

III CONFERENCIA TÉCNICA SOBRE HURACANES Y METEOROLOGÍA TROPICAL TECHNICAL CONFERENCE ON HURRICANES AND TROPICAL METEOROLOGY

México, D. F., Jun. 6-12, 1963

9a. SESIÓN

9th. SESSION

SESIÓN GENERAL (II)
GENERAL SESSION (II)

UN EJEMPLO DE LABORATORIO DE CONVECCION PENETRANTE *

W. V. R. MALKUS **

RESUMEN

Una capa horizontal de agua, enfriada a menos de 4°C en la superficie inferior, puede convergir al agua establemente estratificada encima del nivel de máxima densidad. Se propone una teoría cuantitativa para el régimen plenamente turbulento de esta convección penetrante, encontrándose una estructura extrema para la región de penetración con base sólo en las propiedades inerciales del flujo. Los transportes de calor pronosticados y las profundidades de penetración concuerdan con la limitada cantidad de datos experimentales disponibles.

INTRODUCCION

La tropopausa atmosférica, el termoclinal oceánico y la fotosfera solar son procesos dinámicos fluidos controlados por el flujo térmico que los atraviesa. En un lado de estas regiones de transición el calor se conduce por convección turbulenta; en el otro lado la radiación, la conducción o la advección estacionaria son responsables del flujo. La estructura media y la posición de dichas regiones dependen del equilibrio entre la convección penetrante y el mecanismo del flujo térmico contrario.

Los estudios mecanísticos previos sobre convección penetrante se concentraron en el movimiento vertical de los elementos fluidos individuales dentro de capas estables prescritas. La determinación de aquella capa estable estadísticamente estacionaria que resultaría de una penetración continua y las consecuentes modificaciones de la convección no se han explorado.

En este estudio se describe un ejemplo particularmente sencillo de convección penetrante. Se trazó una teoría cuantitativa para su estructura estadística y los resultados se compararon con las observaciones de laboratorio.

* *Publicación Núm. 300, Instituto de Geofísica y Física Planetaria, Universidad de California.*

** *Instituto de Geofísica y Física Planetaria, Universidad de California, Los Angeles, California.*

A LABORATORY EXAMPLE OF PENETRATIVE CONVECTION *

W. V. R. MALKUS **

ABSTRACT

A horizontal layer of water, cooled below 4°C on its bottom surface, can convect into the stably stratified water above the level of maximum density. A quantitative theory of this penetrative convection is proposed for the fully turbulent regime. An extreme structure for the region of penetration is found, based on only inertial properties of the flow. The predicted heat transports and depths of penetration agree with the limited amount of experimental data which are available.

INTRODUCTION

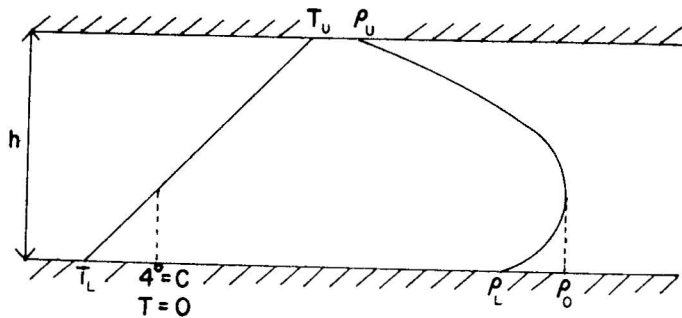
The atmospheric tropopause, the oceanic thermocline and the solar photosphere are fluid dynamic processes controlled by the heat flux through them. On one side of these transition regions heat is carried by turbulent convection. On the other side radiation, conduction, or steady advection is responsible for the flux. The mean structure and position of these regions depend on the balance struck between the penetrating convection and the competing heat flux mechanism.

Previous mechanistic studies of penetrative convection have concentrated on the vertical motion of individual fluid elements into prescribed stable layers. The determination of that statistically-steady stable layer which would result from continuing penetration and the consequent modifications of the convection, have not been explored.

