ESPECTRO QUANTICO DE LA TURBULENCIA ISOTROPICA

F. COCHO GIL *

ABSTRACT

The properties of the spectral function of turbulence, taking into account the hypothesis of base of Kolmogoroff's Theory, are described and with the quantum hypothesis, a general expression for the spectral function is obtained.

A) FUNCIÓN ESPECTRAL DE LA TURBULENCIA

Consideramos la estructura de la turbulencia como la superposición de diferentes "escalas de la turbulencia" de orden de magnitud variable, desde la escala macroscópica usual hasta la agitación molecular propiamente dicha.

Hacemos uso de la noción del espectro de la turbulencia de Heisenberg (*in* Agostini y Bass, 19).

Sean:

SPECTRE QUANTIQUE DE LA TURBULENCE ISOTROPE

F. COCHO GIL *

ABSTRACT

The properties of the spectral function of turbulence, taking into account the hypothesis of base of Kolmogoroff's Theory, are described and with the quantum hypothesis, a general expression for the spectral function is obtained.

A) FONCTION SPECTRALE DE LA TURBULENCE

On considère la structure de la turbulence comme la superposition de differentes "échelles" de la turbulence, d'ordre de grandeur variable, dès l'échelle macroscopique usuelle au phénomene même d'agitation moleculaire.

Nous faisons usage de la notion de spectre de la turbulence de Heisenberg (*in* Agostini et Bass, 19).

Soient:

$U_\alpha (x; t)$ componente según α ($\alpha = 1; 2; 3$) de la velocidad fluctuante
composante selon α ($\alpha = 1; 2; 3$) de la vitesse fluctuante

U_x t coordenadas de un punto fijo; tiempo
coordonnées d'un point fixe; temps

Considerando a la turbulencia homogénea y no estacionaria, la velocidad fluctuante puede definirse:

Si l'on considère la turbulence homogène et non stationnaire, on peut definir la vitesse fluctuante:

$$U_\alpha (x; t) = \int e^{i \sum_{\rho=1}^{3} \lambda_\rho x_\rho} dh_\alpha (\lambda; t) \tag{A.1}$$

donde:

où:

x_ρ ($\rho = 1; 2; 3$) coordenadas de un punto fijo en el espacio
coordonnées d'un point fixe dans l'espace

λ_ρ ($\rho = 1; 2; 3$) un vector o "número de onda" que describe un espacio Λ;
un vecteur ou "nombre d'onde" qui décrit un espace Λ;

$h_\alpha (\lambda; t)$ función aleatoria de crecimientos ortogonales, tal que:
fonction aléatoire à acroissements orthogonaux, tel que:

---

* *Instituto de Geofísica, U.N.A.M. y Comisión Nacional de Energía Nuclear, México.*

* *Institut de Géophysique, U.N.A.M. et Commission Nationale d'Energie Nucléaire, Mexique.*

Si

Si

$\lambda \neq \lambda'$ dos puntos diferentes en Λ), la media estocástica de los incrementos:

deux points différents en Λ), la moyenne stochastique des accroissements:

$$\overline{d\, h^*_\alpha (\lambda; t)\, d\, h_\beta (\lambda'; t)} = 0 \tag{A.2a}$$

de donde α; β ortogonales y $d\, h^*_\alpha$ una conjugada compleja

d'où α; β orthogonaux et $d\, h^*_\alpha$ une conjuguée complexe.

Si

Si

$\lambda = \lambda'$ el mismo punto en Λ):

le même point en Λ):

$$\overline{d\, h^*_\alpha (\lambda; t)\, d\, h_\beta (\lambda; t)} = \varphi_{\alpha\beta} (\lambda; t)\, d\, \lambda \tag{A.2b}$$

donde φ $(\lambda; t)$ es una "densidad espectral" (el espectro considerado continuo).

où φ $(\lambda; t)$ est une "densité spectrale" (le spectre étant considéré continue).

