero normal stresses on $S - R^1$. Under these conditions we define for every ω,

$$G_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\, e^{i\omega t}\, dt \tag{3.2}$$

puede demostrarse que con esta definición G_{ki} ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$) es una función de Green para (2.1) en R que produce esfuerzos nulos en S. Se la llamará función de Green para "radiación saliente". Entonces puede escribirse la solución $\mathbf{u}$ en un modo único como la superposición de dos soluciones $\mathbf{u}^\circ$ ($\mathbf{x}$) y $\mathbf{u}'$ ($\mathbf{x}$).[3] La "componente regular" $\mathbf{u}^\circ$ ($\mathbf{x}$) está definida en toda la región R, satisface a (2.1) y (2.3) y produce cero esfuerzos normales en todo S. La "componente de radiación saliente" de $\mathbf{u}$, por otra parte, está dada por

It can be shown that with this definition G_{ki} ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$) is a Green's function for (2.1) in R, which yields vanishing stresses on S. It is called the Green's function for "outward radiation." Then, the solution $\mathbf{u}$ can be written in a unique manner as the superposition of two solutions $\mathbf{u}^\circ$ ($\mathbf{x}$) and $\mathbf{u}'$ ($\mathbf{x}$).[3] The "regular component" $\mathbf{u}^\circ$ ($\mathbf{x}$) is defined in the whole region R, satisfies (2.1), (2.3) and yields zero normal stresses everywhere on S. The "outward radiation component" of $\mathbf{u}$, on the other hand, is given by

$$u'_k(\mathbf{x}) = \int_{S^1 - S} \{ G_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x})\, \tau_{ij}(\mathbf{u}) - u_i(\mathbf{y})\tau_{ij}(\mathbf{G}_k) \}\, n_j\, d\mathbf{y}\ ;\ \mathbf{x} \in R - R^1 \tag{3.3}$$

[3] Herrera, I., 1964c.

[3] Herrera, I., 1964c.

DISPERSION

En esta sección consideramos dos materiales diferentes definidos en la región no-limitada R. Primeramente consideramos el "medio no-perturbado" cuyo tensor elástico y densidad son C°_{ijpq} y ρ° respectivamente y después consideramos el "medio perturbado" cuyo tensor elástico y densidad son C_{ijpq} y ρ respectivamente. Las propiedades físicas C_{ijpq}, C°_{ijpq}, ρ y ρ° están definidas en todo R, pero se supondrá que

SCATTERING

In this section we consider two different materials defined in the unbounded region R. Firstly, we consider "the unperturbed medium" whose elastic tensor and density are C°_{ijpq} and ρ° respectively. Secondly, we consider "the perturbed medium" whose elastic tensor and density are C_{ijpq} and ρ respectively. The physical properties C_{ijpq}, C°_{ijpq}, ρ and ρ° are defined every where in R, but it will be assumed that

$$C_{ijpq} = C^{\circ}_{ijpq} \ \overset{y}{\text{and}} \ \rho = \rho^{\circ} \ ; \ \overset{\text{en}}{\text{in}} \ R - R^1 \tag{4.1}$$

La subregión acotada R^1 se llamará la "inhomogeneidad". Para puntos en la inhomogeneidad R^1 definimos

The bounded subregion R^1 will be called the "inhomogeneity." For points in the inhomogeneity R^1 we define

$$C^1_{ijpq} = C_{ijpq} - C^{\circ}_{ijpq} \ ; \ \rho^1 = \rho - \rho^{\circ} \tag{4.2}$$

Sea $\mathbf{u}^{\circ}$, como antes, una solución en el medio no-perturbado que satisface a (2.1) y (2.3) en todo R y produce cero esfuerzos normales en S.

El problema de la dispersión de la onda $\mathbf{u}^{\circ}$ por la inhomogeneidad R^1 se propone como sigue:

"Encontrar una solución $\mathbf{u}$ en el medio perturbado que satisfaga a (2.1) y (2.3) en todo R, produzca cero esfuerzos normales en S y cuya componente regular (como se ha definido en la sección previa) es $\mathbf{u}^{\circ}$".

Una aproximación de primer orden a la solución de este problema se obtendrá en las siguientes secciones.

Let $\mathbf{u}^{\circ}$ be as before, a solution on the unperturbed medium which satisfies (2.1) and (2.3) everywhere in R and yields zero normal stresses on S.

The problem of the scattering of the wave $\mathbf{u}^{\circ}$ by the inhomogeneity R^1 is proposed as follows:

"Find a solution $\mathbf{u}$ in the perturbed medium which satisfied (2.1) and (2.3) everywhere in R, yields zero normal stresses on S and whose regular component (as defined in the previous section) is $\mathbf{u}^{\circ}$."

A first order approximation to the solution of this problem will be obtained in the following sections.

LAS FORMULAS BASICAS

En esta sección obtenemos dos fórmulas en que se basa el resto del trabajo.

Denotemos con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ la solución exterior e interior a la inhomogeneidad R^1 respectivamente y escribamos correspondientemente:

THE BASIC FORMULAE

In this section we obtain two formulas in which the further work is based.