In this study a particularly simple example of penetrative convection is described. A quantitative theory for its statistical structure is outlined and the results are compared with the laboratory observations.

* *Publication No. 300, Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California.*

** *Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California, Los Angeles, California.*



CONVECCION PENETRANTE EN AGUA

El agua tiene la afortunada propiedad de alcanzar densidad máxima a 4°C. Así, si una capa horizontal de agua se enfría por abajo hasta menos de 4°C, puede haber convección entre el fondo y al nivel de 4°C. Si la parte superior de la capa de agua se sostiene a una temperatura considerablemente mayor de 4°C, entonces se puede producir una transición interna entre los mecanismos convectivos y conductivos para el flujo térmico. A falta de movimiento, las estructuras de temperatura y densidad en dicha capa de agua se ilustran en la Fig. 1. En las regiones donde puede haber movimiento convectivo, la relación entre densidad y temperatura está dada por:

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha T^2) \quad (1)$$

donde ρ es la densidad; ρ_0 la densidad máxima; T la temperatura medida desde el punto de 4°C y $\alpha = 7.68 \cdot 10^{-6} / (^\circ\text{C})^2$ para el agua. El comportamiento de amplitud finita inicial y de estabilidad de este perfil de conducción fueron estudiados por Veronis (1963). Su principal conclusión fue que los disturbios finitos llegan a dominar el flujo bajo condiciones para las cuales los disturbios infinitesimales son completamente estables. Los resultados experimentales (inéditos) de Furumoto y Rooth sugieren que el flujo inicial es "turbulento" y que el flujo térmico inicial satisface la ley asintótica prevista por el análisis de la capa de frontera. Los perfiles de densidad y temperatura media hipotéticos para el régimen post-inestable de flujo se indican en la Fig. 2. La región inicialmente estable, está profundamente penetrada por el agua más densa. La "estratósfera" está comprimida en la vertical hasta que los gradientes termales sean suficientes para producir el flujo térmico requerido para un estado estacionario en toda la capa. El problema principal planteado en este trabajo concierne a la estructura (s) y extensión vertical (d_1) de la región de penetración. Se verá que la posición media (d) de la región penetrante está totalmente determinada por el flujo térmico turbulento.

FLUJO TERMICO TURBULENTO Y PROFUNDIDAD DE PENETRACION

Estudios de convección turbulenta simétrica en capas horizontales de fluidos normales muestran que el flujo térmico es independiente del espaciamiento entre superficies sólidas.

Fig. 1.—Estructura de densidad y temperatura de una capa horizontal de agua en ausencia de movimiento.

Fig. 1.—Temperature and density structure of a horizontal layer of water in the absence of motion.

PENETRATIVE CONVECTION IN WATER

Water has the fortunate property of a density maximum at 4°C. Hence, if a horizontal layer of water is cooled from below to less than 4°C, convection can occur between the bottom and the 4°C level. If the top of the layer of water is held at a temperature considerably larger than 4°C, then one can produce an internal transition between the convective and conductive mechanisms for heat flux. In the absence of motion, the temperature and density structure in such a water layer is depicted in Fig. 1. In the regions in which convective motion can occur, the relation between density and temperature is given by