El número de onda (λ_ρ), inverso de una longitud es equivalente *en el espacio* a la frecuencia, a su vez inversa de un tiempo: es, pues, un vector.

Le nombre d'onde (λ_ρ), inverse d'une longueur, est l'équivalent *dans l'espace* de la fréquence, inverse d'un temps: c'est un vecteur.

Como característica de la turbulencia se considera en los tensores de correlación:

Comme caracteristique de la turbulence on considère les tenseurs de corrélation:

$$R_{\alpha\beta} (\xi) = \overline{u_\alpha (x)\, u_\beta (x + \xi)} \tag{A.3}$$

$R_{\alpha\beta}$ (ξ) siendo, a un instante dado, la expresión del tensor de correlación

$R_{\alpha\beta}$ (ξ) étant, à un instant donné, l'expression du tenseur de corrélation

$R_{\alpha\beta}$ $(\xi_\rho; t)$ donde $\rho = 1; 2; 3$. De (A.1) y (A.2) se tendrá:

$R_{\alpha\beta}$ $(\xi_\rho; t)$ où $\rho = 1; 2; 3$. D'après (A.1) et (A.2) on aura:

$$R_{\alpha\beta} (\xi) = \int_\Lambda e^{\,i \sum_{\rho=1} \lambda \rho}\ \varphi_{\beta\alpha} (\lambda)\, d\, \lambda \tag{A.4}$$

$R_{\alpha\beta}$ es, pues, la transformada de Fourier de un tensor espectral $\varphi_{\alpha\beta}$ (λ) que se somete a las condiciones:

$R_{\alpha\beta}$ c'est donc la transformée de Fourier d'un tenseur spectral $\varphi_{\alpha\beta}$ (λ) soumis aux conditions:

I) $\varphi_{\alpha\beta}$ posee la simetría hermitiana:

I) $\varphi_{\alpha\beta}$ (λ) a la symétrie hermitienne:

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi^*_{\alpha\beta}$$

II) Cualquiera que sea el número complejo X_α:

II) Quelque soit le nombre complexe X_α:

$$\sum_{\alpha;\ \beta=1}^{3} X_\alpha X^*_\beta\ \alpha_{\alpha\beta}$$

es real y positivo.

est réel et positif:

Todo sistema $\varphi_{\alpha\beta}$ satisfaciendo I y II sirve de tensor espectral. Si la turbulencia es isotrópica, pueden definirse dos funciones A(K) y B(K):

Tout système $\varphi_{\alpha\beta}$ satisfaisant I et II peut servir comme tenseur spectral. La turbulence étant isotropique, on peut definir deux fonctions A(K) et B(K):

$$\varphi_{\alpha\beta} (\lambda) = A\ (K)\ \lambda_\alpha \lambda_\beta + B\ (K)\ \delta_{\alpha\beta} \tag{A.5}$$

con notación de cálculo tensorial donde $K^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$

avec la notation du calcul tensorielou $K^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$

Siendo el flúido incompresible, la ecuación de continuidad se cambia a:

Le fluide étant incompressible, l'équation de continuité devient:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{a u_\alpha}{\alpha x_\alpha} = 0 \tag{A.6}$$

tal que, para β fijo, se tiene:

de façon que, pour β fixe, on a:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \varphi_{\alpha\beta}(\lambda) = 0 \qquad (A.7)$$

teniendo en cuenta (A.5) y (A.7) y definiendo:

Si on tient compte de (A.5) et (A.7) et on define:

$$A = -\frac{F(K)}{4\pi K^2} \quad ; \quad B = +\frac{F(K)}{4\pi K^2}$$

se tiene:

on a:

$$\varphi_{\alpha\beta} = \frac{F(K)}{4\pi K^2}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\lambda_\alpha \lambda_\beta}{K^2}\right) \qquad (A.8)$$

F(K) siendo, como característica de la estructura de la turbulencia, la "función espectral de Heisenberg".

