SIMPOSIO PANAMERICANO DEL MANTO SUPERIOR
PAN-AMERICAN SYMPOSIUM ON THE UPPER MANTLE

(MÉXICO, D. F., MARZO / MARCH 18-21, 1968)

GRUPO III-GRAVIMETRÍA Y MAREAS TERRESTRES
GROUP III-GRAVIMETRY AND EARTH TIDES

MAREA TERRESTRE

L. B. SLICHTER * y C. L. HAGER **

Geográficamente se concentran con preferencia en las latitudes medias las ciento y tantas estaciones de mareas terrestres del mundo. En el cinturón ecuatorial existen tal vez menos de una docena, que es en donde ocurren las mayores mareas terrestres. Puesto que esta área descuidada es tan importante, aprovecho esta oportunidad para tratar mareas terrestres ante mis oyentes, muchos de los cuales son ciudadanos de países situados en el cinturón por explorarse.

¿Por qué comienzo señalando la distribución desigual de las estaciones de marea terrestre y los vacíos geográficos que existen para estas observaciones. Para una tierra simétrica el patrón simple simétrico de las deformaciones de mareas puede demostrarse relativamente con pocas estaciones. Sin embargo, ahora los estudios geofísicos están dirigidos a demostrar la falta de simetría en las profundidades de la tierra y a revelar las características y extensión de anomalías profundas a gran escala. Los estudios de mareas terrestres deben tener miras similares. Como veremos, los distintos grupos de instrumentos de mareas terrestres brindan varias oportunidades al medir los efectos locales y regionales de la tierra sobre mareas y otras fuerzas. Por lo tanto la ausencia de una buena distribución geográfica en el muestro de mareas terrestres invita a llenar estas deficiencias. Sería prematuro predecir el valor de los mapas globales y regionales de marea terrestre puesto que están en elaboración y tarde o temprano estarán disponibles para juzgarse. El interés de trazar tales mapas es semejante al de los oceanógrafos por observaciones de mareas océanicas desconocidas en las áreas más importantes de los océanos profundos. El peso del agua de las mareas oceánicas también deforma la tierra, especialmente sobre las orillas de los océanos. Se acerca pronto el día en que se logre un entendimiento unificado entre las mareas terrestres y las oceánicas. Estudios recientes y cálculos masivos de mares oceánicas teóricas hechos por Perkeris parecen iluminar el camino para estudios integrados de ambas clases de mareas.

Los cálculos actuales de la deformación de la tierra sólida a causa de mareas están basados en el supuestos de que

* *Instituto de Geofísica y Física Planetaria, Universidad de California, Los Angeles, California, EE. UU. de A.*
** *Instituto de Geofísica y Física Planetaria, Universidad de California, Los Angeles, California, EE. UU. de A.*

EARTH TIDES

L. B. SLICHTER * AND C. L. HAGER **

Geographically the more than one hundred earth-tide stations in the world are strongly concentrated in the temperate zone. Probably less than a dozen exist in the equatorial belt, where the largest earth-tides occur. Because this major neglected area is so important, I especially value this opportunity to discuss earth tides with the present audience, many of whom are citizens of countries in the belt still to be explored.

Why do I begin by pointing to the uneven distribution of earth-tide stations, and to the large geographic gaps in these observations? On a symmetrical earth, the simple symmetrical pattern of the tidal deformations could be revealed with relatively few stations. Today, however, geophysical studies are directed toward exposing the lack of symmetry in the deep earth, and towards revealing the characteristics and extent of large-scale anomalies at depth. Earth tide studies should entertain similar aims. As we shall see, the several types of earth-tide instruments provide different opportunities for sensing local and regional yielding of the earth to tidal and to other forces. Thus the absence of good geographic coverage in the sampling of earth tides is an invitation to fill the gaps. It would be premature to predict the value of global and regional earth-tide maps, for these are already on the way, and sooner or later they will be available to judge. The incentive for creating such maps parallels that of the oceanographers for observations of unknown ocean tides in major areas of the deep oceans. The load of the water tides also deforms the earth, especially along the margins of the oceans. The day is approaching when a proper unitary understanding of the ocean and land tides can be achieved. The recent studies and massive computations of theorical ocean tides by Pekeris seem to light the way to integrated studies of both kinds of tides.

Today computations of the tidal deformations of the solid earth are based upon the assumption that the earth is sym-

* *Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California, Los Angeles, California, U. S. A.*
***Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California, Los Angeles, California, U. S. A.*

la tierra es simétrica y carente de océanos. A pesar de esta simplificación, el problema del efecto de mareas sobre una esfera simétrica, elástica y gravitante cuyas propiedades varían con la profundidad es un problema muy serio. Soluciones numéricas para dos modelos realísticos de la tierra se obtuvieron por H. Takeuchi (1950) y por M. S. Molodensky (1953), quienes presentaron resultados para 16 modelos diferentes. En estos modelos simétricos, la descripción del abultamiento de la marea provocado por la luna (o el sol) requiere únicamente cuatro números. El primero es la amplitud constante C del potencial gravitacional U_2 productor de mareas en la superficie terrestre, que se deriva precisamente de las constantes astronómicas. Por lo tanto para la luna:

metrical, and free of oceans. Despite this simplification, the problem of the tidal yielding of a symmetrical elastic, gravitating sphere, whose properties vary with depth is a formidable one. Numerical solutions were obtained by H. Takeuchi (1950) for two realistic earth models and by M. S. Molodensky (1953), who presented results for 16 different models. In these symmetrical models, the description of the tidal bulge raised by the moon (or sun) requires only four numbers. The first is the amplitude constant C for the tide-producing gravitational potential, U_2, on the earth's surface, which is precisely known from the astronomical constants. Thus for the moon

$$U_2 = G\, m\, a^2 \langle R^{-3} \rangle\, P_2 (\cos \theta) = 3.131 \times 10^4\, P_2 = C\, P_2 (\cos \theta) \qquad (1)$$

(Para esta y siguientes ecuaciones, la nomenclatura y el valor de las cantidades se enlistan en el Apendice. Cuando es factible se usan valores de la U. A. I. 1964. Sistema de Valores Astronómicos). Las componentes vertical y horizontal del desplazamiento de superficie, u_r y u_θ respectivamente, se expresan por el número de Love h y el número de Shida l en forma semejante.

(For this and future equations, the nomenclature and values of the quantities are listed in the Appendix. When feasible, values from the I.A.U. (1964) System of Astronomical Values are used.) The vertical and horizontal components of surface displacement, u_r and u_θ respectively, are expressed by the Love number h and the Shida number l in similar manners:

$$u_r = h\, g^{-1}\, C\, P_2 (\cos \theta) \quad u_\theta = l\, g^{-1}\, C\, \frac{d\, P_2 (\cos \theta)}{d\, \theta} \qquad (2a,\ b)$$

La caracterización restante del abultamiento es gravitacional. El cambio V en el potencial gravitacional en la superficie debido solamente a la redistribución de masa en la deformación según el número de Love h.