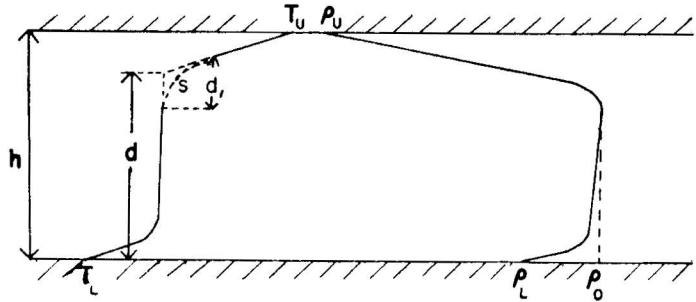
where ρ is the density; ρ_0 the maximum density; T is the temperature measured from the 4°C point, and $\alpha = 7.68 \cdot 10^{-6} / (^\circ\text{C})^2$ for water. The stability and initial finite amplitude behavior of this conduction profile have been studied by Veronis (1963). His principal conclusion is that finite disturbances can grow to dominate the flow under conditions for which infinitesimal disturbances are completely stable. The (unpublished) experimental results of Furumoto and Rooth suggest that the initial flow is "turbulent", and that the initial heat flux satisfies the asymptotic law anticipated from boundary layer analysis. Hypothetical mean temperature and density profiles for the post-unstable regime of flow are indicated in Fig. 2. The initially stable region is deeply penetrated by the denser water. The "stratosphere" is compressed in the vertical until the thermal gradients there, are sufficient to produce the heat flux required for a steady state in the entire layer. The principal question raised in this paper concerns the structure (s), and vertical extent (d_1) of the penetration region. It will be shown that the mean position (d) of the penetrative region is entirely determined by the turbulent heat flux.

TURBULENTO HEAT FLUX AND THE DEPTH OF PENETRATION

Studies of the symmetric turbulent convection in horizontal layers of normal fluids have shown that the heat flux becomes independent of the spacing between the solid surfaces.

Fig. 2.—Perfiles de densidad y temperatura medias hipotéticos debidos a una convección turbulenta penetrante.

Fig. 2.—Hypothetical temperature and density profiles due to penetrative turbulent convection.



Bajo esas condiciones el flujo térmico cinemático medio H es

Under those conditions the mean kinematic heat flux, H, is

$$|H| = \chi |\Delta T| \left(\frac{|\Delta\rho| g}{\rho_0 \chi \nu R_c^1} \right)^{1/3} \tag{2}$$

donde χ es la conductividad termométrica, ν la viscosidad cinemática, g la aceleración de gravedad, ΔT la diferencia entre la temperatura media del fluido y la temperatura a una frontera, $\Delta\rho$ la diferencia entre la densidad media y la densidad a una frontera y $R_c^1 = 125$ un número de Rayleigh crítico determinado por condiciones de estabilidad medias en una región de frontera.

where χ is the thermometric conductivity, ν is the kinematic viscosity, g is the acceleration of gravity, ΔT is the difference between the mean temperature of the fluid and the temperature at a boundary, $\Delta\rho$ is the difference between the mean density and the density at a boundary, and $R_c^1 = 125$ is a critical Rayleigh number determined by mean stability conditions in a boundary region.

Un estudio (para ser publicado por separado) de las condiciones de estabilidad en un perfil de densidad de frontera de carácter parabólico llevó a un número de Rayleigh crítico estimado en $R_c = 125: \pi^2/3$. Así, podemos adelantarnos a concluir que el flujo térmico turbulento en el problema de convección penetrante está dado por la Ec. 2, con R_c^1 reemplazado por R_c .

A study (to be published separately) of the stability conditions in a boundary density profile of parabolic character has lead to an estimated critical Rayleigh number $R_c = 125: \pi^2/3$. Hence we may tentatively conclude that the turbulent heat flux in the penetrative convection problem is given by Eq. 2, with R_c^1 replaced by R_c .

De las Ecs. (1) y (2) tenemos

From Eqs. 1 and 2 one finds

$$|H| = |T_L|^{5/3} \left(\frac{\alpha g \chi^2}{\nu R_c} \right)^{1/3} \tag{3}$$

En el estado estacionario el flujo térmico en la "estratósfera" estable puede igualar al flujo dado por la Ec. (3). Refiriéndose a la Fig. 2, tenemos

