MATERIALES VISCOELASTICOS QUE ADMITEN ONDAS SIMPLES

ISMAEL HERRERA R. *

INTRODUCCION

Trabajos recientes sobre la teoría de materiales con memorai (Coleman, B. D. y M. E. Gurtin, 1965a, 1965b; Coleman, B. D., M. E. Gurtin e I. Herrera, 1965; Herrera, I. y M. E. Gurtin, 1965; Varley, E., 1965) relativos al estudio de superficies singulares en esos materiales han aclarado mucho la estructura básica de las ecuaciones que gobiernan el movimiento. Se ha demostrado que con hipótesis de continuidad apropiadas, se comportan en muchos aspectos como ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas.

Los estudios antes mencionados pretendían establecer las condiciones necesarias satisfechas por superficies singulares, pero no tocaban las cuestiones de existencia. Antes de que dichos trabajos se publicaran se creía de modo general que las superficies de discontinuidad no podían existir en materiales viscoelásticos porque desaparecían por cualquer "mecanismo disipante" (Truesdell, C. A. y W. Noll, 1965). Por ello, prevalecieron algunas dudas sobre la existencia de esas superficies, aún después de la publicación de tales estudios sobre superficies singulares. Recientemente Pipkin (1965) construyó un tipo particular de fluido viscoelástico para el cual pudo exhibir soluciones con choques.

En la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, el estudio de ondas simples tiene especial interés porque ilustra sobre la estructura de las soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales parciales. En este trabajo se realiza un estudio similar para las ecuaciones de viscoelasticidad lineal, restringiéndose la atención a movimientos uni-dimensionales. Se demuestra que sólo para un tipo muy especial de ley de relajación las ondas simples son soluciones admisibles de la ecuación del movimiento. Sin embargo, debe recordarse que estos resultados únicamente son válidos cuando se definen "ondas simples" de la manera en que se hace en este trabajo. La definición de ondas

* *Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D. F., México.*

VISCOELASTIC MATERIALS ADMITTING SIMPLE WAVES

ISMAEL HERRERA R. *

INTRODUCTION

Recent work on the theory of materials with memory (Coleman, B. D. and M. E. Gurtin, 1965a, 1965b; Coleman, B. D., M. E. Gurtin and I. Herrera, 1965; Herrera, I. and M. E. Gurtin, 1965; Varley, E., 1965) concerned with the study of singular surfaces in such materials has enlightened very much the basic structure of the governing equations of motion. It has been shown that under an appropriate smoothness hypothesis they behave in many respects like hyperbolic partial differential equations.

The studies mentioned before were concerned with establishing the necessary conditions satisfied by singular surfaces, but left untouched questions of existence. Before those papers were published there was a widespread belief that surfaces of discontinuity could not exist in viscoelastic materials because they were wiped out by any "dissipative mechanism" (Truesdell, C. A. and W. Noll, 1965). Therefore, some doubts on the existence of such surfaces prevailed even after the publication of such studies on singular surfaces. Recently Pipkin (1965) constructed a particular type of viscoelastic fluid for which he was able to exhibit solutions with shocks.

In the theory of hyperbolic partial differential equations the study of simple waves has special interest because they give insight on the structure of the solutions of the corresponding partial differential equations. In this paper a similar study is carried out for the equations of linear viscoelasticity with attention restricted to one-dimensional motions. It is shown that only for a very special type of relaxation law, simple waves are admissible solutions of the equation of motion. However, it must be recalled that these results are valid only when "simple waves" are defined in the manner they are defined in this work. The definition of simple wave here given is a natural one, and it is not

* *Institute of Geophysics, National Autonomous University of Mexico, México, D. F., México.*

simples dada ahora es la natural y parece improbable que para algunas definiciones alternas pueda encontrarse una clase más amplia de leyes de relajación.