Let us denote by $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ the solution outside and inside the inhomogeneity R^1 respectively. We shall write accordingly

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\circ} + \mathbf{u}' \ ; \ \mathbf{x} \in R - R^1 \tag{5.1.a}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\circ} + \mathbf{v}' \ ; \ \mathbf{x} \in R^1 \tag{5.1.b}$$

Por (5.1.a) y la definición del problema de dispersión, $\mathbf{u}'$ es la componente de radiación saliente de $\mathbf{u}$. Por ello,

By (5.1.a) and the definition of the scattering problem, $\mathbf{u}'$ is the outward radiation component of $\mathbf{u}$. Therefore,

$$u'_k(\mathbf{x}) = \int_{S1-S} \left[G_{ki}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \, C^{\circ}_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial \mathbf{y}_q} - u_i(\mathbf{y}) \, C^{\circ}_{ijpq} \frac{\partial G_{kp}}{\partial \mathbf{y}_q} \right] n_j \, d\mathbf{y} \ ; \ \mathbf{x} \in R - R^1 \tag{5.2}$$

En virtud de (2.3) y el hecho que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{G}_k$ producen cero esfuerzos normales en S, podemos escribir

By virtue of (2.3) and the fact that $\mathbf{v}$ and $\mathbf{G}_k$ produce zero normal stresses on S, we can write

$$u'_k(\mathbf{x}) = \int_{S1} \left[G_{ki}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \, C_{ijpq} \frac{\partial v_p}{\partial \mathbf{y}_q} - v_i(\mathbf{y}) \, C^{\circ}_{ijpq} \frac{\partial G_{kp}}{\partial \mathbf{y}_q} \right] n_j \, d\mathbf{y} \ ; \ \mathbf{x} \in R - R^1 \tag{5.3}$$

Sea

Let

$$I = \int_{S^1} G_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x})\, C_{ijpq} \frac{\partial v_p}{\partial \mathbf{y}_q} n_j \, d\mathbf{y} \tag{5.4}$$

Entonces, usando el teorema de la divergencia

Then, using divergence theorem

$$I = \int_{R^1} \left[G_{ki} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_j} \left(C_{ijpq} \frac{\partial v_p}{\partial \mathbf{y}_q} \right) + C_{ijpq} \frac{\partial v_p}{\partial \mathbf{y}_q} \frac{\partial G_{ki}}{\partial \mathbf{y}_j} \right] d\xi$$

El primer término en esta integral puede ser transformado por medio de (2.1) y el segundo integrado por partes. De tal manera

The first term in this integral may be transformed by means of (2.1) and the second one integrating by parts. In this manner

$$I = \int_{S^1} v_p C_{ijpq} \frac{\partial G_{ki}}{\partial \mathbf{y}_j} n_j \, d\mathbf{y} - \int_{R^1} \left[v_p \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_q} \left(C_{ijpq} \frac{\partial G_{ki}}{\partial \mathbf{y}_j} \right) + \rho\omega^2 v_i(\mathbf{y}) G_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right] d\mathbf{y} \tag{5.5}$$

Sustituyendo por esta expresión en (5.4) y (5.3) y usando el hecho que G_{ki} satisface (2.1) y (2.3) dondequiera excepto en $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ y las simetrías (2.2) del tensor elástico, resulta

Substitution of this expression in (5.4) and (5.3) using the fact that G_{ki} satisfies (2.1) and (2.3) everywhere except at $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, and the symmetries (2.2) of the elastic tensor, yields

$$u'_k(\mathbf{x}) = \int_{S^1} v_i C^1_{ijpq} \frac{\partial G_{kp}}{\partial \mathbf{y}_q} n_j \, d\mathbf{y} - \int_{R^1} \left[v_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_j} \left(C^1_{ijpq} \frac{\partial G_{kp}}{\partial \mathbf{y}_q} \right) + \rho^1 \omega^2 v_i G_{ki} \right] d\mathbf{y} \; ; \; \mathbf{x} \in R - R^1 \tag{5.6}$$

Aquí la definición (4.2) fue usada.

La ecuación (5.6) es una de las fórmulas que intentábamos obtener. Tiene la ventaja de no contener derivadas de $\mathbf{v}$. Aplicando el teorema de la divergencia a la primera integral de (5.6), obtenemos la segunda

Here the definition (4.2) was used.

Equation (5.6) is one of the formulas we intended to obtain. It has the advantage of not containing derivatives of $\mathbf{v}$. Applying divergence theorem to the first integral in (5.6), we obtain the second one

$$u'_k(\mathbf{x}) = \int_{R^1} \left[C^1_{ijpq} \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_j} \frac{\partial G_{kp}}{\partial \mathbf{y}_q} - \rho^1 \omega^2 v_i G_{ki} \right] d\mathbf{y} \tag{5.7}$$

INHOMOGENEIDADES PEQUEÑAS

Cuando las perturbaciones C^1_{ijpq} y ρ^1 de las propiedades físicas son pequeñas, (5.6) puede usarse para obtener una aproximación de primer orden del campo difractado fuera de la inhomogeneidad. De cierto, considérese una familia de materiales que dependan del parámetro ε y tal que C^1_{ijpq} y ρ^1 como funciones de ε son $0(\varepsilon)$. Entonces, es plausible suponer que $\mathbf{v}'$ es $0(\varepsilon)$. Cuando ese es el caso, la ecuación (5.6) puede escribirse

SMALL INHOMOGENEITIES

When the perturbations C^1_{ijpq} and ρ^1 of the physical properties are small, (5.6) may be used to obtain a first order approximation of the diffracted field outside the inhomogeneity. Indeed, consider a family of materials which depends on the parameter ε and such that C^1_{ijpq} and ρ^1 as functions of ε are $0(\varepsilon)$. Then, it is plausible to assume that $\mathbf{v}'$ is $0(\varepsilon)$. When this is the case, equation (5.6) may be written

$$u'_k(\mathbf{x}) = \int_{S^1} u^0_i C^1_{ijpq} \frac{\partial G_{kp}}{\partial \mathbf{y}_q} n_j \, d\mathbf{y} - \int_{R^1} u^0_i \left[\rho^1 \omega^2 G_{ki} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_j} \left(C^1_{ijpq} \frac{\partial G_{kp}}{\partial \mathbf{y}_q} \right) \right] d\mathbf{y} + 0(\varepsilon^2) \tag{6.1}$$

en virtud de (5.1.b).

by virtue of (5.1.b).