In the steady state, the heat flux in the stable "stratosphere" must equal the flux given by Eq. 3. Referring to Fig. 2, one writes

$$|H| = \frac{\chi T_U}{h-d} \tag{4}$$

Por lo tanto

Therefore

$$\frac{d}{h} = \left[1 - \frac{T_U}{|T_L|} \left(\frac{R_c}{R} \right)^{1/3} \right] \tag{5}$$

donde el número de Rayleigh general se define como

where the overall Rayleigh number is defined as

$$R = \frac{\alpha g T_L^2 h^3}{\chi \nu} \tag{6}$$

El número de Nusselt efectivo del flujo es la relación entre

The effective Nusselt number of the flow is the ratio of the

el flujo térmico medio y el flujo térmico que resultaría de la sola conducción. De las Ecs. (3) y (4) encontramos que

$$N_c \frac{|H| h}{\pi (T_U - T_L)} = \frac{|T_L|}{(T_U - T_L)} \left(\frac{R}{R_c} \right)^{1/2} \quad (7)$$

Las fórmulas anteriores han descuidado toda pequeña desviación de la temperatura de la región central desde 4°C (es decir $T = 0$). La magnitud de tal desviación se calculará en la siguiente sección.

LA REGION DE PENETRACION

La profundidad d , introducida en el análisis anterior, sólo tiene significado si la profundidad de penetración, d_1 en la Fig. 2, es pequeña por comparación. En esta sección se establecerá un límite superior sobre d_1 y al hacerlo se encontrará una estructura explícita (s) para la región de penetración.

Cuando un elemento convectivo, que ha surgido a través de la capa inestable, entra en la región estable ganará calor y perderá momento al mezclarse con sus alrededores menos densos. Sin embargo, aun si estos complejos procesos de mezcla no trabajaran, el elemento convectivo sería desacelerado por las solas fuerzas del cuerpo. Así puede encontrarse un límite superior sobre la penetración considerando sólo la reacción inercial causada por la gravedad. Este límite superior puede alcanzarse en el flujo real si por la rapidez relativa del proceso de deceleración perduran núcleos no diluidos de elementos convectivos hasta que los elementos se inactivan.

En el flujo estadísticamente estacionario indicado en la Fig. 2 el flujo térmico medio debido a convección más el flujo conductivo es independiente de la altura. Puede formularse por ello un problema cerrado para la penetración no-disipante con ayuda del requisito que

$$H = -\pi \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \overline{WT} = H(z) \quad (8)$$

donde la barra indica un promedio horizontal. Nos imaginamos entonces a los elementos convectivos alcanzando la cima de la capa convectiva con la velocidad vertical s.m.n. y W y un exceso de temperatura media δT para que

$$W \delta T = \overline{WT}, \quad W_{\max} \delta T = H \quad (9)$$

Sin embargo, al penetrar los elementos en la capa estable, más y más del flujo térmico (constante) es reemplazado por conducción. En esta idealización no-disipante δT no cambia, pero cuando el movimiento vertical finalmente termina

mean heat flux to that heat flux which would occur due to conduction alone. From Eqs. 3 and 4 one finds that

The preceding formulae have neglected any small departure of the mid-region temperature from 4°C (i. e., $T = 0$). The magnitude of such a departure is to be estimated in the following section.

THE REGION OF PENETRATION

The depth, d , introduced in the preceding analysis, has meaning only if the penetration depth, d_1 in Fig. 2, is small in comparison. In this section an upper bound on d_1 will be established. In so doing an explicit structure for the penetration region, (s), will be found.

When a convective element, which has risen through the unstable layer, enters the stable region, it will gain heat and lose momentum by mixing with its less dense surroundings. However, even if these complex mixing processes were not a work, the convective element would be decelerated by body forces alone. Hence an upper limit on penetration can be found by considering only the inertial reaction caused by gravity. This upper limit may be approached in the real flow if, due to the relative swiftness of the decelerating process, undiluted cores of convective elements remain until the elements are brought to rest.