The remaining characterization of the bulge is gravitational The change V in the gravitational potential at the surface due solely to the redistribution of mass in the deformation defines the Love number h.

$$V = k\, C\, P_2 (\cos \theta) \qquad (2c)$$

Los números h, k y l encontrados por Takeuchi para dos modelos debidos a K, por Bullen, y Molodensky para su modelo Núm. 6 y modelo Núm. 12 se enlistan en la Tabla 1. En el modelo Núm. 6, el núcleo es flúido, homogéneo e incompresible. Las velocidades sísmicas en el manto y en el núcleo se aproximan a los valores de Jeffreys (1939). La densidad crece de 3.34 en la superficie a 5.66 en las afueras del núcleo. El modelo Núm. 12 se diferencía del Núm. 6 sólo en lo supuesto de que el flúido en el núcleo es heterógeneo. Los valores h-k y h-3/2k (observables respectivamente por inclinómetros y gravímetros) y la velocidad h/k se enlista en las últimas tres columnas de la tabla.

The numbers h, k and l found by Takeuchi for two earth models due to K. by Bullen, and by Molodensky for his model Nº 6 and model Nº 12 are listed in Table 1. In model Nº 6, the core is fluid, homogeneous, and incompressible. The seismic velocities in the mantle and core approximate the Jeffrey's (1939) values. The density increases from 3.34 at the surface to 5.66 just outside the core, model No. 12 differs from Nº 6 only in the assumption that the fluid core is heterogeneous. The values h-k and h 3/2k (observable respectively by tiltmeters and gravimeters), and the ratios h/k are listed in the last three columns of the table.

TABLA 1 TABLE 1

MODELO / MODEL	h	k	l	h — k	h — 3/2 k	k/n
Takeuchi #1	.587	.290	.068	.297	.152	.494
Takeuchi #2	.610	.281	.082	.329	.189	.461
Molodensky #6	.619	.310	.091	.309	.154	.501
Molodensky #12	.617	.306	.090	.311	.158	.496

Para ninguno de los 16 modelos usados por Molodensky la relación k/h se alejó de un 1/2 por más del 1%. Esta relación es sensible, sin embargo al comportamiento relativo de una capa superficial. Por ejemplo, la solución de Kelvin para la deformación por marea en una esfera homogénea incompresible dio

For none of the sixteen models used by Molodensky did the resulting ratio k/h depart from 1/2 by as much as 1%. This ratio is sensitive, however, to the relative compliance of a superficial layer. For example, Kelvin's solution for the tidal deformation of a homogeneous incompressible sphere gave

$$h = \tfrac{5}{2} (1 + q)^{-1},\ k = \tfrac{3}{2} (1 + q)^{-1},\ l = \tfrac{3}{4} (1 + q)^{-1}$$

donde $q = \frac{19}{2} \frac{\mu}{\psi g a}$ es proporcional al módulo de cizallamiento μ. Por lo tanto k/h = 3/5 para todo valor de μ, pero cuando una capa delgada incompresible de flúido, de densidad ψ_1, envuelve un núcleo sólido de densidad ψ_2, entonces se puede demostrar fácilmente que $k/h = 3\ \psi_1/^5\ \psi_2$. Por lo tanto si ψ_1 es 1.025 y δ_2 es la densidad media de la tierra, 5.517, entonces k/h = .1115. Puesto que en una superficie fluida $h_f = 1 + k_f$, encontramos que k = .125, h = 1.125. Los valores de h – 3/2 k encontrados para la marea M_2 por gravímetros con frecuencia exceden considerablemente los valores .15 a .16 correspondientes a tres de los modelos de la tabla. Varía de cerca de .15 a .20, con un .17 típico.

where $q = \frac{19}{2} — \frac{\mu}{\psi g a}$ is proportional to the shear modulus μ. Thus k/h = 3/5 for all values of μ. But when a thin incompressible layer of fluid, density ψ_1, envelopes a solid rigid core of density ψ_2, then it can easily be shown that $k/h = 3\ \psi_1/^5\ \psi_2$. Thus if ψ_1 is 1.025 and δ_2 is the mean density of the earth, 5.517, then k/h = .1115. Since on a fluid surface $h_f = 1 + k_f$ one finds $k_f = .125$, $h_f = 1.125$. The values of h – 3/2 k found for the M_2 tide by gravimeters often exceed significantly the values .15 to .16 for three of the models in the table. They range from about .15 to .20. with .17 typical.

Mencioné anteriormente la esperanza de que el conocimiento de estos números de la marea mejoren usando una distribución geográfica más favorable de las estaciones de marea terrestre. Para obtener valores significativos de los números globales de marea de Love y Shida, se necesita conocer el patrón global de la deformación en tierra y mar. Al llenar las deficiencias actuales de este patrón; usando las islas oceánicas, mediciones de mareas en mar abierto y con una mejor distribución de las estaciones en tierra, se esclarecerá el interesante problema de la deformación terrestre regional y global en extensas masas de aguas conocidos.

I previously mentioned the hope that knowledge of these tidal numbers will be much improved by using a more favorable geographic distribution of earth-tide stations. To obtain significant values of the global tidal Love and Shida numbers, the global pattern on land and sea of the deformation must be known. In filling the many present gaps in this pattern, by use of oceanic islands, measurements of tides in the open oceans, and better distribution of land stations the interesting subject of the regional and global yielding of the earth to extensive known water loads will undoubtedly be much clarified.