F(K) étant, comme caractéristique de la structure de la turbulence, la "fonction spectrale d'Heisenberg".

La interpretación de F(K) es simple:

L'interpretation de F(K) est simple:

$$E_t = \frac{1}{2}\sum \overline{u_\alpha^2} \quad \begin{matrix}\text{energía de agitación turbulenta por unidad de masa}\\ \text{énergie d'agitation turbulente par unité de masse}\end{matrix} \quad = -\sum R_{\alpha\alpha}(0) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_A \sum \varphi_{\alpha\alpha}(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{4\pi}\int_A \frac{F(K)\, d\lambda}{K^2}$$

que expresada (en el espacio A) en coordenadas polares:

qui exprimée (dans l'éspace A) en coordonnées polaires:

$$E_t = \int_0^\infty F(K)\, dK \qquad (A.9)$$

La significación física será pues:

I) La integral de F(K) para $0 \leqslant K \leqslant \infty$ representa la energía de agitación turbulenta.

II) K, inverso de una longitud, es representativo de las diferentes escalas de la turbulencia;

Si $K \to \infty$: fenómenos de agitación molecular

Si $K \to 0$: fenómenos macroscópicos: grandes escalas de la turbulencia.

La signification physique devient donc:

I) L'intégrale de F(K) pour $0 \leqslant K \leqslant \infty$ représente l'énergie d'agitation turbulante.

II) K, l'inverse d'une longeur, représente les differentes échelles de la turbulence:

Si $K \to \infty$: phénomènes d'agitation moleculaire

Si $K \to 0$: phénomènes macroscopiques: grandes échelles de la turbulence.

Se tendrá en cuenta:

1.—Que se han hecho tres hipótesis:
incompresibilidad del flúido,
homogeneidad e isotropía de la turbulencia

2.—Que F(K) es susceptible de representar todas las escalas de la turbulencia.

3.—Que la obtención de F(K) y E_t no amerita más que consideraciones cinemáticas: no es necesario aceptar, a priori, la validez de la ecuación de Navier.

On devra tenir compte que:

1.—On fait trois hypothèses;
incompressibilité du fluide,
homogénité et isotropie de la turbulence

2.—F(K) est susceptible de représenter toutes les échelles de la turbulence.

3.—Pour obtenir F(K) et E_t on n'a pas besoin que de considerations cinématiques: on n'a pas besoin, à priori, d'accepter la validité de l'équation de Navier.

B) HIPÓTESIS DE KOLMOGOROFF Y RESULTADOS EXPERIMENTALES.

B) HYPOTHÈSES DE KOLMOGOROFF ET RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.

Consideramos válidas las hipótesis de Kolmogoroff (1941):

Nous considérons valables les hypothèses de Kolmogoroff (1941):

Sean: Soient:

e_p	escala de la turbulencia *(eddy)* de orden de magnitud 1 (una longitud) échelle de la turbulence *(eddy)* d'ordre de grandeur 1 (une longueur)
$e_p \varepsilon G_p$	grupo de *"eddies"* de orden de magnitud 1 groupe d' *"eddies"* d'ordre de grandeur 1
E_G	energía de agitación turbulenta del grupo considerado énergie d'agitation turbulente du groupe considéré
E_r ; E_p	energía recibida (o perdida) por G énergie reçue (ou perdue) par G

Se considera el equilibrio de G_1 :

Si on considére l'équilibre de G_1 :

$$E_r ; E_p >> \left(\frac{\partial E_G}{\partial t}\right)_{G_1} \simeq 0 \tag{B.1}$$

(t: tiempo) la energía de agitación turbulenta de un grupo no varía. Por otra parte, la transferencia de energía de unos grupos a otros se efectúa en condiciones de equilibrio absoluto: la cantidad o la distribución de energía de las grandes escalas de la turbulencia no tendrá influencia sobre los restantes: la anisotropía del fenómeno macroscópico no influirá sobre la estructura interna de la turbulencia. Las hipótesis de homogeneidad e isotropía de la turbulencia son pues compatibles con la teoría de Kolmogoroff, por tanto compatibles con la noción de función espectral F(K) que vamos a emplear como criterio básico de constatación experimental. En efecto, la función F(K) puede ser obtenida indirectamente por determinación experimental de los coeficientes de correlación de la velocidad fluctuante.