En otro trabajo (Herrera, I., 1965), el autor ha formulado la teoría de las representaciones de Riemann para la viscoelasticidad demostrando la existencia y unicidad de las funciones de Riemann. Para materiales que admiten ondas simples es posible exhibir explícitamente las funciones de Riemann. En la Sección 3 se construyen estas funciones.

Pueden construirse fácilmente ejemplos de soluciones con discontinuidades débiles para estos materiales, dándose en la Sección 4 ejemplos que complementan los construidos por Pipkin.

Tal vez la implicación más interesante del trabajo es que demuestra que la presencia de memoria no implica dispersión de ondas, ya que en el tipo de materiales que se consideran ahora, las ondas periódicas se propagan con una veracidad que es independiente de la frecuencia.

Por último, desde un punto de vista práctico, los resultados que se mencionan tienen interés, pues los movimientos en dichos materiales son de una estructura muy simple. Así, es posible usarlos como aproximación del comportamiento de algunos materiales reales. Por ejemplo, los resultados obtenidos por Coleman, Gurtin y Herrera (1965a y b) muestran que la velocidad e índices de crecimiento y disipación de frentes de ondas dependen solamente del módulo elástico E y del valor inicial de la función de relajación G(o). Ahora, dado cualquier material lineal con memoria, es posible construir un material de la clase considerada aquí para el cual los valores de E y G(o) sean iguales a los del material dado y en consecuencia, con idéntico comportamiento de los frentes de onda al material dado. Ello sugiere que sería apropiado desarrollar técnicas de perturbación como aproximación a tipos de materiales más complicados a partir de las clases de materiales consideradas ahora. Tal procedimiento debería ser más prometedor que otro que usara un material elástico como punto de partida, pues los frentes de ondas podrían predecirse correctamente y la perturbación emplearse solamente como aproximación de la parte subsecuente.

probable that for some alternative definitions a wider class of relaxation laws will be encountered.

In another paper (Herrera, I., 1965) the author has formulated a Riemann representation theory for viscoelasticity and has shown the existence and uniqueness of Riemann's functions. For materials admitting simple waves it is possible to exhibit the Riemann's functions explicitly. In Section 3 these functions are constructed.

Examples of solutions with weak discontinuities can easily be constructed for these materials. Examples supplementing those already constructed by Pipkin, are given in Section 4.

Perhaps the most interesting implication of the paper is that it shows that the presence of memory does not imply wave dispersion, because in the type of materials considered here, periodic waves propagate wtih a velocity which is independent of the frequency.

Lastly, from a practical point of view, results reported here have interest, because motions in these materials have a very simple structure. Thus, it is possible to use them to approximate the behaviour of some real materials. For instance, the results obtained by Coleman, Gurtin and Herrera (1965a and b) show that velocity and rates of growth and decay of wave fronts depend on the elastic modulus E and the initial value of the relaxation function G(o) only. Now, given any linear material with memory, it is possible to construct a material of the class considered here, for which the values of E and G(o) are the same as those of the given material and therefore, for which the behaviour of the wave fronts is identical to that of the given material. This suggests that it would be appropiate to develop perturbation techniques to approximate more complicated types of materials starting from materials of the class considered here. Such a procedure would be more promising than one using an elastic material as the starting point because the wave fronts would be correctly predicted and the perturbation would only be used to approximate the subsequent part.

2—MATERIALES QUE ADMITEN ONDAS SIMPLES

Consideremos la ecuación

2—MATERIALS WHICH ADMIT SIMPLE WAVES

Consider the equation

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\,\frac{\partial u}{\partial x}(\tau)\,d\tau = 0 \qquad (2.1)$$

que gobierna movimientos unidimensionales de cuerpos viscoelásticos homogéneos en ausencia de fuerzas de cuerpo. Arriba:

$E > 0$ es el módulo elástico

$\rho > 0$ es la densidad del material

$G(t\text{-}\tau)$ es la función de relajación. Aparece en la

which governs one-dimensional motions of homogeneous viscoelastic bodies in the absence of body forces.
Above:

$E > 0$ is the elastic modulus.