In the statistically steady flow indicated in Fig. 2, the mean heat flux due to convection plus the conductive flux is independent of height. Hence a closed problem for non-dissipative penetration can be formulated with the aid of the requirement that

where the overbar indicates a horizontal average. We picture then, the convective elements reaching the top of the convective layer with the n.m.s. vertical velocity W and a mean temperature excess δT , such that

However, as elements penetrate into the stable layer, more and more of the (constant) heat flux is taken over by conduction. In this non-dissipative idealization δT does not change, but when the vertical motion finally stops,

$$H = -\pi \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \quad (10)$$

La desaceleración del elemento convectivo conservador en el ambiente \bar{T} está dada por la relación (Boussinesq)

$$\frac{\partial \frac{1}{2} W^2}{\partial z} \simeq -\alpha g \bar{T}^2 \tag{11}$$

cuando $\delta T \ll \bar{T}$. Por tanto las Ecs. 8, 9 y 11 son relaciones para las tres incógnitas W , \bar{T} y δT en términos de H y W_{\max} . El valor de H es dado por la Ec. 3 de la sección anterior. Una frontera superior para W_{\max} se discutirá pronto. Al eliminar W de las Ecs. 8 y 11 se obtiene la relación no-lineal.

$$\left[\left(\frac{H}{\chi} \right) + \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right] \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} = - \left(\frac{\alpha g H^2}{\chi^2 W_{\max}^2} \right) \bar{T}^2 \tag{13}$$

con las condiciones a la frontera en que $\delta \bar{T} / \delta z \simeq 0 \simeq$ en el régimen de convección mientras $\delta \bar{T} / \delta z = -H / \chi$ al límite de penetración.

Antes de discutir la solución de la Ec. 13 podemos establecer la magnitud de la región de penetración por un análisis escalar. Que esa altura d_1 sobre la cual todos los términos de la Ec. 13 son de magnitud comparable es del orden

$$d_1 = \left(\frac{\chi^2 W_{\max}^2}{\alpha g H^2} \right)^{1/3} \tag{14}$$

Es conveniente definir las variables

$$\varphi = \frac{\pi}{|H| d_1} \quad , \quad \psi = \frac{W}{W_{\max}} \tag{15}$$

Con la Ec. 14 se pueden escribir las Ecs. 8 y 11 como

$$\varphi^1 = 1 - \psi \tag{16}$$

y and

$$\psi^2 = -\varphi^2 \tag{17}$$

donde el exponente primo denota una diferenciación respecto a $z_1 = z/d_1$. Así la Ec. 13 se convierte en

$$\{ (1 - \varphi')^2 \}^1 = -\varphi^2 \tag{18}$$

No se ha encontrado solución directa a la Ec. 18 no-lineal de segundo orden. Sin embargo, por las Ecs. 16 y 17 se tiene una solución paramétrica eliminando z e integrando. Esta solución es

$$\varphi^3 = 2 \psi^3 - 3 \psi^2 + 1 \tag{19}$$

donde se usa la condición a la frontera $\varphi = 0$ para $\psi = 1$ para determinar la constante de integración. En la Ec. 19

The deceleration of the conservative convective element in the environment, \bar{T} , is given by the (Boussinesq) relation

when $\delta T \ll \bar{T}$. Therefore, Eqs. 8, 9 and 11 are relations for the three unknowns W , \bar{T} and δT in terms of H and W_{\max} . The value of H is given by Eq. 3 of the previous section. An upper boundary for W_{\max} will be discussed shortly. On the elimination of W from Eqs. 8 and 11, one obtains the non-linear relation

with the boundary conditions that $a\bar{T}/az \simeq 0 \simeq \bar{T}$ in the convection regime, while $a\bar{T}/az = -H/\chi$ at the limit of penetration.

Before discussing the solution of Eq. 13, we may establish the magnitude of the region of penetration by a scale analysis. That height d_1 , over which all the terms of Eq. 13 are of comparable magnitude is of order

It is convenient to define the variables

Using Eq. 14, one may now write Eqs. 8 and 11 as

where the superscript prime denotes differentiation with respect to $z_1 = z/d_1$. Hence Eq. 13 becomes

A direct solution of the second-order, non-linear, Eq. 18 has not been found. However, a parametric solution follows easily from Eqs. 16 and 17 by eliminating z and integrating. This solution is

where the boundary condition that $\varphi = 0$ for $\psi = 1$ has been used to determine the constant of integration. From

se nota que la temperatura media al nivel de penetración máxima está determinada por

$$\varphi (\psi = 0) = \varphi_p = 1 \tag{20}$$

También, si se mide z hacia abajo desde esa altura de penetración máxima

$$z_1 = \int_1^\varphi \frac{d\varphi}{1-\psi} \tag{21}$$

de la Ec. 16 donde la relación entre φ y ψ está dada por la Ec. 19 cúbica. Las relaciones $\varphi = \varphi(z)$ y $\psi = \psi(z)$ se obtienen de la Ec. 21 por una cuadratura mecánica directa.

