LA GEODESIE SPATIALE GEOMETRIQUE
A L'INSTITUT GEOGRAPHIQUE NATIONAL FRANCAIS

A. FONTAINE *

RESUMEN

La geodesia espacial geométrica está bien desarrollada en el Instituto Geográfico Nacional de Francia, pues permite resolver el problema de la descripción del sólido "tierra". La cámara balística ajustada es bien simple, para poder transportarla fácilmente e instalarla en cualquiera región del mundo. Pero, al contrario, los cálculos son relativamente complicados, aunque abordables por ordenadores medios. Las fórmulas y el método que se describen en este artículo derivan de la rigurosa aplicación de la teoría de los mínimos cuadrados, cuando se quieren aplicar a problemas planteados por la explotación de las placas fotográficas tomadas en los pasos de un satélite artificial.

RESUME

La géodésie spatiale géomètrique a été développée à l'Institut Géographique National frnçais car elle permet de résoudre le problème de la description du solide "terre". La chambre balistique mise au point est très simple, pour pouvoir être facilement transportée et installée dans n'importe quelle région du monde. Par contre les calculs sont relativement compliqués mais restent cependant abordables par des ordinateurs moyens. Les formules et la méthode décrites dans cet article découlent de l'application rigoureuse de la théorie des moindres carrés lorsqu'on veut l'appliquer aux problèmes posés par l'exploitation des plaques photographiques prises lors des passages d'un satellite artificiel.

* *Institut Géographique National, Paris*

INTRODUCTION

La géodésie est une vieille science qui accumule depuis plusieurs siècles des observations précises ayant permis de fixer la forme de la terre et aussi d'apporter une aide importante aux travaux d'équipement dans différents pays. Comment se fait-il que les techniques spatiales, à partir d'objets circulant à plusieurs centaines de kilomètres, aient pu nous apporter des renseignements sur la géométrie du solide terre? Cette question fera l'objet de l'introduction de cet article, tandis qu'ensuite nous donnerons un aperçu des méthodes et des instruments d'observation et de calcul utilisés dans ce domaine par l'institut géographique national français.

Cependant, l'auteur de cet article, appartenant au groupe d'études de la géodésie, insistera plus particulièrement sur les questions "calculs". Son exposé sera divisé en deux grandes parties, l'une consacrée à la géodésie spatiale et aux observations, l'autre axée sur le calcul d'une campagne d'observations photographiques d'un satellite artificiel. Cette deuxième partie reprend le texte d'une communication faite par l'auteur au congrès de l'UGGI et risque d'être publiée un jour dans le bulletin de l'Association Internationale de Géodésie.

LA GEODESIE SPATIALE GEOMETRIQUE

Pourquoi ;a géodésie spatiale géométrique? Essentiellement pour sortir des difficultés dans lesquelles était prisonnière la triangulation, qui est incapable de décrire géométriquement le solide "terre". Mais si cette ouverture vers l'espace résout le problème théorique, elle apporte des problèmes instrumentaux nouveaux, car l'objet visé se déplace rapidement. Le géodésien tombe un peu de Charybde en Scylla; mais, s'appuyant sur l'un et sur l'autre, il perfectionnera sa connaissance de notre planète; la géodésie spatiale permet de décrire directement le solide terre, mais elle ne donne que quelques points éloignés, la géodésie terrestre reste nécessaire pour remplir les intervalles à moindres frais.

A) APPORT THEORIQUE DE LA GEODESIE SPATIALE GEOMETRIQUE

Pour comprendre l'apport considérable de la géodésie spatiale, il faut revenir aux notions de base de la géodésie terrestre, et ceci, en examinant le développement historique de cette science.

Lorsqu'en 1669, l'abbé Picard commençait la première véritable triangulation et déterminait ainsi une bonne valeur du rayon terrestre, il utilisait un instrument qui mesurait les angles dans le plan formé par le point de station et les deux points visés. Pendant plus d'un siècle, les géodésiens opéreront comme lui. Mais avec le perfectionnement des mesures, on va s'apercevoir qu'il faudrait tenir compte des dénivelées et de la refraction atmosphérique. Les difficultés commencèrent. Dès la fin du 18ème siècle, on avait compris qu'il était impossible de connaître avec précision l'angle zénithal, influencé par les conditions météorologiques au moment des observations.