RETRASO DE FASE

Los modelos terrestres simétricos y carentes de océanos con abultamientos simples de marea lunar de la forma $u_r = h' C g^{-1} P_2 (\cos\theta)$ se modifican fácilmente para dar una explicación pertinente del par producido por la marea que disminuye la velocidad de la rotación terrestre. Actualmente casi todo este par proviene de mareas oceánicas. La forma de los cambios reales en el abultamiento así como la diversa topografía de los océanos y continentes pasa bajo la luna al punto antípoda. A pesar de como se dividen las pérdidas entre los océanos y la tierra su total se puede calcular asociando el ángulo de fase ε adecuado al abultamiento en el modelo de tierra sólida. Este ángulo, es el ángulo a través del cual se desvía el eje del abultamiento simétrico $u_r = A\ P_2 (\cos\phi)$ de la línea tierra-luna durante el tiempo de relajación τ requerido para generar el abultamiento en una tierra imperfectamente elástica. (El ángulo ϕ reemplaza al θ, y se mide desde el eje de abultamiento, no desde la línea tierra-luna χ). Por lo tanto $\varepsilon = \Omega_N \tau$, en donde τ es el tiempo de relajación y Ω_N es

PHASE LAGS

The symmetrical, oceanless earth models with their simple lunar tidal bulges of form $u_r = h\ C\ g^{-1}\ P_2 (\cos\theta)$ are easily modified to provide an hoc explanation of the tidal torque slowing the earth's rotation. Actually, almost all of this torque arises from ocean tides. The form of the real bulge changes as the varied topography of oceans and continents passes beneath the moon and its antipodal point. Regardless of how the losses are divided between oceans and land, their total is readily accounted for by assigning the appropriate phase angle ε to the bulge on a solid earth model. This angle is that through which the axis of the symmetrical bulge, $u_r = A\ P_2 (\cos\theta)$ is carried forward from the earth-moon line during the relaxation time τ required to generate the bulge on an imperfectly elastic earth. (The angle ϕ replaces θ, and is measured from the bulge axis, not from the earth-moon line χ). Thus $\varepsilon = \Omega_N \tau$, where τ is the relaxation time, and Ω_N is the total component normal to the earth moon direction of the earth's rotational angular velocity relative to the moon's orbital angular vela componente normal total a la dirección tierra-luna de la velocidad angular rotacional de la tierra respecto a la velocidad angular orbital de la luna (Slichter, 1963). (A causa de la inclinación del eje terrestre con relación a la órbita y velocidad orbital variable de la luna, la relación de (Ω_N) max/(Ω_N) min durante la órbita lunar puede ser tan grande como de 1,11).

El valor más preciso de ε proviene de datos astronómicos del par de marcas mutuo entre la tierra y la luna, no de mediciones de mareas terrestres. El número básico es el valor revisado de Munk y McDonald (1960), 3.9 x 10^{23} dinas cm; para el par medio producido por mareas acelerando la luna en su órbita, basado en observaciones astronómicas en los últimos 200 años. La relación simple de par que utiliza el número de Love k (debido aparentemente a N.N. Pariisky, 1959), es

ocity (Slichter, 1963). (Because of the inclination of the earth's axis with respect to the moon's orbit and the moon's variable orbital velocity, the ratio of (Ω_N) max/(Ω_N) min during the moon's orbit may be as great as 1.11.)

The best value of ε is derived from the astronomical evidence of the mutual tidal torque between earth and moon, not from earth-tide measurements. The basic number is the revised value of Munk and McDonald (1960), 3.9×10^{23} dyne cm, for the mean tidal torque accelerating the moon in its orbit, based on modern astronomical observations of the last 200 years. The simple torque relation involving the Love number k (apparently due to N.N. Pariisky (1959), is

$$F\,k \sin 2\varepsilon = T = 3.9 \times 10^{23} \text{ dinas / dyne cm.} \tag{3}$$

Aquí el factor F es 3/2 G m^2 a^5 $\langle R^{-6} \rangle$ = 1.603 x 10^{25} dinas cm (véase el Apéndice). El número de marea k es el factor más incierto en la ec. (3). Dando un margen generoso, .3 $<$k$<$.38, se encuentra el rango correspondiente .0812$>$ $2\varepsilon$$>$ .0641, o 4°.65$>$ $2\varepsilon$$>$ 3°.67. El ángulo 2ε, no ε, es la fase de retraso en la marea semidiurna M_2.

En una tierra simétrica, las mareas diurnas son antisimétricas alrededor del ecuador. Por lo tanto estas mareas en el hemisferio norte y sur se neutralizan mutuamente con respecto al momento sobre la luna. Pero en océanos de la tierra real esta neutralización es imperfecta.

Here the factor F is 3/2 G m^2 a^5 $\langle R^{-6} \rangle$ = 1.603 x 10^{25} dyne cm. (See Appendix.) The tidal Love number k is the most uncertain factor in eq. (3). Assingning a generous range, .3 $<$k$<$.38, one finds the corresponding range. 0.812$>$ 2 $\varepsilon$$>$ .0641, or 4°.65$>$ 2 $\varepsilon$$>$ 3°.67. The angle 2ε, not ε, is the phase lag in the semi diurnal tide M_2.

On a symmetrical earth, the diurnal tides are anti-symmetrical about the equator. Thus these tides in the northern and southern hemisphere neutralize each other in respect to torque on the moon. But in the oceans of the real earth, this neutralization is imperfect.

OBSERVACIONES INSTRUMENTALES

Se usa en general tres tipos de instrumentos en la observación de mareas terrestres, inclinómetros, extensómetros y gravímetros. Difieren entre sí tanto respecto a la sensibilidad al campo gravitacional de mareas como en sus respuestas a la deformación ya sea de marea u otra de la cimentación en sí misma.

(1) *Extensómetros.* Un extensómetro lineal mide el cambio en la distancia entre dos puntos de referencia; particularmente aquel de una componente de deformación no desplazamiento total que se usa para definir el número de Shida. De las seis componentes de deformación que especifican la deformación en un sólido isotrópico, dos desaparecen en la superficie terrestre puesto que los esfuerzos transversales τ_{xz}, τ_{yz} desaparecen. Ya que un extensómetro no responde a la componente vertical de la deformación sólo restan tres componentes de la deformación para mediciones en la superficie horizontal de la tierra. Estas tres incógnitas pueden considerarse como las dos componentes principales de la deformación y la dirección de una de ellas. Por razones económicas se usan frecuentemente solo dos extensómetros rectangulares. Estos dos bastan para determinar la deformación horizontal de superficie (razón del cambio entre el área al área original) puesto que ésta es independiente de la orientación. La deformación de super-

INSTRUMENTAL OBSERVATIONS

Three types of instruments are being generally used in the observation of earth tides - tiltmeters, strainmeters, and gravimeters. They differ in respect both to their sensivity, or lack thereof, to the tidal gravity field, and to their response to deformation, tidal or otherwise, of the local fundation itself.

(1) *Strainmeters.* A strainmeter or linear extensometer measures the change in distance between two reference points; namely, a strain component, not the total displacement used in defining the Shida number. Of the six strain components which specify strain in a isotropic solid, two vanish at the earth's surface because the shear stresses τ_{xz}, τ_{yz} vanish. Since a horizontal extensometer does not respond to a vertical strain component, only three strain constituents remain for measurements on the earth's horizontal surface. These three unknowns may be regarded as the two principal strain components and the direction of one of them. For economic reasons, often only two rectangular strain meters are used. These two suffice to determine the horizontal areal strain (ratio of change in area to original area) since this is independent of orientation. The areal strain determines the combination h-3l (Melchior, 1960). With a third horizontal strain meter, h and l may be independently obtained. Furthermore, the known theoretical di-

ficie determina la combinación h-3 l (Melchior, 1966). Con un tercer extensómetro, h y l se pueden obtener independientemente. Mas aún, las direcciones teóricas conocidas de las principales deformaciones pueden en teoría, ser usadas para determinar estas deformaciones así como h y l de las observaciones con solo dos extensómetros. Por ejemplo, en el ecuador durante los intervalos quincenales cuando la luna cruza el plano ecuatorial, las principales deformaciones a causa de mareas lunares están en el meridiano y en la vertical prima. Esta, consiste en la suma de dos deformaciones.