La ecuación (6.1) ha sido obtenida con la sola suposición de que v' es $0(\varepsilon)$. Se piensa en consecuencia que debe ser más exacta que algunas otras fórmulas que se han usado en algunos trabajos (Knopoff, L. y J. A. Hudson. 1946b; Karel, F. C. y J. B. Keller, 1964) y que otra fórmula propuesta por el autor en otro trabajo (Herrera, I. y A. K. Mal. 1964) porque se obtuvieron suponiendo no sólo que $\mathbf{v}'$ es $0(\varepsilon)$ sino que todas sus derivadas espaciales son $0(\varepsilon)$.

Equation (6.1) has been obtained under the only assumption that v' is $0(\varepsilon)$. It is thought accordingly that it must be more accurate than some other formulas which have been used in some works (Knopoff, L. & A. Hudson, 1964b; Karal, F. C. & J. B. Keller, 1964) and a formula which the author proposed in a former work (Herrera, I. & A. K. Mal, 1964) because they were obtained assuming not only that $\mathbf{v}'$ is $0(\varepsilon)$ but all its spatial derivatives as well, are $0(\varepsilon)$.

INHOMOGENEIDADES DELGADAS

El principal propósito del presente trabajo es desarrollar una teoría de primer orden para inhomogeneidades delgadas.

Una inhomogeneidad delgada es aquella en que C^1_{ijpq} y ρ^1 no son pequeñas (es decir, son independientes del parámetro de perturbación ε), pero que su frontera S^1 (Fig. 1) admite una representación paramétrica de la forma

THIN INHOMOGENEITIES

The main purpose of the present work is to develop a first order theory for thin inhomogeneities.

A thin inhomogeneity is one for which C^1_{ijpq} and ρ^1 are not small (i.e., they are independent of the perturbation parameter ε), but instead its boundary S^1 (Fig. 1) admits a parametric representation of the form

$$x_i = g_i(s_1, s_2) + \varepsilon h_1(s_1, s_2)\, e_i(s_1, s_2) \tag{7.1.a}$$

$$x_i = g_i(s_1, s_2) - \varepsilon h_2(s_1, s_2)\, e_i(s_1, s_2) \tag{7.1.b}$$

Aquí, la ecuación

Here, the equation

$$x_i = g_i(s_1, s_2) \tag{7.2}$$

representa una superficie S_0 que se llamará el "esqueleto" de la inhomogeneidad, $\mathbf{e}$ es un vector normal unitario al esqueleto, h_1 y h_2 son dos funciones que describen la forma de S^1, ε es el parámetro de perturbación y s_1 y s_2 son dos parámetros que marcan los puntos del esqueleto.

represents a surface S_0 that will be called the "skeleton" of the inhomogeneity, $\mathbf{e}$ is a unit normal vector to the skeleton, h_1 and h_2 are two functions describing the shape of S^1, ε is the perturbation parameter and s_1, s_2 are two parameters which label the points of the skeleton.

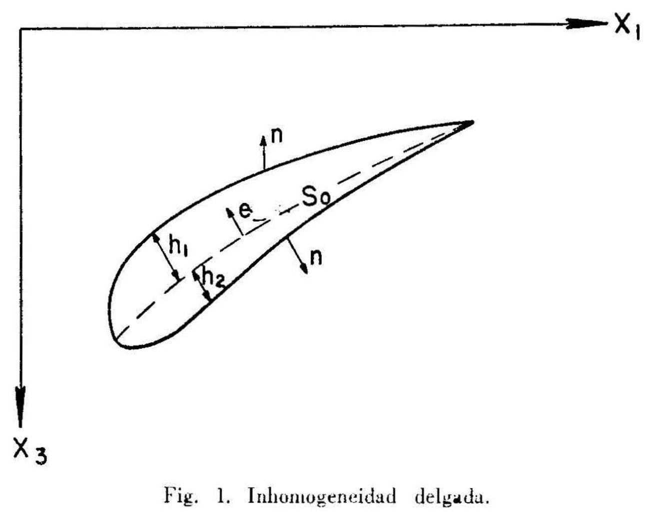

Fig. 1. Inhomogeneidad delgada.
Fig. 1. Thin inhomogeneity.

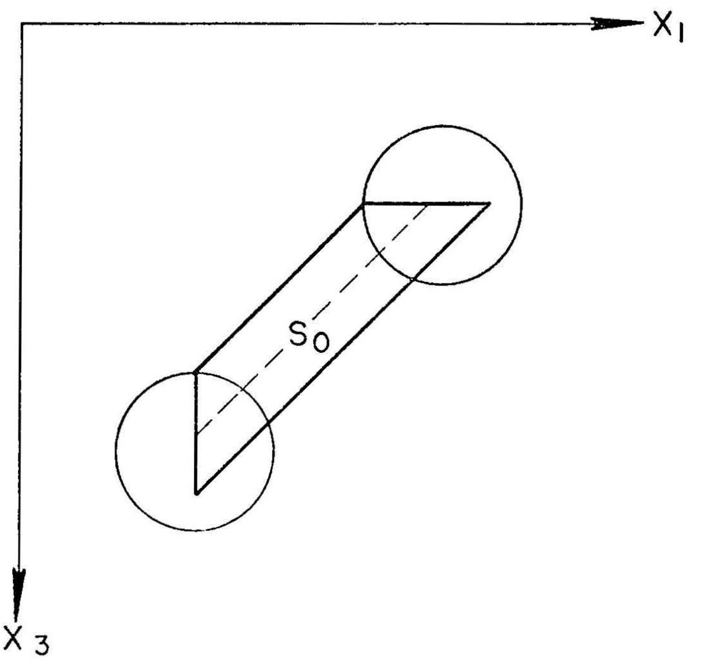

Fig. 2. Regiones donde la representación (7.1) no es válida rodeadas por círculos. Sus volúmenes (o áreas en problemas bidimensionales) deben ser $0(\varepsilon^2)$.

Fig. 2. The regions where the representation (7.1) is not valid, are encircled. Their volumes (or areas in two-dimensional problems) must be $0(\varepsilon^2)$.