Un límite superior para W_{\max}^2 y por tanto, un límite superior para d_1 es

$$\frac{1}{2} W_{\max}^2 \leq (\alpha g T_L^2 d) \tag{22}$$

que se obtendría de la caída libre de un elemento convectivo de fluctuación máxima a través de la capa convectiva entera. Una mejor estimación es (Malkus, 1954)

$$\frac{1}{2} W_{\max}^2 \leq \left(\frac{1}{2\sigma} \right) (\sigma g T_L^2 d) \tag{23}$$

donde $\sigma = \nu/\chi$ es el número de Prandtl del fluido. La Ec. 23 ha sido probada experimentalmente en capas de convección simétrica hasta $R = 10^9$.

Así, pues, de la Ec. 3 para H , de la Ec. 14 para d_1 , y de la Ec. 22 para W_{\max}

$$\frac{d_1}{d} = \left(\frac{h}{d} \right)^{2/3} \left(\frac{R_c}{R} \right)^{2/9} \tag{24}$$

en tanto que si se utiliza la Ec. 23 para W_{\max}^2 d_1 resulta $(2\sigma)^{1/2}$ menor. La Ec. 24 afirma que d_1 se convierte en una fracción cada vez menor de la profundidad total al aumentar R , apoyando la sugestión de la Fig. 2 y dando a d una significado asintótico explícito sobre la "posición" de la región de transición. También a partir de las Ecs. 3, 9 y 23.

$$\frac{\delta T}{|T_L|} = \left[\left(\frac{h}{\alpha} \right) \frac{1}{R_c} \right]^{1/2} \left(\frac{R_c}{R} \right)^{1/6} \tag{25}$$

para que δT se haga cada vez más pequeña al aumentar R justificando la simplificación en la Ec. 11. Finalmente, la

Eq. 19 one notes that the mean temperature at the height of maximum penetration is determined by

Also, if z , is measured downward from this height of maximum penetration,

from Eq. 16, where the relation between φ and ψ is given by the cubic, Eq. 19. The relation $\varphi = \varphi(z)$ and $\psi = \psi(z)$ are found from Eq. 21 by straightforward mechanical quadrature.

An upper bound for W_{\max}^2 hence an upper bound for d_1 is

which would be obtained by the free fall of a convective element of maximum buoyancy through the entire convective layer. A better estimate is found to be (Malkus, 1954)

where $\sigma = \nu/\chi$ is the Prandtl number of the fluid. Eq. 23 has been tested experimentally in symetric convection layers up to $R = 10^9$.

Therefore, from Eq. 3 for H , from Eq. 14 for d_1 , and from Eq. 22 for W_{\max}^2

while if Eq. 23 for W_{\max}^2 is used, d_1 is $(2\sigma)^{-1/2}$ smaller. Eq. 24 asserts that d_1 becomes a smaller and smaller fraction of the total depth as R increases, supporting the suggestion of Fig. 2 and giving d an explicit asymptotic significance on the "position" of the transition region. Also from Eqs. 3, 9 and 23

so that δT becomes smaller and smaller as R increases, justifying the simplification in Eq. 11. Finally, the mean

temperatura media, a la altura de penetración máxima por las Ecs. 3, 14, 15 y 23, es

temperature at the height of maximum penetration, from Eqs. 3, 14, 15 and 23, is

$$\frac{\overline{T}_P}{|T_L|} = \left(\frac{d}{d}\right)^{1/3} \left(\frac{R}{R_c}\right)^{1/9} \left(\frac{1}{2\sigma}\right)^{1/3} \quad (26)$$

mientras que por la Ec. 22 un límite superior para \overline{T}_P es mayor que el anterior por el factor $(2\sigma)^{1/3}$.

while, from Eq. 22, and upper bound for \overline{T}_P is greater than the above by the factor $(2\sigma)^{1/3}$.