(a) Aquella debido a los desplazamientos diferenciales $u\theta$ en los extremos del extensómetro de longitud S

rections of the principal strains can in theory be used to determine these strains as well as both h and l from observations with only two strainmeters. For example, at the equator during the fortnightly intervals when the moon crosses the equatorial plane, the principal lunar tidal strains are in the meridian and in the prime vertical. The latter consists of the sum of two strains.

(a) That due to the differential displacements $u\theta$ at the two ends of the strain meter, of length S

$$\Delta S/S = S^{-1} \frac{d}{r\, d\theta} \left\{ l\, g^{-1}\, C \frac{d\, P_2\, (\cos\theta)}{d\,\theta} \right\} S, \qquad (4a)$$

y (b) la deformación horizontal $\Delta r/r$ debida al cambio de distancia al centro de la Tierra

and (b) the horizontal strain $\Delta r/r$ due to the change in distance from the earth's center

$$\Delta r/r = h\, (g\, r)^{-1}\, C\, P_2\, (\cos\theta) \qquad (4b)$$

La suma de éstas, despreciando una constante es

The sum of these, neglecting a constant, is

$$e_1 = 3/4\, (g\, r)^{-1}\, C\, [h - 4l]\, \cos 2\,\theta \qquad (5)$$

Sin embargo, en posiciones ecuatoriales la deformación del tipo (a) sobre un meridiano desaparece puesto que en esta dirección $\frac{d}{d\theta} = 0$ (excepto teóricamente en el pequeñísimo instante en que el extensómetro N.S. de longitud finita cruza la línea del zenit a la luna).

Resta solo la deformación (b) de manera que

However, at equatorial positions, the strain of type (a) along a meridian vanishes since in this direction $\frac{d}{d\theta} = 0$ (except theoretically for the brief instant when the N.S. strainmeter of finite length crosses the zenith line to the moon). Only the strain (b) remains, so

$$e_2 = 3/4\, (g\, r)^{-1}\, C\, h\, \cos 2\,\theta \qquad (6)$$

Por lo tanto h se encuentra directamente de la componente meridional; puede obtenerse de ec. (5)

En el extensómetro de Benioff los puntos de referencia están separados 30 metros o más y espaciados por un tubo de cuarzo para demostrar el desplazamiento relativo. La ecuación (6) con h = .62, g = 978.0, a = 6.382 x 10^{8} da un rango de deformación de 4.66 x 10^{-8}. Sobre la base de 30 metros los desplazamientos para mediciones son de cerca de 1.4 x 10^{-4} cm. Recientemente se han empleado rayos laser en un túnel abandonado en las Montañas Cascade, (Washington) para proveer una línea de base de cerca de 1 Km de largo.

Un extensómetro registra obviamente deformaciones locales, libres de influencias gravitacionales directas. Si se quiere suponer que las deformaciones observadas son las deformaciones elásticas debidas a las mareas que caracterizan el planeta en su totalidad, ciertamente es muy importante la conformación geológica del lugar. El sitio debe ser escogido a modo de minimizar anormalidades de deformación en fallas o juntas en estructuras locales. Opuestamente en ciertos sitios el extensómetro es una herramienta poderosa para demostrar zonas de resistencia y variación de resistencia en

Thus h is found directly from the meridianal component; l then follows from eq. (5).

In the Benioff extensometer, the reference points are separated 30 meters or more, and spanned with a quartz tube to display relative displacement. Equation (6), with h = .62, g = 978.0, a = 6.382 x 10^{8} gives a range in strain of 4.66 x 10^{-8}. On the 30-meter base, the displacements for measurement are about 1.4 x 10^{-4} cm. Laser beams have recently been employed (in an abandoned railway tunnel in the Cascade Mountains, Washington) to provide a base line about 1 Km long.

A strain meter obviously records the local strains, free of direct gravitational influences. If it is desired to suppose that the observed strains are the tidal elastic strains characterizing the planet as whole, the geological environment of the site is certainly important. The site should be chosen to minimize abnormalities of strain in faults or joints in local structures. Conversely, at suitable sites the strainmeter is a powerful tool for demonstrating zones of yielding, and yielding rates, in a dynamic geological environment. It is noteworthy that the strainmeter is the only type of earth-una conformación geológica dinámica. Es importante notar que el extensómetro es el único tipo de instrumento medidor de mareas terrestres que responde directamente a la geometría del abultamiento debido a la marea. En una tierra simétrica uniforme horizontalmente la fase y deformación que se observan son las del propio abultamiento.

(2) *Inclinómetros.* La pendiente máxima del abultamiento debido a la marea lunar sin embargo, es pequeña:

$$\frac{\delta\ (u_r)}{a\ \partial\ \theta} = -3/2\ h\ (ag_0)^{-1}\ C\ \sin 2\ \theta = -\ 7.53\ x\ 10^{-8}\ h\ \sin 2\ \theta \qquad (6)$$

$= 4.67\ x\ 10^{-8}$ radianes, cuando $\theta = 45°$ y $h = .62$. Puesto que el inclinómetro registra únicamente parte de esta pendiente, la pequeñez de este número, $4.67\ x\ 10^{-8}$ radianes $= .0097$ segundos de arco indica la delicadeza de las mediciones de inclinación. Las condiciones del medio ambiente en general son más importantes que los instrumentos propiamente dichos para obtener mediciones significantes.

Los instrumentos que se usan son de varias clases, péndulo pequeño horizontal de cuarzo, tubos de nivel de varios metros de largo, tal como el tubo de 150 metros de largo usado en el experimento clásico de Michelson y Gale (1914). El tubo de mercurio hecho recientemente en Cal Tech pertenece a la categoría de tubos de nivel. Un nivel simple astático, pequeño, altamente sensible, del nuevo tipo óptico-plano ha sido desarrollado por S. Hansen y J. C. Harrison, y usado por Harrison en la Mina Poorman cerca de Boulder, Colorado. Para obtener condiciones favorables se están desarrollando inclinómetros para uso en pozos perforados.