Las complicaciones que surgen cuando se tratan inhomogeneidades delgadas se originan, como se ha mencionado en un trabajo previo (Herrera, I. y A. K. Mal, 1964), por el hecho que no todas las derivadas parciales de $\mathbf{u}'$ y $\mathbf{v}'$ pueden ser simultáneamente $0(\varepsilon)$. De hecho, si fueran $0(\varepsilon)$, (2.3.b) implicaría

The complications which arise when dealing with thin inhomogeneities are originated, as has been mentioned in a previous paper (Herrera, I. & A. K. Mal, 1964), by the fact that not all the partial derivatives of $\mathbf{u}'$ and $\mathbf{v}'$ can simultaneously be $0(\varepsilon)$. Indeed, if they were $0(\varepsilon)$, (2.3.b) would imply

$$n_j \, C^1_{ijpq} \frac{\partial u^\circ_p}{\partial x_q} = 0(\varepsilon)$$

Ya que ni C^1_{ijpq} ni $\frac{\partial u^\circ_p}{\partial x_q}$ son $0(\varepsilon)$, esta ecuación sólo puede ser válida en casos muy especiales. Sin embargo, por razones físicas, es plausible suponer que las derivadas espaciales de la perturbación $\mathbf{v}'$ fuera de la inhomogeneidad son $0(\varepsilon)$ de cualquier manera y así lo consideramos en lo siguiente. En otra sección se demuestra que así sucede automáticamente si existe una expansión de cierto tipo.

Concentraremos la atención en inhomogeneidades que son regulares en el sentido que C_{ijpq}, C^1_{ijpq}, ρ y ρ^1 tienen derivadas espaciales de primer orden continuas en R^1. En este caso $\mathbf{v}$ tiene también derivadas de primer orden continuas en R^1 pues las derivadas de cualquier solución de (2.1) pueden ser discontinuas sólo a través de superficies de discontinuidad de las propiedades físicas de los medios elásticos.

Usando estos hechos se sigue de (5.7) y (7.1)

Since neither C^1_{ijpq} nor $\frac{\partial u^\circ_p}{\partial x_q}$ are $0(\varepsilon)$, this equation can hold only in very special cases. However, on physical grounds, it is plausible to assume that the spatial derivatives of the perturbation $\mathbf{u}'$ outside the inhomogeneity are $0(\varepsilon)$ any way, and we shall do so in what follows. In another section it is shown that this is automatically so, if an expansion of certain type exists.

We shall restrict attention to inhomogeneities which are smooth, in the sense that C_{ijpq}, C^1_{ijpq}, ρ and ρ^1 have continuous first oder derivatives in R^1. In this case $\mathbf{v}$ has continuous first and second order derivatives in R^1 because the derivatives of any solution of (2.1) may be discontinuous only across surfaces of discontinuity of the physical properties of the elastic medium.

Using these facts it follows from (5.7) and (7.1)

$$u'_k(\mathbf{x}) = \varepsilon \int_{S_0} (h_1 + h_2) \left(C^1_{ijpq} \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_j} \frac{\partial G_{kp}}{\partial \mathbf{y}_q} - \rho^1 \omega^2 u^\circ_i G_{ki} \right) | d\,\mathbf{y} | + 0(\varepsilon^2)$$

donde $| d\,\xi |$ indican el elemento de área del esqueleto. Para obtener (7.3) el hecho de que el volumen de R^1 es $0(\varepsilon)$ también fue usado. Ello es una consecuencia del hecho que el espesor de la inhomogeneidad es $0(\varepsilon)$.

Para obtener una aproximación de primer orden de $\mathbf{u}$ sólo falta expresar las derivadas de $\mathbf{v}$ en términos de las derivadas de la solución no-perturbada, lo que se hará en la siguiente sección.

where $| d\,\mathbf{y} |$ stands for the element of area of the skeleton. To obtain (7.3) the fact that the volume of R^1 is $0(\varepsilon)$ has also been used. This is a consequence of the fact that the thickness of the inhomogeneity is $0(\varepsilon)$.

To obtain a first order approximation of $\mathbf{u}$ it remains only to express the derivatives of $\mathbf{v}$ in terms of the derivatives of the unperturbed solution. This will be done in the following section.

GRADIENTES DEL DESPLAZAMIENTO EN EL ESQUELETO

Sean $\mathbf{n}^1$ y $\mathbf{n}^2$ dos vectores tangenciales a S^1 tales que en unión de $\mathbf{n}$ constituyan un sistema ortonormal. Entonces sobre S^1

DISPLACEMENT GRADIENTS AT THE SKELETON

Let $\mathbf{n}^1$, $\mathbf{n}^2$ be two tangential vectors to S^1 such that together with $\mathbf{n}$ constitute an orthonormal system. Then

$$\frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_j} = n_j \, n_k \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_k} + n^\alpha_j \, n^\alpha_k \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_k} \; ; \quad \begin{matrix}\text{sobre}\\ \text{on}\end{matrix} \; S^1 \tag{8.1}$$

donde α tiene el rango 1 y 2 y se entiende la suma de índices repetidos.

La continuidad de los desplazamientos en (2.3.a) a través de S^1 implica que también las derivadas tangenciales son continuas, es decir

where α has the range 1 and 2, and summation over repeated indices is understood.