Dupuis cette époque, au lieu de faire de la géometrie pure, le géodésien a introduit la notion de verticale et naturellement, de surface équipotentielle, car pratiquement, il ne peut mesurer avec précision que l'angle formé par les deux plans contenant la verticale de la station et chacun des deux points visés. Chaque observation, au lieu de donner la direction du point visé, donne un plan dans lequel se trouve ce point visé.

Heureusement pour le géodésien, ses mesures d'angles sont telles qu'une direction approchée de la verticale est suffisante. Il admet que la terre est un ellipsoïde dont les dimensions et l'aplatissement ont pu être déterminés de façon acceptable dès les débuts du 19ème siècle. La triangulation devient capable de calculer des positions sur un ellipsoïde, mais est impuissante pour obtenir les altitudes. Ces dernières sont obtenues grâce à la technique du nivellement de précision, mais cette fois-ci, par rapport à une surface équipotentielle, appelée gèoïde. Géoïde et ellipsoïde de référence diffèrent legèrement; une carte n'est pas une représentation du solide "terre", c'est un document très intéressant qui donne en chaque point une direction approchée de la verticale et une altitude directement liée à la différence de potentiel.

Pour sortir de cette impasse, les géodésiens ont eu par le passé recours à la gravité ou à l'astronomie. Aujourd'hui, ils font appel aux satellites; en effet, pour ces objets situés en dehors de l'atmosphère terrestre, la réfraction est très bien connue, grâce aux astronomes. Si nous pouvons viser un satellite, nous déterminerons sa direction géométrique, et les difficultés auxquelles se sont heurtés nos prédécesseurs tomberont d'elles-mêmes, mais d'autres surgiront, dues aux mouvements du point visé.

En conclusión de ce premier chapitre, on peut dire que la description géométrique du solide "terre", impossible par triangulation, devient possible en géodésie spatiale. Chaque observation ne fournit plus un plan, lieu du point visé, mais donne une droite. Le gain est considérable, car la notion de verticale disparaît complèment; malheureusement, comme nous allons le voir, les observations son très compliquées et très coûteuses, par rapport à celles de la géodésie normale.

B) LES OBSERVATIONS

1o.) La Chambre balistique I.G.N. (Institut Geographique National)

Une chambre balistique est un instrument capable de déterminer la direction d'un satellite artificiel. Le problème le plus délicat est celui du temps de chaque observation, puisque les satellites ont sur leur orbite une vitasse de l'ordre de 7 Km/s. Il n'est plus question d'utiliser un théodolite, seule la photographie permet de résoudre de façon plus ou moins satisfaisante les difficultés. Dans cet article, nous n'examinerons pas les solutions étrangères, nous montrerons simplement quels ont éte les choix de l'ingénieur géographe Deck qui, dès 1960, a été chargé de mettre au point une chambre balistique I.G.N.

L'Institut Géographique National regroupe toutes les activités géodésiques, photogrammétriques et cartographiques; si l'etablissement ne néglige pas la recherche dans tous ces domaines, il reste cependant un organisme de production, capable d'envoyer ses équipes avec leur matériel en tout point de notre planète. Aussi la géodésie spatiale a-t-elle été abordée par l'angle du terrain; on voulait un matériel simple, robuste et léger, qui pourrait être servi par un personnel habitué aux techniques antérieures de l'I.G.N.

La chambre balistique I.G.N. répond à ces servitudes. Elle ne comporte aucun limbe ni axe de rotation, elle se pose sur un pilier et rest pendant toutes les opérations braquée vers le même secteur du ciel. C'est une simple chambre photographique à plaques, de focale 30 cm; elle comporte deux obturateurs: un rideau passant devant la plaque et un disque percé d'une fenêtre tournant devant l'objectif.

2o.) *La technique des observations*

La manipulation est très simple; l'observateur a au préalable gradué grossièrement son pilier suivant les azimuts; il dispose d'un rapporteur et d'une nivelle pour afficher une distance zénithale approchée. Il instale donc la chambre braquée dans une direction fixée *a priori*; pour éviter tout mouvement, il plâtre même les pieds de l'instrument.