Experimentalmente tres casos límites son significativos en cuanto a la turbulencia (Dumas, J., 1962):

1.—Turbulencia provocada por rejillas: hipótesis de isotropía son válidas a todo valor de K (a toda escala)

2.—Capa límite turbulenta: hipótesis de isotropía son válidas solamente para grandes valores de K (pequeñas escalas)

3.—Turbulencia inducida a túneles de viento de alta velocidad: hipótesis de isotropía son solamente válidas para valores medios y grandes de K (medias y pequeñas escalas).

Esto es, cualquiera que sea el caso, las hipótesis de Kolmogoroff serán válidas para las pequeñas escalas de la turbulencia. Por otra parte, en fenómenos tales como la turbulencia atmosférica, asimilable a una superposición de escalas de diferente orden de magnitud, no tiene gran sentido hablar de las grandes escalas de la turbulencia (generatrices de la turbulencia) dado que en las aplicaciones prácticas es preciso limitar el fenómeno a regiones geográficas de dimensiones limitadas.

(t: temps) l'énergie d'agitation turbulente d'un groupe ne varie point. D'autre part, la transférence d'énergie d'un groupe aux autres se produit en conditions d'équilibre absolu: la quantité ou la distribution d'énergie des grandes échelles de la turbulence n'a pas d'influence sur les autres; l'anisotropie due au phénomène macroscopique n'aura pas d'influence sur la structure interne de la turbulence. Les hypothèses d'homogénité et isotropie de la turbulence sont donc compatibles avec la théorie de Kolmogoroff, autant que compatibles avec la notion de fonction spectrale F(K) que nous allons employer comme critère basique de constatation expérimentale. En effet, la fonction F(K) peut s'obtenir indirectement par détermination éxperimentale des coefficients de corrélation de la vitesse fluctuante.

Du point de vue de l'éxpérience trois cas limités sont significatifs à l'égard de la turbulence (Dumas, J., 1962):

1.—Turbulence provoquée par grilles: hypothèses d'isotropie sont valables à toute valeur de K (à toutes échelles)

2.—Couche limite turbulente: hypothèses d'isotropie ne sont valables que pour les grandes valeurs de K (petites échelles)

3.—Turbulence induite en souffleries d'haute vitesse: hypothèses d'isotropie sont valables pour les valeurs moyennes et grandes de K (moyennes et petites échelles)

C'est-à-dire, quelque soit le cas, les hypothèses de Kolmogoroff seront valables pour les pétites échelles de la turbulence. D'autre part, pour les phénomènes tels que la turbulence atmosphérique, qu'on peut assimiler à une superposition d'échelles de differente ordre de grandeur, on n'a pas de sens de parler des grandes échelles de la turbulence (génératrices de la turbulence) toutefois que les applications à la practique doivent être limitées à regions géographiques de dimensions limitées.

Por otra parte, si definimos:

D'autre part, soient:

v_λ velocidad fluctuante / vitesse fluctuante

v_λ orden de magnitud (una longitud / ordre de grandeur (une longueur)

v_ν viscosidad cinemática del flúido (B.1) / viscosité cinématique du fluide (B.1)

$$R_\lambda = \frac{v\lambda \cdot \lambda}{\nu}$$

número de Reynolds: $\left(\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas de viscosidad}}\right)$

nombre de Reynolds: $\left(\frac{\text{Forces d'inercie}}{\text{Forces de viscosité}}\right)$

para las grandes escalas:

pour les grandes échelles:

$$R_\lambda >> 0 : F \cdot \frac{\text{Inercia}}{\text{Inertie}} >> F \cdot \frac{\text{Viscosidad}}{\text{Viscosité}} \sim 0 \ (K \rightarrow 0) \tag{B.2}$$

para las pequeñas escalas:

par les petites échelles:

$$R_\lambda \sim \iota : F \cdot \frac{\text{Inercia}}{\text{Inertie}} \sim F \cdot \frac{\text{Viscosidad}}{\text{Viscosité}} \ (K \rightarrow \infty) \tag{B.3}$$

esto es, todo fenómeno de disipación energética (debido a la viscosidad), de primordial aplicación práctica, depende de las pequeñas escalas de la turbulencia.

Consideraremos entonces como válidas las hipótesis de Kolmogoroff, utilizando como resultado experimental característico el que hace referencia al caso de una rejilla. en que las hipótesis de homogeneidad e isotropía son válidos a todo valor de K y compatibles con la experiencia.

Si asimilamos cada escala de la turbulencia a un grado de libertad del flujo turbulento, las hipótesis de Kolmogoroff (y Obukhov) (19) permiten, por consideraciones de análisis dimensional, definir:

c'est-à-dire, tout phénomène de dissipation énergétique (dû à la viscosité), de primordiale application pratique, depend des petites échelles de la turbulence.

On considère alors comme valables les hypothéses de Kolmogoroff en employant comme résultat experimental caracteristique celui qui fait réference au cas d'une grille où les hypothèses d'homogénité et isotropie sont valables à tout valeur de K aussi bien que compatibles avec l'éxperience.

Si on assimile chaque échelle de la turbulence avec un degrée de liberté de l'écoulement turbulent, les hypothèses de Kolmogoroff (et Obukhov) (19) vont permettre, par considérations de l'analyse dimensionnelle, definir;

$$N_\nu \sim 1 / \lambda^3$$

siendo λ nuestra longitud de dimensión característica de la escala considerada y N_ν el número de escalas por unidad de volumen (de acuerdo a Kolmogoroff, en estado de equilibrio).

où λ est notre longueur ou dimension caractéristique de l'échelle considerée et N_ν étant le nombre d'échelles par unité de volume (d'accord à Kolmogoroff en etat d'équilibre).

C) Espectro Quántico

Hacemos uso de las hipótesis de Kolmogoroff: equilibrio e independencia de las diferentes escalas de la turbulencia.

Consideramos:

ε_m ($m = 0; 1; 2\ldots$) la distribución, discreta de los valores propios de la energía (de agitación turbulenta) que cada escala puede adoptar en situación de equilibrio.

Si n_m es el número de escalas con valor de ε_m:

C) Spectre Quantique

Nous allons faire usage des hypothèses de Kolmogoroff; équilibre et independence des différentes échelles de la turbulence.

Nous considerons:

ε_m ($m = 0; 1; 2\ldots$) la distribution discrète des valeurs propes de l'énergie (d'agitation turbulente) que chaque échelle peut admettre en état d'équilibre.

Si n_m c'est le nombre d'échelles avec la valeur ε_m:

$$N = \sum_m n_m \tag{C.1}$$

$$U = \sum_m n_m \varepsilon_m \tag{C.2}$$

donde:

où:

N_m número de escalas (en un volumen V), en estado de equilibrio
nombre d'échelles (dans un volume V), en etat d'équilibre

V energía total (en V) de agitación turbulenta, en estado de equilibrio
énergie totale (en V) d'agitation turbulente, en état d'équilibre

Consideramos, pues, la estratificación en niveles determinados de la energía de agitación turbulenta correspondiente a cada escala.

On considère donc l'énergie d'agitation turbulente distribuée par niveaux, chaque niveaux correspondant à une échelle determinée.