The continuity of the displacements (2.3.a) across S^1, implies that the tangential derivatives are also continuous, i.e.

$$n^\alpha_k \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_k} = n^\alpha_k \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{y}_k} \; ; \quad \begin{matrix}\text{sobre}\\ \text{on}\end{matrix} \; S^1 \tag{8.2}$$

En consecuencia, por (8.1)

Therefore, by (8.1)

$$\frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_j} = n_j \frac{\partial v_i}{\partial n} + n_j^\alpha \, n_k^\alpha \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{y}_k} \; ; \quad \underset{\text{on}}{\text{sobre}} \quad S^1 \tag{8.3}$$

con una anotación obvia para la derivada normal sobre S^1. La continuidad de los esfuerzos normales (2.3.b), por otra parte, implican

with an obvious notation for the normal derivative on S^1. The continuity of the normal stresses (2.3.b) on the other hand, imply

$$n_j \, C_{ijpq} \frac{\partial v_p}{\partial \mathbf{y}_q} = n_j \, C^\circ_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial \mathbf{y}_q} \; ; \quad \underset{\text{on}}{\text{sobre}} \quad S^1 .$$

Luego,

Hence,

$$n_j \, C_{ijpq} \, n_q \frac{\partial v_p}{\partial n} = n_j \, C_{ijpq} \, n_q \frac{\partial u_p}{\partial n} - n_j \, C^1_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial \mathbf{y}_q} \tag{8.4}$$

por (8.3).

Se ha demostrado [4] que para la mayoría de materiales reales, el tensor de elasticidad C^1_{ijpq} es definido positivo y por ello fuertemente elíptico, es decir, dados dos vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{m}$ cualesquiera

by (8.3).

It has been shown [4] that for most real materials, the elasticity tensor C^1_{ijpq} is positive definite and therefore strongly elliptic, i.e., given any two vectors $\mathbf{n}$ and $\mathbf{m}$

$$C_{ijpq} \, n_j \, n_p \, m_i \, m_q > 0$$

a menos que $\mathbf{n}$ o $\mathbf{m} = 0$. Ya que en nuestro caso $\mathbf{n} \neq 0$, esta desigualdad implica que existe una matriz inversa D_{ki} tal que

unless $\mathbf{n}$ or $\mathbf{m} = 0$. Since in our case $\mathbf{n} \neq 0$, this inequality implies that there exists an inverse matrix D_{ki} such that

$$D_{ki} \, C_{ijpq} \, n_j \, n_q = \delta_{kp} \tag{8.5}$$

Sea

Let

$$B_{ipq} = - D_{ik} \, n_j \, C^1_{kjpq} \tag{8.6}$$

Entonces, de (8.4) se sigue que

Then, from (8.4) it follows

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = \frac{\partial u_i}{\partial n} + B_{ipq} \frac{\partial u_p}{\partial \mathbf{y}_q} \tag{8.7}$$

La substitución de (8.7) en (8.3) da ahora

Substitution of (8.7) in (8.3) yields now

$$\frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_j} = \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{y}_j} + n_j \, B_{ipq} \frac{\partial u_p}{\partial \mathbf{y}_q} \tag{8.8}$$

La hipótesis

The assumption that

$$\frac{\partial u'_i}{\partial \mathbf{y}_j} = 0(\varepsilon) \tag{8.9}$$

implica

implies

$$\frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_j} = \frac{\partial u'_i}{\partial \mathbf{y}_j} + n_j \, B_{ipq} \frac{\partial u'_p}{\partial \mathbf{y}_q} + 0(\varepsilon) \; ; \quad \underset{\text{on}}{\text{sobre}} \quad S^1 \tag{8.10}$$

Lo que da el gradiente del desplazamiento en el esqueleto al orden deseado de aproximación, pues

which gives the displacement gradients at the skeleton to the desired order of approximation, because

$$\frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_j} (\mathbf{g}) = \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_j} (\mathbf{g} + \varepsilon \, h_1 \, e) + 0(\varepsilon) \tag{8.11}$$

[4] Ver nota 1.

[4] See footnote 1.

La substitución de (8.11) y (8.10) en (7.3) da la aproximación de primer orden deseada

Substitution of (8.11) and (8.10) in (7.3) yields the desired first order approximation

$$u'_k(\mathbf{x}) = \varepsilon \int_{S_0} (h_1 + h_2) \Big(C^1_{ijpq} \frac{\partial u'_i}{\partial y_j} \frac{\partial G_{kp}}{\partial y_q} - \rho^1 \omega^2 u'_i G_{ki} + n_j A_i C^1_{ijpq} \frac{\partial G_{kp}}{\partial y_q} \Big) \, d\mathbf{y} + 0(\varepsilon)^2 \qquad (8.12)$$

donde hemos escrito

where we have written

$$A_i = B_{ipq} \frac{\partial u^\circ_p}{\partial y_q} = - D_{ik} n_j C^1_{ijpq} \frac{\partial u^\circ_p}{\partial y_q} \qquad (8.13)$$

La expresión de $\mathbf{u}'$ dada por (8.12) tiene el inconveniente de no ser lineal en el espesor. Sin embargo (8.12) se puede linealizar evaluando cada uno de los términos que ocurren en ella (incluyendo $\mathbf{n}$ y A_i) en el esqueleto. Puede demostrarse que tal substitución sólo da términos que son $0(\varepsilon^2)$. Obsérvese que $\mathbf{n}$ valuada en el esqueleto se convierte en $\mathbf{e}$ (excepto posiblemnt por el signo que es irrelevante) y que evaluar A_i en el esqueleto requiere evaluar C^1_{ijpq} y D_{ik} en (8.3) en el esqueleto.

The expression of $\mathbf{u}'$ given by (8.12) has the inconvenience of not being linear on the thickness. However (8.12) may be linearized evaluating of the terms occurring there (including $\mathbf{n}$ and A_i) at the skeleton. It may be shown that such a substitution gives rise only to terms which are $0(\varepsilon)$. Observe that $\mathbf{n}$ evaluated at the skeleton becomes $\mathbf{e}$ (except possibly by the sign which may be shown to be irrelevant) and that evaluating A_i at the skeleton requires evaluating C^1_{ijpq} and D_{ik} in (8.13) at the skeleton.

MATERIALES ISOTROPICOS

Parece pertinente especializar las expresiones para D_{ki} y A_i para materiales isotrópicos, dada su gran importancia desde un punto de vista práctico.

Para materiales isotrópicos tenemos

ISOTROPIC MATERIALS

It seems pertient to specialize the expressions for D_{ki} and A_i for isotropic materials, because of their great importance from the practical point of view.