Au début des observations, on photographie les étoiles en déclenchant l'obturateur à rideau, puis on lance le disque tournant, à un tour par seconde, piloté par une horloge à quartz. Lorsque le satellite est photographié, sa trajectoire est découpée en une série de points, à intervalle régulier d'une seconde. Après le passage du satellite, on photographie à nouveau les étoiles, ce qui permettra de s'assurer de la stabilité de la chambre pendant toute la durée des opérations, c'est-à-dire pendant une vingtaine de minutes.

Les stations sont à des distances considérables, plusieurs milliers de kilomètres; donc, il y a deux problèmes à résoudre: d'une part, chaque station doit viser la même portion de trajectoire du satellite; d'autre part, les obturateurs doivent être rattachés au mêze temps. Le premier point est résolu par des calculs préparatoires à Paris; on décide que l'on visera le satellite à son passage à une certaine latitude, et on calcule pour chaque station l'azimut, la distance zénithale et le temps de l'observation. On se sert d'éléments approchés de l'orbite, et comme on est obligé d'extrapoler, ces calculs entraîment de gos écarts dans le temps; c'est l'observateur lui-méme qui, à chaque passage, détermine l'écart en temps entre les prévisions et la réalité, et connaît ainsi la correction à apporter aux éphémérides envoyées par Paris. Le deuxième problème, celui du temps des disques obturateurs, se ramène à la mise à l'heure d'instruments de campagne. Les opérateurs de l'I.G.N. connaissent bien ce genre de manipulations qu'ils pratiquent couramment pour la détermination de points astronomiques; on se sert d'un récepteur radio qui, à chaque top des signaux horaires, déclenche un flash devant le disque obturateur lui-même et permet ainsi de lire le temps avec une précision de une à deux millisecondes.

A la fin des observations, sur place, l'opérateur développe immédiatement la plaque, puis se prépare pour le passage suivant s'il y a lieu. Etant donné le temps très court d'exposition, seuls les satellites brillants, ayant une magnitude telle que la lumière reçue soit capable d'impressionner la plaque, peuvent être utilisés. Pour l'instant, dans les campagnes de géodésie spatiale de l'I.G.N., on s'est servi des satellites ballons Echo I, Echo II et Pageos.

En conclusion, on peut affirmer que la chambre balistique I.G.N. est un excellent instrument de terrain dont les servitudes d'emploi ont été allégées au maximum. Sa focale de 300 millimètres, son disque obturateur piloté par une horloge à quartz et mis à l'heure par signaux horaires, ne prétendent pas en faire un appareil de laboratoire capable d'atteindre une très grande précision; mais les choix des ingénieurs ont été très judicieux, et malgré toute sa simplicité, la chambre balistique de l'I.G.N. permet de garantir 1/75,000° pour une observation isolée, et à peu près une dizaine de mètres pour les coordonnées de stations distantes de plusieurs milliers de kilomètres.

3o.) *Le dépouillement des plaques*

Nous n'insisterons pas sur les mesures les coordonnées au comparateur Zeiss-Iéna, ces techniques n'étant pas propres à la géodésie spatiale. Mais il nous faut tout de même dire que sur chaque cliché, on mesure les coordonnées des étoiles connues et les coordonnées de chaque point de la trace du satellite (dans la suite de l'exposé, ces derniers points seront parfois appelés flashs).

Comment retrouver les étoiles connues? L'opérateur pourrait essayer de les repérer grâce à une carte du ciel; cette détermination serait longue et fastidieuse; on préfère un calcul en ordinateur. On connaît, grâce à l'observateur de terrain, les coordonnées, l'azimut et la distance zénithale approchée de la chambre; on possède un fichier des étoiles du FK4; on utilise un programme qui donne les coordonnées plaque des étoiles situées dans la région du ciel visée. L'opérateur n'a plus qu'à afficher ces valeurs et pointer l'étoile la plus proche des coordonnées annoncées. Il y a parfois des erreurs d'identification, mais elles sont relativement rares. De plus, ces coordonnées approchées nous serviront de référence dans les calculs ultérieurs pour déterminer par moindres carrés la direction définitive de la chambre.