Sea el volumen V, dividido en m compartimentos. Cada N_m subsistemas (o escalas) de V, corresponderán a un valor de m tal que para un valor m se considera que hay g_m niveles con energía *media* ε_m (Consideremos a los subsistemas indescriptibles; para distinguir la diferente contribución de cada subsistema a la energía total de agitación turbulenta suponemos $gm \ll N_m$: las escalas no tendrán tales valores idénticos).

Soit le volume V, divisé en m compartiments. Chaque N_m subsystème (ou échelle) en V devra correspondre à une valeur m tel que pour une valeur m on considére qu'il y a g_m niveaux avec une énergie *moyenne* ε_m (Considérons les subsystèmes étant non identifiables: pour faire remarquer la différente contribution de chaque subsystème à l'énergie totale d'agitation turbulente on considère $gm \ll N_m$: les échelles n'auront pas des valeurs identiques.)

El número de combinaciones posibles es:

Le nombre de combinaisons possibles seront:

$$W = \prod_m \left(g_m^{N_m} / N_m ! \right) \tag{C.3}$$

Se consideran todas las combinaciones igualmente posibles. De (C.1), (C.2) y (C.3), teniendo en cuenta el teorema de Stirling, podemos definir una distribución de Boltzmann:

On considère toutes combinaisons également possibles D'apres (C.1), (C.2) et (C.3) et en tenant compte du théoréme de Stirling, nous pouvons définir une distribution de Boltzmann:

$$N_m = A \cdot g_m \cdot e^{\beta \varepsilon_m} \tag{C.4}$$

A; β siendo constantes a determinar.

A; β étant des constants a déterminer.

En el caso particular de la turbulencia isotrópica, considerando que N_m escalas (del mismo orden de magnitud) adoptan *exactamente* el valor ε_m, hacemos $g_m = 1$. De acuerdo con la teoría cuántica adoptaremos $\varepsilon_m = mh\nu$. No siendo h la constante de Planck y ν la frecuencia natural del subsistema en cuestión.

Dans le cas particulier de la turbulence isotropique, si on considère que N_m échelles (du même ordre de grandeur) peuvent adopter *exactement* la valeur ε_m nous allons faire $g_m = 1$. D'accord avec la théorie quantique on considére que $\varepsilon_m = mh\nu$. N'étant la constant de Planck et ν la frequence naturelle du subsystème consideré.

(C.4) cambia a

(C.4) devient

$$N_m = A\, e^{m\beta h\nu} \tag{C.5}$$

Teniendo en cuenta (C.1) y (C.2) podríamos expresar

Tenant compte de (C.1) et (C.2) on peut definir;

$$U = N \left[\frac{h \nu e^{\beta h \nu}}{1 - e^{\beta h \nu}} \right] \tag{C.6}$$

(análoga a la expresión de la radiación electromagnética en equilibrio térmico).

(analogue à l'expression pour la radiation éléctromagnétique en équilibre thermique).

Ahora bien, de (B.4) se sabe que N_ν (número de escalas por unidad de volumen) $\sim 1 / \lambda^3$. Si consideramos que para grandes valores de m el carácter discreto de la distribución de energía deja de tener importancia, podríamos aproximadamente considerar que el número de escalas N_ν, comprendidas en el rango ν a $\nu + d\nu$, está dado por N_ν

D'autre part, de (B.4) on sait que N_m (nombre d'échelles par unité volume) $\sim 1 / \lambda^3$. Si on considére que pour des grandes valeurs de m le caractère discrète de la distribution d'énergie laisse d'avoir importance, on peut à peu prés considérer que le nombre d'échelles N . comprises dans le rang ν et $\nu + d\nu$, devient N_ν

Recordando lo dicho en el inciso A, la energía total de agitación turbulenta se expresa $\int_0^\infty F(K)\, d\, K$. K con las