For isotropic materials, we have

$$C_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \qquad (9.1)$$

donde λ y μ son los valores de los parámetros de Lamé dentro de la inhomogeneidad. Según la notación que hemos usado, λ° y μ° serán sus valores en el medio no-perturbado y

where λ, μ are the values of the Lame's parameters inside the inhomogeneity. According to the notation we have been using λ°, μ° will be their values in the unperturbed medium and

$$\lambda^1 = \lambda - \lambda^0 \quad ; \quad \mu^1 = \mu - \mu^0 \quad ; \quad \begin{matrix}\text{en}\\ \text{in}\end{matrix} \; R^1 . \qquad (9.2)$$

De (9.1) se sigue que

From (9.1), it follows

$$C_{ijpq} n_j n_p = \mu \delta_{iq} + (\lambda + \mu) n_i n_q \qquad (9.3)$$

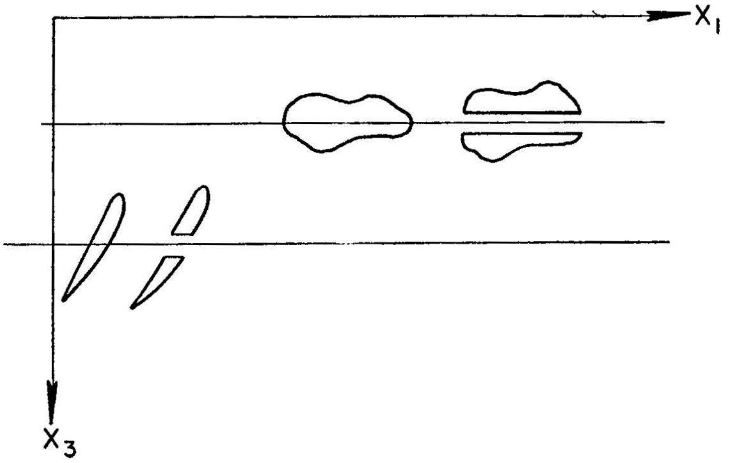

Fig. 3. Proceso límite que permite tratar a una inhomogeneidad delgada que cruza una interfase como superposición de dos inhomogeneidades regulares.

Fig. 3. Limit process by which a thin inhomogeneity crossing one interface may be treated as the superposition of two smooth inhomogeneities.

por cálculo directo puede verse que

By direct computation it may be seen that

$$D_{ki} = \frac{1}{\mu} n^o_i \, n^o_k + \frac{1}{\lambda + 2\mu} n_i \, n_k \tag{9.4}$$

satisface a (8.5).

Substituyendo (9.1) y (9.4) en (8.3) y valorando en el esqueleto, obtenemos

satisfies (8.5).

Substituting (9.1) and (9.4) into (8.13) and evaluating at the skeleton, we obtain

$$A_i = \frac{2\mu^1}{\mu} \cdot \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_i \, e_p \frac{\partial u_p}{\partial n} - \frac{\mu^1}{\mu} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial n} + e_p \frac{\partial u'_p}{\partial \mathbf{y}_i} \right)$$

$$- \frac{\lambda^1}{\lambda + 2\mu} e_i \frac{\partial u'_p}{\partial \mathbf{y}_p} \tag{9.5}$$

donde

where

$$\frac{\partial}{\partial n} = e_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_j}$$

NOTAS COMPLEMENTARIAS

Hasta ahora se ha supuesto que la frontera de la inhomogeneidad delgada admite la representación (7.1) dondequiera. Si no es éste el caso y si el volumen (o el área en problemas bi-dimensionales) de la región donde la representación (7.1) no es válida es $0(\varepsilon)$ (Fig. 2) los resultados obtenidos son válidos pues la única contribución adicional que surge de esta región al obtener (7.3) de (5.7) es $0(\varepsilon^2)$.

La discusión se ha limitado a inhomogeneidades regulares (es decir, inhomogeneidades para las cuales C_{ijpq}, C^1_{ijpq}, ρ y ρ^1 tienen derivadas de primer orden continuas). Si no es este el caso, cuando la inhomogeneidad puede descomponerse en un número finito de inhomogeneidades regulares, entonces cada una de las inhomogeneidades regulares debe tratarse separadamente y la inhomogeneidad dada puede considerarse como la superposición de todas ellas. Tal procedimiento se ilustra en la Fig. 3 para el importante caso en que la inhomogeneidad cruza una interfase.

COMPLEMENTARY REMARKS

So far it has been assumed that the boundary of the thin inhomogeneity admits the representation (7.1) everywhere. If this is not the case but the volume (or the area in two-dimensional problems) of the region where the representation (7.1) is not valid is $0(\varepsilon^2)$ (Fig. 2), the results obtained remain valid because the only additional contribution which arises from this region when obtaining (7.3) from (5.7) is $0(\varepsilon^2)$.

The discussion has been restricted to smooth inhomogeneities (i.e. inhomogeneities for which C_{ijpq}, C^1_{ijpq}, ρ and ρ^1 have continuous first order derivatives). If this is not the case, but the inhomogeneity can be decomposed into a finite number of smooth inhomogeneities, then every one of the smooth inhomogeneities must be treated separately and the given inhomogeneity can be considered as the superposition of all them. This procedure is illustrated in Fig. 3 for the important case in which the inhomogeneity crosses one interface.