$\rho > 0$ is the density of the material

$G(t\text{-}\tau)$ is the relaxation function. It appears in the ecuación de movimiento como una función de $t - \tau$ pues las propiedades dinámicas del material se suponen invariantes de traslaciones en tiempo.

La supuesta homogeneidad implica que E, ρ y G son independientes de x.

Decimos que una solución para (2.1) definida para cada x real y para cada t real es una onda simple si es de la forma

equation of motion as a function of $t - \tau$ because the dynamic propierties of the material are assumed to be time translation invariant.

The homogeneity assumption implies that E, ρ and G are independent of x.

We say that a solution of (2.1) defined for every real x and every real t, is a simple wave if it is of the form

$$\mu(x, t) = e^{-\beta t} f(ct - x) \tag{2.2.a}$$

donde ρ es un número positivo, $f(t) \varepsilon C^2 (-\infty < t < \infty)$ y

where ρ is a positive number, $f(t) \varepsilon C^2 (-\infty < t < \infty)$ and

$$c^2 = E/\rho \tag{2.2.b}$$

El propósito de esta Sección es investigar la existencia de ondas simples, tales como

The purpose of this Section is to investigate the existence of simple waves, such that

$$f(t) = 0 \quad ; \quad \text{si / if} \quad t \leqslant 0 \tag{2.3}$$

El principal resultado queda establecido en el siguiente

The main result is established in the following

TEOREMA. Sea $G(t) \varepsilon C^2$ para $t \geqslant 0$. Entonces, la ecuación (2.1) admite ondas simples que satisface (2.3) si y sólo si

THEOREM. Let $G(t) \varepsilon C^2$ for $t \geqslant 0$. Then equation (2.1) admits simple waves satisfying (2.3) if, and only if

$$G(t) = -E\beta(2 - \beta t) e^{-\beta t} \tag{2.4}$$

PRUEBA. Antes de seguir la prueba del Teorema estableceremos el

PROOF. Before proceeding to prove the Theorem we establish the

LEMA. Sea $H(t) \varepsilon C(t \geqslant 0)$, y A y B dos números reales. Entonces la ecuación

LEMMA. Let $H(t) \varepsilon C(t \geqslant 0)$, and A and B be two real numbers. Then the equation

$$A f'(t) + B f(t) + \int_0^t H(t-\tau) f(\tau) d\tau = 0 \tag{2.5}$$

posee soluciones no-triviales $f(t) \varepsilon C^1 (-\infty < t < \infty)$, que satisfacen a (2.3) si y sólo si

possess non-trivial solution $f(t) \varepsilon C^1 (-\infty < t < \infty)$, satisfying (2.3) if, and only if

$$A = B = H(t) \equiv 0 \quad ; \quad t \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Cuando (2.6) se satisface, cualquier $f \varepsilon C^1$ resuelve (2.5).

When (2.6) is satisfied any $f \varepsilon C^1$ is solution of (2.5).

PRUEBA DEL LEMA. Es obvio que la condición (2.6) es suficiente para que existan soluciones no triviales. Así, necesitamos sólo demostrar que también es una condición necesaria. Suponiendo que exista una solución no trivial $f \varepsilon C^1$, entonces (2.5) puede escribirse

PROOF OF THE LEMMA. That condition (2.6) is sufficient for non-trivial solutions to exist is obvious. Thus, we need only to show that it is also a necessary condition. Assume that a non-trivial solution $f \varepsilon C^1$ exists. Then (2.5) may be written

$$A f'(t) + B \int_0^t f'(\lambda) d\lambda + \int_0^t H(t-\tau) \left[\int_0^\tau f'(\lambda) d\lambda \right] d\tau = 0 \tag{2.7}$$

La ecuación (2.7) es una ecuación integral para $f'(t)$. Si $A \neq 0$, (2.7) es un tipo de ecuación funcional en la cual se ha demostrado (véase, por ejemplo, Corolario 1 del Lema 4 en Barberán, J. e I. Herrera, 1965) que su única solución es la solución trivial.