COMPARACION CON LAS OBSERVACIONES ¹

COMPARISON WITH THE OBSERVATIONS ¹

La única deducción que puede ser probada con los datos disponibles es la Ec. 7 para el número de Nusselt. Como fue mencionado previamente, la dependencia cualitativa $R^{1/3}$ parece estar bien establecida aunque la cantidad de datos es bastante limitada. Los resultados cuantitativos para R_c , de la tabulación de N_u , $h(T_u)$ y T_L dados por Furumoto y Rooth es

The only deduction which can be tested with the available data is Eq. 7 for the Nusselt number. As mentioned previously, the qualitative $R^{1/3}$ dependence seems well established although the amount of data is quite limited. The quantitative results for R_c , from the tabulation of N_u , $h(T_u)$, and T_L given by Furumoto and Rooth, is

$$R_c = 460 \pm 60 \quad (27)$$

correspondiendo a un error medio de $\pm 5\%$ en sus determinaciones de transporte térmico. Por tanto, las observaciones incluyen la estimación de $R_c \simeq 411$, obtenida del requisito de estabilidad de la región a la frontera.

corresponding to a mean error of $\pm 5\%$ in their heat transport determinations. Hence the observations include the estimate of $R_c \simeq 411$, obtained from the boundary region stability requirement.

Aunque no hay datos para la región de penetración, sin duda alguna diferirá de la estructura extrema idealizada que da la Ec. 21.

Although no adequate data for the region of penetration yet exists, undoubtedly it will differ from the idealized extreme structure given in Eq. 21.

Sin embargo, parece deseable obtener esos datos antes de agregar procesos de arrastre al modelo de penetración. Puesto que las desviaciones cualitativas de extremos estructurales de la Ec. 21 serán muy pequeñas, este experimento puede ser un valioso instrumento para probar ideas concernientes a disipación en elementos convectivos penetrantes.

However, it would seem most desirable to obtain this data before adding entrainment processes to the penetration model. As qualitative departures from the extreme structure of Eq. 21 may be quite small, this experiment can be a valuable tool for testing ideas concerning the dissipation in the penetrative convective elements.

Una primera y sencilla prueba de utilidad del extremo como descripción de orden zero será la observación de la temperatura media a penetración máxima. Por la Ec. 26 esta temperatura es menos que $|T_L|$ sólo para $R \leq (2\sigma)^3 R_c$. En agua, $\sigma = 7$ y por tanto, $R \leq 10^6$ para penetrar más allá del nivel de 8°C .

A first, and simple, test of the usefulness of the extreme as a zeroth-order description, will be the observation of the mean temperature at maximum penetration. From Eq. 26, this temperature is less than $|T_L|$ only for $R \leq (2\sigma)^3 R_c$. For water, $\sigma = 7$, hence $R \geq 10^6$ for penetration beyond the 8°C level.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAPHY

MALKUS, W. V. R. 1954. *Proc. Royal Soc. London*, A, 225:185-195, 196-212.
 VERONIS, G. 1963. *Astrophys. Jour.*, 137:641-663.

¹ Furumoto y Rooth han llevado a cabo los experimentos iniciales sobre convección penetrante en el agua durante el Programa de Estudio de Verano de Dinámica Geofísica de Flúidos en la Woods Hole Oceanographic Institution, Woods Hole, Mass. Se pueden obtener copias del informe de los participantes de ese programa escribiendo a la Institución.

¹ Furumoto and Rooth have performed the initial experiments on penetrative convection in water during the 1961 Summer Study Program in Geophysical Fluid Dynamics at the Woods Hole Oceanographic Institution, Woods Hole, Mass. Copies of the report of participants in this program can be obtained by writing to the Institution.