LA PERTURBACION DENTRO DE LA INHOMOGENEIDAD

Un modo más sistemático de obtener los resultados de las secciones anteriores es suponer una expansión en serie de la forma

THE PERTURBATION INSIDE THE INHOMOGENEITY

A more systematic way of obtaining the results of former section is to assume a series expansion of the form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, o) + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}, o) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \varepsilon^2}(\mathbf{x}, o) + \ldots \tag{11.1.a}$$

para **u** y una expansión en serie de la forma

for **u**, and a series expansion of the form

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{v}(\mathbf{g}, 0) + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{g}, 0) + \triangle x_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(\mathbf{g}, 0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \varepsilon^2}(\mathbf{g}, 0)$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon \triangle x_i \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \varepsilon \, \partial x_i}(\mathbf{g}, 0) + \frac{1}{2} \triangle x_i \triangle x_j \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i \, \partial x_j}(\mathbf{g}, 0) + \ldots \tag{11.1.b}$$

para **v**. Aquí

for **v**. Here

$$\Delta x_i = x_i - g_i$$

Cuando es éste el caso, las derivadas espaciales de **u′** son necesariamente $0(\varepsilon)$.

Las ecuaciones (11) pueden usarse también para obtener sistemáticamente perturbaciones de órdenes mayores.

Cuando las expansiones (11) existen la aproximación de primer orden para la solución dentro de la inhomogeneidad está dada por

When this is the case the spatial derivatives of **u′** are necessarily $0(\varepsilon)$.

Equations (11) can also be used to obtain higher order perturbations systematically.

When the expansions (11) exist, the first order approximation for the solution inside the inhomogeneity is given by

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},\varepsilon) = \mathbf{v}(\mathbf{g},0) + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{g},0) + \Delta x_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(\mathbf{g},0) + 0(\varepsilon^2) \qquad (11.2)$$

Usando la continuidad de los desplazamientos y los esfuerzos normales a través de las interfases (2.3) puede demostrarse que

Using the continuity of the displacements and normal stresses across the interfaces (2.3), it can be shown that

$$\mathbf{v}(\mathbf{g},0) = \mathbf{u}(\mathbf{g},0) = \mathbf{u}^{\circ}(\mathbf{g}) \qquad (11.3.a)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{g},0) = \frac{\partial u^{\circ}_i}{\partial x_j}(\mathbf{g},0) + e_j A_i \qquad (11.3.b)$$

y

and

$$\frac{\partial v_i}{\partial \varepsilon}(\mathbf{g},0) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial \varepsilon}\right)_1 - h_1 A_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial \varepsilon}\right)_2 + h_2 A_i \qquad (11.3.c)$$

donde los subíndices se refieren a los lados del esqueleto. el lado 1 se supone ser el lado al que apunta el vector **e**. La ecuación (11.3.c) implica que $\frac{\partial u_i}{\partial \varepsilon}$ tiene una discontinuidad de salto a través del esqueleto, lo cual es posible demostrar que es compatible con (7.3). Ciertamente, usando las ecuaciones de movimiento (2.1), las condiciones de continuidad (2.3) y el teorema de divergencia, puede escribirse la ecuación (7.3)

where the subindices 1 and 2 refer to the sides of the skeleton. Side 1 is assumed to be the side where the vector **e** points to. Equation (11.3.c) implies that $\frac{\partial u_i}{\partial \varepsilon}$ has a jump discontinuity across the skeleton a fact that can be shown to be compatible with (7.3). Indeed, using the equations of motion (2.1), the continuity conditions (2.3) and divergence theorem, equation (7.3) can be written

$$u'_k(\mathbf{x}) = \varepsilon \int_{S_0} (h_1 + h_2) \left\{ \left(\frac{\partial u^{\circ}_i}{\partial \mathbf{y}_j} - \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_j}\right) C^{\circ}_{ijpq} \frac{\partial G_{kp}}{\partial \mathbf{y}_q} + G_{kp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_q} C^{\circ}_{ijpq} \left(\frac{\partial u^{\circ}_i}{\partial \mathbf{y}_j} - \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_j}\right) \right\} d\,\mathbf{y}_0 + 0(\varepsilon^2) \qquad (11.4) \qquad (11.4)$$

Ya que (por 8.10 y 8.13)

Since

$$\frac{\partial u^{\circ}_i}{\partial \mathbf{y}_j} - \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{y}_j} = -e_j A_i$$

y **e** es normal al esqueleto, la ecuación (11.4) exhibe precisamente el mismo salto para **u′** que (11.3.c).

and **e** is normal to the skeleton, equation (11.4) exhibits precisely the same jump for **u′** as (11.3.c).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación que se realiza conjuntamente por el Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional Autónoma de México y el Instituto de Geofísica de la Universidad de California en Los Angeles. Por parte de la Universidad de California ha recibi-

ACKNOWLEDGEMENTS

This work is part of a project of research which is being carried out jointly by the Institute of Geophysics of the National Autonomous University of Mexico and the Institute of Geophysics of the University of California at Los Angeles. On the part of the University of California do el subsidio AF-AFOSR-26-63 de la Oficina de la Fuerza Aérea para la Investigación Científica como parte del proyecto Vela Uniform de la Advanced Research Projects Agency. Además, yo he sido parcialmente ayudado por una beca de la Fundación Ingeniería, A. C.

it has been supported by grant AF-AFOSR-26-63 of the Air Force Office of Scientific Research as part of the Advanced Research Projects Agency project Vela Uniform. In addition I have been partially supported by a fellowship from the Fundación Ingeniería, A. C.

APENDICE DE NOTACIONES

En todo el trabajo los símbolos en negritas indican vectores cuyas componentes se anotan con la misma letra. Así $\mathbf{u}$ es el vector cuyas componentes son (u_1, u_2, u_3). La variable de integración en las integrales es indicada por la diferencial bajo el signo de integración. El carácter de la integral (integral de superficie o volumen) se ha indicado por un subíndice bajo el signo de la integral. Así,

APPENDIX, NOTATION

Throughout this work boldface type symbols indicate vectors whose components are denoted with the same letter. Thus, $\mathbf{u}$ is the vector whose components are (u_1, u_2, u_3). The variable of integration in the integrals is indicated by the differential under the integral sign. The character of the integral (surface or volume integral) is indicated by a subindex below the integral sign. Thus,

$$\int_S \tau_{ij}\, n_j\, d\mathbf{y}$$

significa integral de superficie sobre la superficie S respecto a $\mathbf{y}$, y

means surface integral over the surface S, with respec to $\mathbf{y}$, and

$$\int_R f_i\, u_i\, d\mathbf{y}$$

significa integral de volumen sobre la región R respecto a $\mathbf{y}$.

means volume integral over the region R with respect to $\mathbf{y}$.