Equation (2.7) is an integral equation for $f'(t)$. If $A \neq 0$, (2.7) is of a type of functional equation for which it has been shown (see, for example, Corollary 1 of Lemma 4 in Barberan, J. and I. Herrera, 1965) that its only solution is the trivial solution.

En consecuencia, $A \neq 0$ y

Therefore, $A \neq 0$ and

$$B\,f(t) + \int_0^t H(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau = 0 \tag{2.8}$$

Si $B \neq 0$, nuevamente es bien sabido que la única solución de (2.8) es la solución trivial. Así, $B = 0$ y

If $B \neq 0$, again it is well known that the only solution of (2.8) is the trivial solution. Thus, $B = 0$ and

$$\int_0^t H(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau = 0 \tag{2.9}$$

La ley de cancelación para la convolución (véase, por ejemplo, Gurtin, M. E. y E. Sternberg, 1962) implica

The cancellation law for the convolution (see, for example, Gurtin, M. E. and E. Sternberg, 1962) implies

$$H(t) = 0 \quad ; \quad t \geqslant 0 \tag{2.10}$$

Esto completa la prueba del Lema.

This completes the proof of the Lemma.

PRUEBA DEL TEOREMA. Las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) unidas implican que

PROOF OF THE THEOREM. Equations (2.1), (2.2) and (2.3) together, imply

$$-\rho\,(\beta^2 f - 2\,c\,\beta\,f')e^{-\beta t} + \int_{x/c}^{t} G\,(t-\tau)\,f''\,(c\,\tau - x)e^{-\beta\tau}\,d\,\tau = 0 \tag{2.11}$$

lo cual después de integración por partes se vuelve

which after integration by parts becomes

$$\left[2\,\rho\,c\,\beta + \frac{K(0)}{c}\right] f'(\eta) + \left[\frac{K'(0)}{c^2} - \rho\,\beta^2\right] f(\eta) + \frac{1}{c^3}\int_0^{\eta} K''\left(\frac{\eta-\lambda}{c}\right) f(\lambda)\,d\,\lambda = 0 \tag{2.12}$$

Donde

Where

$$\begin{aligned} \eta &= ct - x \\ K(t) &= G(t)e^{\beta t} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por el Lema (2.12) posee soluciones no-triviales si y sólo si

By the Lemma (2.12) posses non-trivial solutions, if and only if

$$K\,(0) = -2\,\rho\,c^2\,\beta = -2\,E\,\beta \tag{2.14.a}$$

$$K'\,(0) = \rho\,\beta^2\,c^2 = E\,\beta^2 \tag{2.14.b}$$

$$K''(t) = 0 \;\; \begin{matrix} ;\ \text{para cada} \\ ;\ \text{for every} \end{matrix} \;\; t = 0 \tag{2.14.c}$$

Las ecuaciones (2.2.b), (2.13) y (2.14) son válidas simultáneamente si y sólo si

Equations (2.2.b), (2.13) and (2.14) hold simultaneously if and only if

$$G(t) = -E\,\beta(2-\beta t)e^{\beta t} \tag{2.15}$$

y el Teorema se comprueba.

and the Theorem is proved.

Deben hacerse algunos comentarios sobre los resultados de esta Sección.

Some comments on the results of this Section are in order.

Por medio de la ecuación (2.15) podemos definir una familia de dos parámetros de relaciones esfuerzo-deformación y la forma de tales relaciones no depende de ρ. Según (2.15), la admisibilidad de ondas simples sólo depende de las relaciones esfuerzo-deformación y es independiente de la densi-

By means of equation (2.15) we can define a two-parameter family of stress-strain relations and the form of these relations does not depends on ρ. According to (2.15) admissibility of simple waves depends only on the stress strain relations and is independent of the density, i.e. if we dad, es decir, si tenemos un material que admite ondas simples y consideramos otro en que la relación esfuerzo-deformación es la misma pero diferente la densidad, entonces el segundo material también admite ondas simples.

have a material admitting simple waves and consider another one for which the stress-strain relation is the same but the density is different, then the second material also admits simple waves.