CALCULS D'UNE CAMPAGNE D'OBSERVATIONS PHOTOGRAPHIQUES D'UN SATELLITE ARTIFICIEL

Chaque organisme a ses méthods de calcul des observations photographiques d'un satellite artificiel. Dans cette partie sera décrite celle mise en oeuvre à l'Institut Géographique National pour traiter les données recueillies au cours de l'opération de la jonction Europe-Afrique réalisée dans le cadre de ce que l'on appelle la RCP 133. A partir des photographies du satellite Pageos prises en six stations, Goult (France), San Fernando (Espagne), Dionysos (Grèce), Besançon (France), Dakar (Sénégal), et Fort-Lamy (Tchad), il s'agissait de déterminer les six coordonnées trirectangulaires des deux stations africaines.

Avant de passer à l'exposé de la méthode choisie, il faut tout de suite en préciser les limites: nous supposons que les observations de chaque évènement sont concentrées dans un court intervalle de temps (2 à 3 minutes), ce qui permet de prendre comme expression analytique de la trajectoire en fonction du temps un polynôme du 4ème degré. Ceci montre que notre but est essentiellement la détermination géométrique des stations et non l'expression du potentiel terrestre qui, dans nos calculs, sera introduit comme une donnée connue.

Toute exploitation d'observations pose toujours deux questions: une question théorique et une question pratique, l'une et l'autre étroitement imbriquées; la première est souvent sacrifiée aux impératifs de la seconde, qui est tributaire des moyens matériels. Notre solution a consisté à poser le problème dans toute sa généralite et à montrer qu'il était parfaitement réalisable avec des ordinateurs modernes du type de la 1130 IBM. A la suite d'une campagne de photographies quasi simultanées d'un satellite, l'observation brute est fournie par les mesures des clichés sous un comparateur, qui donnent les deux coordonnées rectangulares sur la plaque des images des étoiles et d'un certain nombre de points de la trajectoire du satellite; ce seront donc nos données de départ.

Dans cette partie, nous exposerons d'abord l'essentiel du processus théorique choisi, puis le problème des corrections aux observations pour les rendre conformes à nos hypothèses; enfin, nous donnerons un aperçu de la solution pratique et des résultats obtenus.

A) PROCESSUS THEORIQUE

Dans ce chapitre, nous ne parlerons pas des corrections à apporter aux coordonnées observées et nous nous bornerons à deux questions simples:

la pose des relations d'observation résultant des mesures au comparateur, et l'intersection dans l'espace, sur une même portion de trajectoire du satellite, des rayons issus de différentes stations.

1) *Pose des relations d'observation*

L'image sur la plaque résulte de l'impact dans la gélatine du rayon lumineux. Nous avons donc á résoudre le problème de l'intersection d'un plan inconnu avec une droite définie par deux points inconnus, mais dont nous connaissons des positions approchées. Le plan est celui de la plaque photographique; les points sont: le satellite à un instant donné, le point nodal objet de la chambre balistique qui définit ce qu'en pratique nous appellerons la station.

Nous considérerons que le plan de la plaque est rapporté à un système instrumental dans lequel il a pour équation $\zeta=-p$ (p = distance focale de la chambre balistique); par contre, nous nous définissons les points (satellite et station) par leurs coordonnées x, y, z, et X, Y, Z, dans un système cartésien lié à la terre. Tout point de coordonnées ξ, η, ζ, dans un système lié à l'instrument, a pour coordonnées, dans le système cartésien terrestre:

$$\xi' = X + \ell_1\ \xi + m_1\ \eta + n_1\ \zeta$$

$$\eta' = Y + \ell_2\ \xi + m_2\ \eta + n_2\ \zeta$$

$$\zeta' = Z + \ell_3\ \xi + m_3\ \eta + n_3\ \zeta$$

Tout au long de cet exposé, nous emploierons les notations suivantes:

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{\ell} \text{ vecteur de coordonnées } \ell_1, \ell_2, \ell_3 & & \\ \overline{m} - \quad - & m_1, m_2, m_3 & \\ \overline{n} - \quad - & n_1, n_2, n_3 & \end{array}\right\} \text{vecteurs définissant le système instrumental}$$

$$\overline{F} - \quad - \quad x - X, y - Y, z - Z$$

$$\overline{L} = \overline{F} \wedge \overline{\ell} \qquad \overline{M} = \overline{F} \wedge \overline{m} \qquad \overline{n}' = \overline{\ell} \wedge \overline{m}$$

$$D = \overline{F} \cdot \overline{n}$$

On montre facilement que les coordonnées plaques sont données par les formules suivantes:

$$\xi = - \frac{\overline{n} \cdot \overline{M}}{D} p \qquad \eta = \frac{\overline{n} \cdot \overline{L}}{D} p$$

En différenciant les deux formules précédentes, nous obtenons les deux relations d'observation correspondant à chaque point observé au comparateur:

$$\frac{\xi}{D} \overline{M} \, d\overline{\ell} + \frac{\eta}{D} \overline{M} \, d\overline{m} - \frac{p}{D} \overline{M} \, d\overline{n} + \frac{\overline{n}\,\overline{n}'}{D^2} \, p \, \overline{M} \, (d\overline{A} - d\overline{S})$$

$$+ \xi_{cal.} - \xi_{obs.} = v$$

$$- \frac{\xi}{D} \overline{L} \, d\overline{\ell} - \frac{\eta}{D} \overline{L} \, d\overline{m} + \frac{p}{D} \overline{L} \, d\overline{n} - \frac{n \, n'}{D^2} \, p \, \overline{L} \, (d\overline{A} - d\overline{S})$$

$$+ \eta_{cal.} - \eta_{obs.} = v$$

les inconnues étant les 15 coordonnées des 5 vecteurs $d\overline{\ell}$, $d\overline{m}$, $d\overline{n}$, $d\overline{A}$ et $d\overline{S}$.

$d\overline{\ell}$, $d\overline{m}$, $d\overline{n}$ définissent les déplacements du plan

$d\overline{A}$ définit le déplacement du satellite

$d\overline{S}$ — — de la station

Lorsque le point observé sur la plaque est une étoile, seules interviennent les inconnues de déplacement du plan. Lorsque le point observé sur la plaque est le satellite, la relation est complète, si nous sommes en une station inconnue; si par contre, la station a des coordonnées connues, nous aurons $d\overline{S} = 0$.

Théoriquement, les vecteurs $d\overline{\ell}$, $d\overline{m}$, $d\overline{n}$, devraient être assujettis à certaines conditions pour que le système instrumental reste normé et trirectangulaire; mais nous supposerons que les inconnues $d\overline{\ell}$, $d\overline{m}$, $d\overline{n}$, sont quelconques, ce qui revient à dire que le système instrumental n'est plus isotrope, ou encore, à admettre que dans le plan de la plaque les coordonnées calculées se déduisent des coordonnées observées par une transformation homographique.

Cependant, si nous abandonnions toutes les conditions, nous nous trouverions devant une indétermination; il faut en conserver au moins une. Nous imposerons la relation:

$$d\overline{n} = dh\,\overline{\ell} + dk\,\overline{m}$$

Cette condition simplifie les relations d'observation qui deviennent:

$$\frac{\xi}{D}\,\overline{M}\,d\overline{\ell} + \frac{\eta}{D}\,\overline{M}\,d\overline{m} + p\,dh + \frac{\overline{n}\,\overline{n}'}{D^2}\,p\,\overline{M}\,(d\overline{A} - d\overline{S})$$

$$+ \xi_{cal.} - \xi_{obs.} = v$$

$$-\frac{\xi}{D}\,\overline{L}\,d\overline{\ell} - \frac{\eta}{D}\,\overline{L}\,d\overline{m} + p\,dk - \frac{\overline{n}\,\overline{n}'}{D^2}\,p\,\overline{L}\,(d\overline{A} - d\overline{S})$$

$$+ \eta_{cal.} - \eta_{obs.} = v$$

2) *Intersection dans l'espace sur une trajectoire*

Nous supposerons que pendant le temps des observations, la trajectoire du satellite peut être représentée par trois polynômes du troisième degré, que nous pouvons écrire sous forme vectorielle:

$$\overline{A} = \overline{A}_o + \overline{A}_1 t + \overline{A}_2 t^2 + \overline{A}_3 t^3$$

Dans nos relations d'observation précédentes, nous poserons:

$$d\overline{A} = d\overline{A}_0 + d\overline{A}_1 t + d\overline{A}_2 t^2 + d\overline{A}_3 t^3$$

introduisant ainsi douze inconnues $d\overline{A}_0$, $d\overline{A}_1$, $d\overline{A}_2$ et $d\overline{A}_3$.