Si on rapelle le paragraphe A, l'énergie totale d'agitation turbulente s'éxprime $\int_0^\infty F(K)\, d\, K$. K ayant les dimen-

dimensiones de una frequencia (inversa de una longitud); podemos asimilar la frecuencia ν a la K del espacio Λ:

sions d'une fréquence (inverse d'une longueur): on pourra assimiler la fréquence ν à la fréquence K del espacio Λ:

$$N_\nu \, d\nu \sim (1/\lambda^3) \, d\nu \sim K^3 \, dK \tag{C.7}$$

$$U = \int_0^\infty (DK) \, K^4 \left[\frac{e^{\beta hK}}{1-e^{\beta hK}} \right] dK \tag{C.8}$$

(D; constante).

Entonces:

(D; constant).

Alors:

$$E_\tau = \begin{array}{l}\text{energía total de agitación turbulenta}\\ \text{energie totale d'agitation turbulente}\end{array} = \int_0^\infty F(K) \, dK = (Dh) \int_0^\infty K^4 \left[\frac{e^{\beta hK}}{1-e^{\beta hK}} \right] dK$$

Esto es, la función espectral, válida a todo valor de K, resulta:

C'est-à-dire, la fonction spectrale, valable à toute valeur K, devient:

$$F(K) = (Dh) \, K^4 \left[\frac{e^{\beta hK}}{1-e^{\beta hK}} \right] \tag{C.9}$$

Analizando el desarrollo de [ ]:

Etudions l'expansion de [ ]:

$$[\;] = \frac{1}{e^{-\beta hK} - 1} = (x-1)^{-1} = (1-y)^{-1} \quad \begin{array}{c}\text{donde}\\ \text{où}\end{array} \quad y = 2 - e^{-\beta hK}$$

que para la condición de convergencia $h = -1$ es $y^2 < 1$, esto es:

dont la condition de convergence pour $h = -1$ c'est $y^2 < 1$, c'est-à-dire:

$$(4 - 2\,e^{-\beta hK} + e^{-2\beta hK}) < 1$$

Sea $4 - 25 + S^2$ (donde $S = e^{-\beta hK}$) $= 0$ de convergencia S adopta valores $S = e^{-\beta hK} = 1$. Por otra parte, nos interesa analizar la expansión de la serie en la cercanía de $K \to 0$:

Soit $4 - 25 + S^2$ (où $S = e^{-\beta hK}$) $= 0$ de convergence S aura les valeurs $S = e^{-\beta hK} = 1$. D'autre part, nous avons interêt dans l'expansion au voisinage de $K \to 0$:

$$\begin{array}{c}\text{para}\\ \text{pour}\end{array} \quad K \to 0 : \text{lím}\, S = \lim (e^{-\beta hK}) = e^0 = 1$$

la condición de convergencia se cumple.

Podremos entonces aproximar (C.9)

la condition de convergence est remplie.

On peut donc considerer (C.9)

$$F(K) \to (Dh) \, K^4 \quad (K \to 0) \tag{C.10}$$

valor límite al que tenderá la función espectral en el caso $K \to 0$; grandes escalas de turbulencia.

Cabe señalar que la teoría de Loïtsiansky (que acepta la validez de la ecuación de Navier), válida en exclusiva para las *grandes escalas* de la turbulencia (donde, en principio, no deberían tener aplicación, hipótesis de homogeneidad e isotropía) (Landau y Lifschitz, 19), determina una expresión totalmente análoga a (C.10):

valeur limite à laquelle va tendre la fonction spectrale dans le cas $K \to 0$: grandes échelles de la turbulence.

Il faut remarquer de la théorie de Loïtsiansky (sur la base de la validité de l'équation de Navier), valable dans le domaine des *grandes échelles* de la turbulence (où, en principe, hypothèses d'homogenité et isotropie ne sont pas applicables) Landau et Lifschitz, 19), determine un expression toute à fait analogue a (C.10):

$$F(K)\ \text{Loïtsiansky} \to CK^4 \quad (K \to 0) \tag{C.11}$$

C siendo la *invariante de Loïtsiansky*, determinable a partir de los coeficientes espaciales, dobles, de correlación de la velocidad fluctuante. La expresión general obtenida bajo consideraciones quánticas, es pues compatible incluso en las teorías parciales sobre el comportamiento de las grandes escalas turbulentas.