Diremos que una solución $u(x, t)$ de (2.1) partió del reposo en el punto x_0, si hay un número real t_0 tal que

We will say that a solution $u(x, t)$ of (2.1) started from rest at a point x_0, if there is a real number t_0 such that

$$u(x,t) = 0 \quad ; \quad \begin{matrix}\text{siempre que}\\ \text{whenever}\end{matrix} \quad t \leqslant t_0 . \tag{2.16}$$

Es interesante recordar el siguiente Teorema que puede expresarse usando la anterior definición.

It is interesting to recall the following Theorem which may be stated by using the above definition.

TEOREMA. Sea $u(x, t) \varepsilon C^2$ una solución para (2.1) sobre el espacio-tiempo total R^2. Supongamos que (2.15) es válida. Entonces, si u partió del reposo en cada punto

THEOREM. Let $u(x, t) \varepsilon C^2$ be a solution of (2.1) on the whole space-time R^2. Assume (2.15) is satisfied. Then if u started from rest at every point

$$u(x,t) = e^{-\beta t}\left[f(x+ct) + g(x-ct)\right] \tag{2.17}$$

donde f y g ε C^1 son dos funciones definidas sobre R^1.

where f and g ε C^1 are two functions defined on R^1.

PRUEBA. Escribamos

PROOF. Write

$$u(x,t) = e^{-\beta t} v(x,t) \tag{2.18}$$

y sustituyamos en (2.1) para obtener después de multiplicar por $e^{\beta t}$ y reacomodando

and substitute in (2.1) to obtain after multiplying by $e^{\beta t}$ and rearranging

$$E\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho\left(\beta^2 v - 2\beta\frac{\partial v}{\partial t}\right) = -\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)e^{\beta(t-\tau)}\frac{\partial^2 v}{dx^2}(\tau)\, dz$$

$$= -\int_{\infty}^{t} K(t-\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\tau)\, d\tau \tag{2.19}$$

Definamos

Define

$$F(x,t) = E\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{2.20}$$

Entonces

Then

$$\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\tau)\, d\tau = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)F(\tau)\, d\tau + \frac{\rho}{E}\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)F(\tau)\, d\tau + \frac{\rho}{E}K(0)\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \frac{\rho}{E}K'(0)\, v(x,t) \tag{2.21}$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} K''(t-\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\tau)\, d\tau$$

donde usamos la definición (2.13). Substituyendo (2.21) en (2.19) y usando (2.14) y (2.20) se sigue que

where we used definition (2.13). Substituting (2.21) into (2.19), and using (2.14) and (2.20) it follows

$$F(x,t) + \frac{E}{1}\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)F(\tau)\, d\tau = 0 \tag{2.22}$$

Para una x dada, la ecuación (2.22) es una ecuación integral para la función de t, $F(x, t)$. La única solución para (2.22) es la idénticamente cero porque suponiendo que exista una t_0 para cada x tal que

For a given x, equation (2.22) is an integral equation for the function of t, $F(x, t)$. The only solution of (2.22) is the identically zero because by assumption for every x, there is a t_0 such that

$$F(x, t) = 0 \quad ; \quad \text{siempre que / whenever} \quad t \leqslant t_0$$

Así, por la definición (2.20) de $F(x, t)$ tenemos

Thus, by the definition (2.20) of $F(x, t)$, we have

$$E\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

y consecuentemente

and therefore

$$v(x, t) = f(x + c\,t) + g(x - c\,t) \tag{2.23}$$

Según (2.18) se sigue (2.17).

From (2.18) it now follows (2.17).

La ecuación (2.17) puede interpretarse diciено que cualquier solución que partió del reposo en cualquier punto es la superposición de dos ondas que se mueven sin dispersión, pero que decaen con el tiempo. Obsérvese la analogía con los conocidos resultados de la ecuación de ondas.