La inclinación residual medida por un inclinómetro es la inclinación de la cimentación local respecto al nivel superficial local. El nivel superficial local satisface el requisito de que a superficie deformada debido a la marea permanece equipotencial con su valor original, W. Por lo tanto $\frac{\delta W}{\delta r}$ $\Delta r + U_2 + k\ U_2 = 0$. Con $\Delta r = h\ g^{-1}\ U_2$ y $\frac{\delta W}{\delta r} = -g$, esta condición es $(1 + k - h) = 0$. Escribiendo $h = 1 + k$ en la ec (2a), la inclinación del nivel superficia es $(1 + k)\ (ag_0)^{-1}\ \frac{\delta U_2}{\delta \theta}$ que es aproximadamente el doble de la inclinación elástica de la cimentación. El residuo que se observa es $7.53\ x\ 10^{-8}\ [1 - (h - k)]\ \text{sen}\ 2\ \theta$. Michelson y Gale (1914) obtuvieron el valor de 0.69 para $\gamma \equiv 1 - (h - k)$, que es cercano a los valores actuales.

Hay una gran diferencia entre la fase registrada por un inclinómetro y el verdadero retraso de fase del eje del abultamiento. Esto proviene de la circunstancia de que únicamente la porción h – del factor observable $\gamma \equiv 1 - (h - k)$ caracteriza al abultamiento y contiene el ángulo principal ε del eje del abultamiento. La mayor parte, 1.0 es producido por el campo directo gravitacional de la tierra y tiene un ángulo de fase cero. Para ángulos pequeños la relación entre el ángulo de fase observado ψ y ε es $\psi\ [1 - (h - k)] = -(h - k)\ \varepsilon$. Si $h = .62$ y $k = .31$ entonces $\psi = -.449\ \varepsilon$; con $2\varepsilon \equiv 4°.5$, $2\ \psi \equiv -2°.0$. Por lo tanto el

tide meter which responds directly to the geometry of the tidal bulge. In a horizontally uniform symmetrical earth, the phase and strain observed are those of the bulge itself.

(2) *Tiltmeters.* The maximum slope of the lunar tidal bulge is small indeed:

$= 4.67\ x\ 10^{-8}$ radians, when $\theta = 45°$ and $h = .62$. Since the tiltmeter senses only a part of this slope, the smallness of this number, $4.67\ x\ 10^{-8}$ radians $= .0097$ seconds of arc, indicates the delicacy of the tilt measurement. The environmental conditions are generally more important than are the instruments themselves in obtaining meaningful measurements.

The instruments being used are of several kinds · small quartz horizontal pendula, level tubes many meters in length, such as the tube 150 meters long used in the classical experiment of Michelson and Gale (1914). The mercury-tube tiltmeter recently developed at Cal Tech belongs to the level-tube category. A small, highly-sensitive and simple astatic level of a new optical flat type has been developed by S. Hansen and J. C. Harrison, and used by Harrison in the Poorman Mine near Boulder, Colorado. To obtain favorable environments, tiltmeters for use in drill holes are being developed.

The residual tilt measured by a tiltmeter is the tilt of the local foundation with respect to the local level surface. The local level surface satisfies the requirement that the tidally deformed surface remains equipotential at its original value, W. Thus $\frac{\delta W}{\delta r}\ \Delta r + U_2 + k\ U_2 = 0$. With $\Delta r = h\ g^{-1}\ U_2$ and $\frac{\delta W}{\delta r} = -g$, this condition is $(1+k-h) = 0$. Writing $h = 1 + k$ in eq. (2a), the tilt of the level surface is $(1 + k)\ (ag_0)^{-1}\ \frac{\delta U_2}{\delta \theta}$, which is approximately twice the elastic tilt of the foundation. The observable residual is $7.53\ x\ 10^{-8}\ [1 - (h - k)]\ \sin 2\ \theta$. Michelson and Gale (1914) obtained the value 0.69 for $\gamma \equiv 1 - (h - k)$, which is close to modern values.

There is a large difference between the phase sensed by a tiltmeter and the true phase lag of the bulge axis. This arises from the circumstance that only the portion h – k of the observable factor $\gamma \equiv 1 - (h - k)$ characterizes the bulge, and has the lead angle ε of the bulge axis. The major part, 1.0, is produced by the direct gravity field of the moon, and has zero phase angle. For small angles, the relation between the observed phase angle ψ and ε is $\psi\ [1 - (h - k)] = -(h - k)\ \varepsilon$. If $h = .62$, and $k = .31$, then $\psi = -.449\ \varepsilon$: with $2\varepsilon \equiv 4°.5$, $2\ \psi \equiv -2°.0$. Thus the observed phase angle. is about half the true phase of the bulge, and of ángulo de fase observado es de cerca de la mitad de la verdadera fase del abultamiento y de signo contrario. Su tamaño pequeño aproximadamente de -2.0° y su sensibilidad al comportamiento local del terreno, muestra la dificultad de obtener valores de significancia global. Los patrones locales de inclinación parecen reflejarse en las diferencias en las observaciones de inclinaciones debidas a mareas entre estaciones separadas por distancias moderadas, del orden de 100 Km o menores. El inclinómetro por lo tanto parece ser una herramienta apropiada para mostrar o identificar bloques o zonas de resistencia cortical local y los límites entre tales bloques.

opposite sign. Its small size, about $-2^\circ.0$, and its sensitivity to the local behavior of the ground, indicate the difficulties of obtaining values of global significance. Local patterns of tilt appear to be reflected by differences in tidal tilt observations among stations separated by moderate distances, of the order of 100 Km or less. The tiltmeter thus seems to be a suitable tool for displaying or identifying blocks or zones of local crustal yielding, and the boundaries between such blocks.

(3) *Gravímetros.* Un satélite afecta el valor local de la gravedad en tres formas: (a), por su atracción directa, (b), por la elevación de la estación por el cambio en la marea y (c) por la redistribución de masa en la tierra deformada. (En el contexto presente se toma positiva la gravedad hacia arriba). Las respectivas contribuciones gravitacionales son:

(3) *Gravimeters.* A satellite affects the local value of gravity in three ways: (a), by its direct attraction; (b), by the tidal change of elevation of the station; and (c), by the redistribution of mass in the deformed earth. (Upward gravity is taken as positive in the present context). The respective gravitational contributions are:

$$\text{(a)} \quad \Delta g_1 = \delta U_2 \, \delta r = 2 U_2 (r_0) r_0^{-1};$$

$$\text{(b)} \quad \Delta g_2 = \frac{\delta g}{\delta r} \Delta r = 2 g_0 r_0^{-1} \Delta r;$$