C étant *l'invariable de Loïtsiansky*, determinable à partir des coefficients spatiales, doubles, de corrélation de la vitesse fluctuante. L'expression génèrale obtenue à l'aide des considerations quantiques ,c'est donc compatible même avec les théories partielles sur le comportement des grandes échelles de la turbulence.

Para los grandes valores de K ($K \to \infty$), si $\beta < 0$, se puede obtener

Pour les grandes valeurs de K ($K \to \infty$), si $\beta < 0$, on sait obtenir:

$$F(K) \to (Dh)\, K^4 / e^{|\beta| hK} \quad (K \to \infty) \qquad (C.12)$$

A medida que K aumentase podríamos obtener las leyes de variación de $K^{-5/3}$ y K^{-7}, de acuerdo a las teorías parciales de Kolmogoroff y Heisenberg.

Au fure et à mesure que K augmente on peut obtenir des lois de variation de $K^{-5/3}$ et K^{-7}, d'accord avec les théories partielles de Kolmogoroff et Heisenberg.

La expresión general para la función espectral será:

L'expression générale por la fonction spectrale sera:

$$F(K) = CK^4 \left[\frac{e^{\beta hK}}{1-e^{\beta hK}} \right] \qquad (C.13)$$

($C_\beta < 0$) donde β es una constante a determinar.

($C_\beta < 0$) où β étant une constante à déterminer.

Unas palabras finales sobre el proceso general de la transición:

Des remarques finales à l'égard du processus général de la transition:

Flujo laminar → Fenómeno de transición → Flujo turbulento
(número de Reynolds → ∞) (estado de equilibrio)

Ecoulement laminaire → Phénomène de transition → Ecoulement turbulent
(nombre de Reynolds → ∞) (etat d'equilibre)

La obtención de una expresión análoga a (C.13), que evolucione a medida que el fenómeno de transición se desarrolla, implicará la violación de la condición (C.2):

L'obtention d'une expression analogue à (C.13), qu'on évolue au fur et à mesure du developpement de la transition, implique la violation de la condition (C.2):

$$U \neq \sum_m N_m \varepsilon_m$$

El fenómeno de transición deberá tomar en cuenta en (C.2) un término de *energía de interacción* entre las diferentes escalas, tal que: a) tendiendo al flujo turbulento el término de interacción sea nulo alcanzándose el estado de equilibrio; b) tendiendo al flujo laminar el conjunto de escalas o subsistemas trabaje como un sistema acoplado en donde sólo la escala macroscópica usual tenga sentido.

Le phénomène de transition devra tenir compte en (C.2) d'un terme *d'énergie d'interaction* des différantes échelles, de facon que: a) si on tend vers l'écoulement turbulent le terme d'interaction sera nul pour cet état d'équilibre; b) si on tend vers l'écoulement laminaire l'ensemble d'échelles ou subsystèmes devra se comporter comme un systeme accouplé dont seul l'échelle macroscopique ussuelle a de sens.

BIBLIOGRAFIA *BIBLIOGRAPHIE*

AGOSTINO & BASS, 19 . Les Théories de la Turbulence. *Publications Scientifiques et Techniques*, Paris (Hermann et Cie.).

DUMAS, J. 1962. Contributions à l'Etude des Spectres de Turbulence. These Dr. Sc., Marseille.

KOLMOGOROFF, 1941. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Fluids for very large Reynolds Numbers. *C. R. Acad. Sci. U.R.S.S.*, 30:301.

LANDAU & LIFSHITZ, 19 . *Fluid Mechanics*. London (Pergamon Press).