Los símbolos más frecuentemente usados fueron:

The symbols most often used are:

coordenadas cartesianas de un punto =	$\mathbf{x}, \mathbf{y}$	= cartesian coordinates of a point.
índices cuyo rango es 1, 2, 3 (se entiende la convención de suma) =	i, j, k, p, q	= indices whose range is 1, 2, 3, (summation convention is understood).
índice cuyo rango es 1, 2 (se entiende la convención de suma) =	α	= index whose range is 1, 2 (summation covention is understood).
desplazamiento asociado con onda elástica fuera y dentro de la inhomogeneidad, respectivamente =	$\mathbf{u}, \mathbf{v}$	= displacement associated with an elastic wave outside and inside the inhomogeneity, respectively
componente regular y componente de radiación al exterior de $\mathbf{u}$, respectivamente =	$\mathbf{u}^0, \mathbf{u}'$	= regular component and outward radiation component of $\mathbf{u}$, respectively.
función delta de Dirac y de Kronecker, respectivamente =	$\delta(t), \delta_{ij}$	= Dirac's delta function and Kronecker's delta, respectively.
tensor elástico y densidad, respectivamente =	C_{ijpq}, ρ	= elastic tensor and density, respectively.
perturbaciones =	C^1_{ijpq}, ρ^1	= perturbations.
$C_{ijpq} \dfrac{\partial u_p}{\partial x_q}$ = tensor de esfuerzo =	$\tau_{ij}(\mathbf{u})$	$= C_{ijpq} \dfrac{\partial u_p}{\partial x_q}$ = stress tensor.
una región y su frontera, respectivamente =	R, S	= a region and its boundary, respectively.
subregión de R donde las propiedades elásticas del medio son perturbadas y frontera de R^1 respectivamente =	R^1, S^1	= subregion of R where the elastic properties of the medium are perturbed and boundary of R^1, respectively.
desplazamientos producidos por un impulso unitario concentrado en la dirección-k que actúa en $\mathbf{y}$ al tiempo $t = 0$. =	$G_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$	= displacements produced by a concentrated unit impulse in the k-direction acting at $\mathbf{y}$ on time $t = 0$.

función de Green para radiación al exterior, con singularidad en **y**, y fuerza concentrada en la dirección-k =	$G_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	= Green's function for outward radiation, with singularity at **y** and concentrated force in the k-direction.
esqueleto de la inhomogeneidad delgada =	S_0	= skeleton of the thin inhomogeneity.
puntos del esqueleto =	$g_1(s_1, s_2)$	= points of the skeleton.
parámetros que marcan los puntos del esqueleto =	s_1, s_2	= parameters labelling the points of the skeleton.
funciones que prescriben la forma de las interfases =	h_1, h_2	= functions prescribing the shape of the interfaces.
vector normal unitario al esqueleto =	e	= unit normal vector to the skeleton.
vector normal unitario a S_0 y S^1 =	$\mathbf{n}$	= unit normal vector to S_0 and S^1.
vectores tangenciales unitarios al esqueleto =	$\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2$	= unit tangential vectors to the skeleton.
constantes de Lame =	λ, μ	= Lame's constants.
discontinuidades de salto a través de cualquier interfase de la función dentro de los corchetes =	$[\ ]$	= jump discontinuity across any interface of the function inside the brackets.

BIBLIOGRAFIA / *BIBLIOGRAPHY*

DE HOOP, A. T. 1958. Representation Theorems for the Displacement of an Elastic Solid and their Application to Elastodynamic Diffraction Theory. Sci. D. Thesis, Tachnische Hogeschool, Delft.

HERRERA, I. 1964a. On a Method to obtain the Green's Function for a Multilayered Half Space. *Bull. Seismol. Soc. America*, 54:1087-1096.

— 1964b. A Perturbation Method for Elastic Wave Propagation, I – Non-parallel Boundaries. *Jour. Geophys. Res.*, 69(18) :

— 1964c. Contribution to the Linearized Theory of Surface Wave Transmision. *Jour. Geophys. Res.*, 69(22) :

HERRERA, I. & A. K. MAL. 1965. A Perturbation Method for Elastic Wave Propagation, II – Small Inhomogeneities. *Jour. Geophys. Res.*, 70(4) :

HUDSON, J. A. & L. KNOPOFF. 1964. Transmision and Reflection of Surface Waves at a Corner. *Jour. Geophys. Res.* 69:1648-1653.

KARAL, F. C. & J. B. KELLER. 1964. Elastic Electromagnetic and Other Waves in a Random Medium. *Jour. Mathem. Phys.* 5:537-547.

KNOPOFF, L. 1956. Diffraction of Elastic Waves. *Jour. Accustic Soc. America*, 28: 217-219.

KNOPOFF, L. & J. A. HUDSON. 1964a. Scattering of Elastic Waves by Small Inhomogeneities. *Jour. Acoustic Soc. America*, 36:338-346.

— 1964b. Transmission of Long Waves past a Continental Margin. *Jour. Geophys. Res.* 69:1645-1653.

MAL, A. K. 1962a. On the Frequency Equation for Love Waves due to Abrupt Thickening of the Crustal Layer. *Geofisica Pura e Applic.*, 52:59-68.

— 1962b. Alternation of Love Waves in a Low Period Range near a Volcanic Island Margin. *Geofisica Pura e Applic.*, 51:47-58.

OBUKHOV, G. G. 1963. The Effect of Periodic Irregularities in a Relief on the Disperssion Curves of Surface Seismic Waves. *Izvetiya Akad. Nauk C.C.C.P.*, Geophys. Ser., No. 4 (en ruso) (in russian).