(c) En el exterior de la tierra el potencial gravitacional debido a la alteración de la distribución de masa es $V_2 = k U_2 a^3 r^{-3}$. El valor correspondiente a la gravedad $\frac{\delta V_2}{\delta r}$, es $-3 k U_2 a^{-1}$ en la superficie terrestre. Substituyendo en (b), $\Delta r = h g_0^{-1} U_2$, el cambio total en la gravedad a causa de marea es:

(c) Outside the earth the gravitational potential due to the altered mass distribution is $V_2 = k U_2 a^{3} r^{-3}$. The corresponding value of gravity, $\frac{\delta V_2}{\delta r}$, is $-3 k U_2 a^{-1}$ at the earth's surface. In (b), substitute $\Delta r = h g_0^{-1} U_2$. The total tidal change of gravity is

$$\Delta g = \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 = 2 a^{-1} U_2 (1 + h - 3/2\, k) \qquad (7)$$

Si $h = .62$, $k = .31$, el valor del factor de amplitud pertinente, $\delta = 1 + h - 3/2\, k$, es 1.155. Solamente el residuo $\delta - 1$ representa la deformación. Para obtener este residuo dentro del 3% se requiere que δ sea medida al 4 por millar. De acuerdo con esto, en los gravímetros de mareas terrestres, son esenciales una gran sensibilidad y calibración precisa. Deben distinguirse dos tipos de gravímetros (a) de deflexión y (b) de torsión en el cual el cambio en la gravedad se neutraliza con una fuerza adicional que restablece la geometría a su configuración original. La constante de la escala es por lo tanto independiente del período libre de la masa activa del gravímetro y depende solamente de la escala gravitacional auxiliar. Esta es generalmente una escala de resorte bajo Ley de Hooke cuyo coeficiente y linealidad se establecen dentro de un gran margen repitiendo lecturas de gravímetro en distintas estaciones donde las diferencias de gravedad son grandes y conocidas.

El ángulo de fase ψ de la respuesta del gravímetro de mareas satisface

If $h = .62$, $k = .31$, the value of the pertinent amplitude factor, $\delta = 1 + h - 3/2\, k$, is 1.155. Only the residual $\delta - 1$ represents the deformation. To obtain this residual within 3% requires that δ be measured to 4 parts per thousand. Accordingly, high sensitivity and an accurate calibration are essential in earth-tide gravimeters. Two types of gravimeters should be distinguished — (a), the deflection type, and (b), the null type, in which the change in gravity is neutralized by an auxiliary force which restores the geometry to its original configuration. The scale-constant is then independent of the free period of the gravimeter's active-mass, but depends only on the auxiliary gravity scale. This is generally a Hooke's Law spring scale whose coefficient and linearity are established over an extensive range by repeated readings of the gravimeter at several stations where the differences of gravity are large, and known.

The phase angle ψ of a gravimeter's tidal response satisfies

$$(1 + h - 3/2\, k)\, \psi = (h - 3/2\, k)\, \varepsilon \qquad (8)$$

en donde $2\psi = .134\ (2\varepsilon) = 0^\circ.60$ cuando $h = .62$,

Whence $2\psi = .134\ (2\varepsilon) = 0^\circ.60$ when $h = .62$, $k = .31$

$k = .31$ y $2\,\varepsilon = 4°.5$. Este ángulo pequeño representa un tiempo de desplazamiento de 1.2 minutos en la manera de 12 horas.

RUIDO, SITIOS Y SENSIBILIDAD

Requisito elemental para cualquier instrumento que mide mareas es una sensibilidad para registrar con precisión las pequeñas variaciones representadas por la marea. La parte útil de la respuesta de la marea es la que caracteriza propiamente al abultamiento que en los inclinómetros y gravímetros es solamente una porción de la señal total. Instrumentos típicos de los tres tipos, sin embargo, son comparables en su propia respuesta, en la parte *útil* de la señal. Para esta comparación considérense los siguientes desplazamientos lineales equivalentes producidos por el abultamiento de la marea lunar:

(a) para un extensómetro de 30 metros de longitud con $h = .62$ (véase ec. (6)), el cambio total de marea medio en distancia en una estación ecuatorial es de 1.4×10^{-4} cm, todo lo cual es utilizable.

(b) En inclinación (véase pág. 48) para $h = .62$ y $k = .31$, el valor de la distancia angular correspondiente es $2\,(.69)\,(7.53 \times 10^{-8}) = 1.04 \times 10^{-7}$ radianes, de lo cual se usa la fracción .449. Mientras que en un tubo de nivel de 150 metros de largo, tal como el de Michelson, el desplazamiento útil es 7.0×10^{-4} cm.

(c) En un gravímetro, el desplazamiento ΔZ de la masa activa producida por un cambio gravitacional Δg, es $\Delta Z = (P_o/_2\,\pi)^2\,\Delta g$, donde el periodo, P_o, es típicamente de 30 segundos aproximadamente. Con los valores previos de h y k, la variación en Δg (véase ec. (7)) es 1.70×10^{-4} μgals. de la cual es útil la fracción .134. De acuerdo con esto la parte útil de la deflexión ΔZ es 5.2×10^{-4} cm.

Así, para cada uno de estos ejemplos, los diseñadores de los aparatos los han provisto para dar valores comparables de desplazamiento medible. – 1.4×10^{-4} cm, 7.0×10^{-4} cm, 5.2×10^{-4} cm. Un problema básico como siempre, concierne al ruido y la relación señal a ruido en la banda de frecuencia de las señales de mareas. El ruido es de dos clases, el propio del sistema instrumental y el que se origina en el lugar y el medio circundante. El primero es específico tanto a los tipos de instrumento, como a sus características individuales lo que es un problema demasiado complejo para tan corta consideración.

Respecto al sitio los requisitos de los extensómetros e inclinómetros son similares. Ambos responden a deformaciones locales del lugar. Por lo tanto es deseable un área estable, libre de deformaciones geológicas atípicas. Se necesita una posición de profundidad moderada, de 50 pies o más bajo la superficie para evitar efectos de temperatura superficial y variaciones tensiones (G. Jobert, 1960). Parecen ideales las cimentaciones en rocas ígneas y masivas para pequeños inclinómetros, los pozos superficiales perforados en tales rocas eventualmente proveerán un medio económico de obtener una buena distribución geográfica de estaciones de inclinación. En cualquier evento, es claro que las instalaciones de extensómetros e inclinómetros se

and $2\,\varepsilon = 4°.5$. This small angle represents a time displacement of 1.2 minutes in the 12-hour tide.