Equation (2.17) may be interpreted as stating that any solution that started from rest at every point is the superpositoin of two waves which move without dispersion but which damp with time. Recall the analogy with the well known results for the wave equation.

3—LA FUNCION DE RIEMANN PARA UN MATERIAL QUE ADMITE ONDAS SIMPLES

En un trabajo previo (Herrera, I., 1965) el autor ha formulado un teorema de representación de Riemann para la viscoelasticidad. En el mismo trabajo se demostraba la existencia de la función de Riemann y se daba una caracterización de ella. El propósito de esta Sección es dar una expresión explícita de la función de Riemann para la clase particular de material que consideramos.

La ecuación (2.1) es una invariante bajo traslaciones en el tiempo y en el espacio. Luego, la función de Riemann en (2.1) con singularidad en (x_0, t_0) es dada por $R(x - x_0, t - t_0)$ simplemente. Los resultados del trabajo antes mencionado implican que $R(x, t)$ se anula fuera del dominio de dependencia de (0, 0). Sobre este dominio de dependencia $R(x, t)$ es continuo, por partes C^2 y satisface a

3—RIEMANN'S FUNCTION FOR A MATERIAL ADMITTING SIMPLE WAVES

In a previous work (Herrera, I., 1965) the author has formulated a Riemann's representation theorem for viscoelasticity. In the same paper the existence of the Riemann's function was shown and a characterization for it was given. The purpose of this Section is to give an explicit expression of the Riemann's function for the particular kind of material we are considering.

Equation (2.1) is an invariant under traslations in space and time. Therefore, the Riemann's function of (2.1) with singularity at (x_0, t_0) is given by $R(x - x_0, t - t_0)$ simply. Results of the above mentioned work imply that $R(x, t)$ vanishes outside the domain of dependence of (0, 0). On this domain of dependence $R(x, t)$ is continuous and piecewise C^2 and satisfies

$$E\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_t^\infty G(\tau - t)\,R(\tau)\,d\tau = 0 \tag{3.1.a}$$

Además

Besides

$$R(x, t) = -\frac{1}{2\rho c}\,e^{-\frac{G(0)}{2E}t} \quad ; \quad \begin{array}{l}(x, t) \text{ sobre las características que pasan a través de } (0, 0) \\ (x, t) \text{ on the characteristics passing through } (0, 0)\end{array} \tag{3.1.b}$$

$$E\left[\frac{\partial R}{\partial x}\right](0, t) = -\frac{G(-t)}{E} - \int_t^0 G(\tau - t)\left[\frac{\partial R}{\partial x}\right](0, \tau)\,d\tau\ ; \quad \tau \leqslant 0 \tag{3.1.c}$$

donde se mantienen los corchetes para la discontinuidad (valor a la derecha menos valor a la izquierda) de la derivada que cruza la línea $x = 0$.

where the brackets stand for the discontinuity (value on the right minus value on the left) of the derivative across the line $x = 0$.

Cuando la función de relajación es dada por (2.4), la ecuación (3.1.b) se vuelve

When the relaxation function is given by (2.4), equation (3.1.b) becomes

$$R(x, t) = -\frac{1}{2\rho c} e^{\beta t} \quad ; \quad \text{sobre las características que pasan a través de } (0, 0) \quad ; \quad \text{on the characteristics passing through } (0, 0) \tag{3.2}$$

Por otra parte se sigue (3.1.c)

On the other hand, from (3.1.c) it follows

$$\left[\frac{\partial R}{\partial x}\right](0, t) = \frac{\beta}{E}(2 - \beta t) \tag{3.3}$$

luego

therefore

$$R(x, t) = \begin{cases} [\beta(ct + x) - c] \dfrac{e^{-\frac{\beta}{c}x}}{2E} & ; \quad x > 0 \\ [\beta(ct - x) - c] \dfrac{e^{\frac{\beta}{c}x}}{2E} & ; \quad x < 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

La ecuación (3.4) se mantiene en el dominio de dependencia de (0, 0), es decir, para $t \leqslant 0$ y $x \leqslant -ct$.