NOISE, SITES AND SENSITIVITY

An elementary need in any type of tide meter is sufficient sensitivity for following acurately the very small variations represented by the tide. The useful part of the tidal response is that characterizing the bulge itself, which in tiltmeters and gravimeters is only a fraction of the total signal. Typical instruments of the three types are, however, comparable in their designed response to the *useful* part of the signal. For this comparison, consider the following equivalent linear displacements produced by the lunar tidal bulge:

(a) For a strainmeter 30 meters long with $h = .62$ (see eq. (6)), the total tidal change in distance at an equatorial station is 1.4×10^{-4} cm, all of which is useful.

(b) In tilt (see p. 48), for $h = .62$ and $k = .31$, the corresponding angular range is $2\,(.69)\,(7.53 \times 10^{-8}) = 1.04 \times 10^{-7}$ radians, of which the fraction .449 is useful. Whence in a level tube 150 meters long, such as Michelson's, the useful displacement is 7.0×10^{-4} cm.

(c) In a gravimeter, the displacement ΔZ of the active mass produced by a gravity change Δg is $\Delta Z = (P_o/_2\,\pi)^2\,\Delta g$, where the period, P_o, is typically about 30 seconds. With the previous values of h and k, the range in Δg (see eq. (7)) is 1.70×10^{-4} μgals, of which the fraction .134 is useful. Accordingly, the useful part of the deflection ΔZ is 5.2×10^{-4} cm.

Thus in each of these examples, the instrument designers have provided comparable ranges of useful displacement for measurement – 1.4×10^{-4} cm, 7.0×10^{-4} cm, 5.2×10^{-4} cm. A basic question, as always, concerns the noise, and the signal-to-noise ratio in the frequency band of the tidal signals. This noise is of two kinds – that internal to the instrument system, and that originating at the site and in the environment. The first kind is specific both to the instrument types and to the individual design features of the instrument, a subject too complex for brief consideration.

In respect to sites, the requirements of strainmeters and tiltmeters are similar. Both respond directly to local deformation at the site. Thus a geologically stable area, free of atypical geological strains, is desired. A position of only moderate depth. feet or more below surface, is needed to avoid effects of surface temperature and stress variations (G. Jobert, 1960). Foundations on massive igneous rocks appear to be ideal. and for small tiltmeters, shallow drill holes in such rocks may eventually provide an economical means of obtaining good geographic distribution of tilt stations. In any event, it is apparent that installations of strainmeters and tiltmeters are generally regarded as fixed, because of the importance and cost of a good foundation.

consideren generalmente como fijas, por la importancia y costo de una buena cimentación. Esto es desafortunado para observaciones de mareas, pues la señal de marea es esencialmente repetitiva; las más importantes mareas diurnas y semidiurnas, factibles ahora de medirse satisfactoriamente pueden muy bien medirse por observaciones que duran sólo varios meses. La investigación de grandes áreas donde no existe información, se aceleraría si los instrumentos pudiesen cambiarse frecuentemente a nuevos sitios. Para este reconocimiento, con el propósito de encontrar zonas o bloques de transición, si existiesen, en el patrón global de mareas, el gravímetro es especialmente adecuado. Su respuesta siendo puramente gravitacional, es inmune a deformaciones locales menores e integra bien las contribuciones de puntos lejanos. Algunos lugares donde son deseables mediciones de mareas terrestres, son tan inestables que solamente puede usarse gravímetro. En esta categoría están algunas islas oceánicas que proporcionan una oportunidad única para estudiar áreas grandes. También está en esta categoría la estación en el Polo Sur, donde la gruesa capa de hielo parece moverse cerca de 100 pies al año, acompañada de inclinación en la cimentación. Para evitar efectos de inclinación de la cimentación, los gravímetros se cuelgan en balancines a satisfacción sobre la vertical. Si se desea se pueden introducir también resortes en soportes para aislar el sistema de vibraciones de alta frecuencia. Por tanto el gravímetro debe considerarse como un instrumento portátil que mide mareas, con mínimas condiciones de cimentación. Es adecuado para exploraciones de reconocimiento de grandes regiones desprovistas de información de mareas. Por ello, en áreas donde el patrón de mareas resulta de interés especial, la ubicación de estaciones fijas puede escogerse más racionalmente.

For tidal observations, this is unfortunated, because the tidal signal is essentially repetitive. The major semi-diurnal and diurnal tides now feasible of satisfactory measurement may be measured well by observations lasting only several months. It would speed the investigation of the large areas where no information exists if instruments could be moved often to new sites. For such reconnaissance, for the purpose of finding zones or blocks of transition, if any, in the global tidal pattern, the gravimeter is especially suited. Its response, being purely gravitational, is immune from minor local deformations but integrates well the contributions from distant points. Some sites where earth-tide measurements are desirable are so unstable that only the gravimeter can be used. In this category are some oceanic islands which afford unique opportunities for sampling large areas. Also in this category is the station at South Pole, where the thick ice sheet appears to move about 100 feet a year, accompanied by tilting of the foundation. To avoid effects of foundation tilts, gravimeters are successfully suspended in the vertical on gimbals. Cushioning springs may also be introduced to isolate the system from high frequency vibration if desired. Thus the gravimeter should be regarded as a portable tide meter, with minimal demands on foundation conditions. It is suited for reconnaissance exploration of large regions devoid of tidal information. Thereafter, in areas where the tidal pattern is found to be of special interest, the locations of fixed stations may be more rationally chosen.

SOLUCIONES PARA LOS NÚMEROS DE MAREAS

Para obtener los tres números de mareas, h, k, l, se requiere obviamente una combinación de observaciones. Dos inclinómetros dan las dos componentes de inclinación y de ahí $\gamma = 1 + k - h$. El gravímetro suministra la combinación $\delta = 1 + h - 3/2\ k$. De donde ambas observaciones dan

SOLUTION FOR THE TIDAL NUMBERS

To obtain all three tidal numbers, h, k, l, a combination of observations obviously is required. Two tiltmeters provide the two components of tilt, and thus $\gamma = 1 + k - h$. A gravimeter supplies the combination $\delta = 1 + h - 3/2\ k$. Whence both observations provide

$$k = 4 - 2\ (\gamma + \delta) \qquad h = 5 - (3\ \gamma + 2\ \delta)$$

Las soluciones para k abarcan diferencias en números de magnitud de cerca de 13 k; y para h diferencias en números del tamaño de 8 h. De nuevo es claro el requisito de precisión. Para determinar l se necesita obviamente extensómetros. En una instalación que incluya dos extensómetros, dos inclinómetros y un gravímetro las combinaciones observadas son $\gamma = 1 + k - h$, $\delta = 1 + h - 3/2\ k$, $\beta = h - 3\ l$. De aquí $l = \frac{1}{3}\ [5 - 3\ (\gamma + 2\ \delta) - \beta]$. Puesto que el valor de l es cerca de .09 su determinación por este método abarca diferencias de números del rango de 18 l aproximadamente. Tanto la precisión requerida en los cinco instrumentos como el costo inicial son altos.