La solución fundamental de (2.1) que corresponde a un impulso concentrado en (0, 0) es cero dondequiera excepto en el dominio de influencia de (0, 0) (es decir, $t \geqslant 0$ y $x \leqslant ct$) donde es dada por

Equation (3.4) holds in the domain of dependence of (0, 0), i.e. for $t \leqslant 0$ and $x \leqslant -ct$.

The fundamental solution of (2.1) corresponding to a concentrated impulse at (0, 0) is zero everywhere except in the domain of influence of (0, 0) (i.e. $t \geqslant 0$ and $x \leqslant ct$) where it is given by

$$R^*(x, t) = \begin{cases} -[\beta(ct + x) + c] \dfrac{e^{\frac{\beta}{c}x}}{2E} \\ -[\beta(ct - x) + c] \dfrac{e^{-\frac{\beta}{c}x}}{2E} \end{cases} \tag{3.5}$$

4—EJEMPLOS DE SOLUCIONES QUE EXHIBEN ONDAS DE ACELERACION

Sea $f: R^1 \rightarrow R^1$, función cualquiera dentro de C^1 que posee segundas derivadas continuas parciales. Aún más, sea $f''(\lambda)$ que posee un salto en $\lambda = 0$.

Entonces

4—EXAMPLES OF SOLUTION EXHIBITING ACCELERATION WAVES

Let $f: R^1 \rightarrow R^1$ be any function belonging to C^1 and possessing piecewise second continuous derivatives. Even more, let $f''(\lambda)$ posses a jump at $\lambda = 0$.

Then

$$e^{\beta t} f(ct + x)$$

es una solución con un frente de aceleración en $ct \neq x. = 0$.

Aquí el "frente de aceleración" se usa en el sentido de Coleman, Gurtin y Herrera (1965a), es decir, es una línea en el espaciotiempo a través de la cual salta la aceleración.

is a solution with an acceleration front at $ct \neq x = 0$.

Here "acceleration front" is used in the sense of Coleman, Gurtin and Herrera (1965a), i.e. is a line in the space-time across which the acceleration jumps.

BIBLIOGRAFIA / *BIBLIOGRAPHY*

BARBERÁN, J. & I. HERRERA. 1966. Uniqueness Theorems and the Speed of Propagation of Signals in Viscoelastic Materials. *Arch. Rational Mech. Anal* 22:270-291.

COLEMAN, B. D. & M. E. GURTIN. 1965a. Waves in Materials with Memory II-III-IV. *Arch. Rational Mech. Anal.* 19:239-298, 317-338.

— — — 1965b. Thermodynamics and Wave Propagation. Tech. Report No. 100, Division of App. Math., Brown University, Providence, R.I., U.S.A.

COLEMAN, B. D., M. E. GURTIN & I. HERRERA. 1965. Waves in Materials with Memory, I. *Arch. Ratonal Mech. Anal.*, 19:1-19.

GURTIN, M. E. & E. STERNBERG. 1962. On the Linear Theory of Viscoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 11:291-356.

HERRERA, I. 1966. Riemann Representation Method in Viscoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 22:270-291.

HERRERA, I. & M. E. GURTIN. 1965. A Correspondence Principle for Viscoelastic Wave Propagation. *Quart Jour. Appl. Math.* 22:360-364.

PIPKIN, A. C. 1965. Shock Structure in a Viscoelastic Fluid. Internal Report. Brown University, Providence, R.I., U.S.A.

TRUESDELL, C. A. & W. NOLL. 1966. *Encyclopedia of Physics*, Vol. 3, Part. 3 (para aparecer – to appear).

VARLEY, E. 1965. Acceleration Fronts in Viscoelastic Materials. *Arch. Rational Mech. Anal.* 19:215-225.