The solution for k involves differences in numbers of magnitude about 13 k; and for h, differences in numbers of size 8 h. Again the requirement for precision is apparent. Strainmeters are obviously needed for determining l. In an installation involving two strainmeters, two tiltmeters and a gravimeter, the observable combinations are $\gamma = 1 + k - h$, $\delta = 1 + h - 3/2\ k$, $\beta = h - 3\ l$. Whence $l = 1/3\ [5 - 3\ (\gamma + 2\ \delta) - \beta]$. Since l is about .09, its determination by this method involves differences of numbers of size about 18 l. Both the precision required in the five instruments of such an installation, and their initial cost, are high.

UNA SUGESTIÓN DE PRIORIDAD

Estas consideraciones me inspiran una sugestión al concluir. Comencé esta plática señalando la necesidad de una distribución geográfica más uniforme de las observaciones, con énfasis en regiones ecuatoriales. Concluyo con la sugestión de que un estudio preliminar de estas grandes áreas con instrumentos portátiles y prioridad para observaciones de las grandes mareas diurnas y semidiurnas sería bastante económico. Por sus demandas relativamente modestas con respecto al sitio, el gravímetro parece especialmente adecuado para este propósito.

A SUGGESTED PRIORITY

Such consideration bring me a concluding suggestion. I started this talk by pointing to the need for a more uniform geographic distribution of the observations, with emphasis upon the value of equatorial locations. I conclude with the suggestion that economy will probably be served by preliminary sampling of these large areas with portable instruments, with priority upon observation of the large semidiurnal and diurnal tides. Because of its relatively modest demands relative to the site, the gravimeter seems especially suited for this purpose.

BIBLIOGRAFIA — *BIBLIOGRAPHY*

JEFFREYS, H. 1959. *The Earth,* (4th. ed.) Cambridge University Press, 1 vol.

JOBERT, G. 1960. *Annales de Géophysique,* 16 (1):1-55.

MELCHIOR, P. 1966. *The Earth Tides.* Pergamon Press, 1 vol.

MICHELSON, A. A. 1914. Preliminary Results of Measurements of the Rigidity of the Earth. *Astrophys. Jour.* 39:105-138.

MICHELSON, A. A. & H. G. GALE. 1919. The Rigidity of the Earth. *Astrophys. Journ.* 50:330-345.

MOLODENSKY, M. S. 1953. Elastic Tides, Free Nutation, and Some Problems of the Earth's Structure. *Proc. Geophys. Inst.* (Moscow). No. 19 (146), pp. 3-52.

MUNK, W. & G. F. MAC DONALD. 1960. *The Rotation of the Earth.* Cambridge University Press, 1 vol.

PARIISKY, N. N. 1959. On the Effect of Earth Tides on the Secular Retardation of the Earth's Rotation. *Marées Terrestres, Bulletin d'Inform.* No. 16. (Août).

SLICHTER, L. B. 1963. Secular Effects of Tidal Friction upon the Earth's Rotation. *Jour. Geophys. Res.,* 68 (14).

TAKEUCHI, H. 1950. On the Earth Tides of the Compressible Earth of Variable Density an dElasticity. *Trans. American Geophys. Union.* 31:651.

APENDICE, RE-NOTACION *APPENDIX, RE-NOTATION*

U_2 = potencial gravitacional lunar en la superficie terrestre
gravitational potential of moon at surface of earth

G = Constante de Newton
Newton's Constant
$= 6.67 \times 10^{8}$

m = masa de la luna,
mass of moon,
$(Gm)\ 4.30287 \times 10^{18}$

a = radio ecuatorial terrestre
equatorial radius of earth
$= 6.3781 \times 10^{8}$

$\langle R^{-3} \rangle$ = media en el tiempo de
time mean of
$R^{3} = 1.0114\ A_0$

Donde A_0 es el semi-eje mayor medio de la órbita lunar, asociado a la distancia media perturbadora a la luna, R_0, así
Here A_0 is the mean semi-major sufis of the Moon's orbit, relative to the pertinbed mean distance to the Moon, R_0, this

$$R_0 = A_0\ (1 + e^2/_2),\ \begin{matrix}\text{donde}\\ \text{where}\end{matrix}\ e = .0519$$

es la elipticidad de la órbita lunar. Con
is the ellipticity of the moon's orbit. With

$$R_0 = 3.84400 \times 10^{10}\ \text{cm},\ A_0\ \begin{matrix}\text{es}\\ \text{is}\end{matrix}\ 3.83822 \times 10^{10}\ \text{cm}$$

$P_2\ (\cos\theta) = 1/2\ (3\cos^2\theta - 1).$ la función de Legendre de grado 2.
the Legendre function of degree 2.

θ = ángulo zenital medido de la línea de los centros tierra-luna a la vertical geocéntrica en la estación
zenith angle, measured from earth-moon line of centers to geocentric vertical at the station

h, k = números de Love
Love numbers

l = número de Shida
Shida number

g = gravedad en el ecuador
gravity at equator
$= 978.031$

u_r = componente radial del desplazamiento del abultamiento debido a la marea.
radial componente of displacement of tidal bulge.

$u\theta$ = componente tangencial del desplazamiento del abultamiento debido a la marea (positivo cuando se aleja de la línea de los centros).
tangential component of displacement of tidal bulge (positive away from line of centers).

ϕ = ángulo medido desde el eje del abultamiento cuando el retraso $= \theta$ cuando el retraso de fase $= 0$.
angle measured from axis of bulge $= \theta$ when phase lag $= 0$.

ε = ángulo entre la línea tierra-luna (o sol) y el eje del abultamiento debido a marea lunar (o solar)

$\Omega_N = [(\Omega_z - n)^2 + \Omega_y^2 \cos^2 \psi]$ 1/2
angle between earth-moon (or sun) line and axis of lunar (or solar) tidal bulge.

Ω_z = componente de la velocidad angular de la tierra normal a la órbita lunar $= 6.68973 \times 10^{5}$
= component of earth's angular velocity normal to moon's orbit

Ω_y = componente de la velocidad angular terrestre a lo largo del plano de la órbita $= 2.90125 \times 10^{5}$
component of earth's angular velocity in plane of orbit

η = velocidad angular orbital de la luna $= 2.66170 \times 10^{6}$
moon's orbital angular velocity

ψ = ángulo de longitud de la luna medido desde el eje OX en el sistema de coordenadas geocéntrico derecho x, y, z. También 2ψ = ángulo de fase, indicado instrumentalmente de la marea M_2.
longitude angle of moon measured from OX axis in the geocentric right coordinate system x, y, z. Also 2ψ = instrumentally indicated phase angle of M_2 tides.