Lorsque nous avons appliqué nos relations à une expérience pratique de la jonction Europe-Açores, nous nous sommes aperçus que le vecteur $\overline{A}_2$ trouvé, accélération au point $\overline{A}_0$, différait de quelques gals de l'accélération $\overline{G}$ que l'on pouvait calculer à partir d'une expression simplifiée du potentiel terrestre:

$$W = GM \left[\frac{1}{r} - J_2 \frac{R^2}{r^2} P_2 (\sin \beta) \right]$$

Aussi, au lieu de considérer les coefficients $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, comme des inconnues, nous avons préféré les calculer en fonction de l'expression ci-dessus du potentiel.

Nous aboutissons à la méthode suivante:

a) Calcul d'une trajectoire approchée

Nous écrivons les relations d'observation, dans lesquelles nous prenons:

$$d\overline{A} = d\overline{A}_0 + d\overline{A}_1 t + d\overline{A}_2 t^2 + d\overline{A}_3 t^3$$

et la résolution par moindres carrés nous donne une expression de la trajectoire:

$$\overline{A} = \overline{A}_0 + \overline{A}_1\ t + \overline{A}_2\ t^2 + \overline{A}_3\ t^3$$

b) Calcul de la trajectoire définitive

A partir des valeurs trouvées ci-dessus, nous calculons en trois points (aux temps $-\theta, 0, \theta$,), les valeurs de l'accéleration $\overline{G}_\theta$, $\overline{G}_0$, $\overline{G}_{-\theta}$, ce qui nous permet d'obtenir l'expression de G par un polynôme interpolant de Stirling du 2éme degré. Nous avons alors:

$$\overline{A} = \overline{A}_0 + \overline{A}_1\ t + \overline{A}'_2\ t^2 + \overline{A}'_3\ t^3 + \overline{A}'_4\ t^4$$

$$\text{avec } \overline{A}'_2 = \frac{1}{2}\ \overline{G}_0$$

$$\overline{A}'_3 = \frac{\overline{G}_\theta - \overline{G}_{-\theta}}{12\,\theta}$$

$$\overline{A}'_4 = \frac{\overline{G}_\theta - 2\,\overline{G}_0 + \overline{G}_{-\theta}}{24\theta^2}$$

$\overline{A}'_2$ $\overline{A}'_3$ et $\overline{A}'_4$ sont considérées comme des valeurs définitives, et par moindres carrés nous ne calculons plus que la position du satellite et sa vitesse au point t = 0. Dans nos relations d'observation, nous avons:

$$d\overline{A} = d\overline{A}_0 + d\overline{A}_1\ t$$

Dans le calcul de l'accélération $\overline{G}$, il ne faut pas oublier que nous sommes dans un système cartésien lié à la terre et que nous avons affaire à une accélération relative. Si les vecteurs

$\overline{A}_0$ et $\overline{A}_1$ ont pour coordonnées X, Y, Z et V_X, V_Y, V_Z, nous avons:

$$G_X = X(\Gamma + \omega^2) + 2\,\dot{\omega} V_Y$$

$$G_Y = Y(\Gamma + \omega^2) - 2\,\omega V_X$$

$$G_Z = Z\ \Gamma'$$

$$\text{avec } \Gamma = \frac{-GM}{r^3}\left(1 + \frac{3\,J_2\,R^2}{2}\,\frac{1}{r^2} - \frac{15\,J_2\,R^2}{2}\,\frac{Z^2}{r^4}\right)$$

$$\Gamma' = \Gamma - \frac{GM}{r^3}\left(3\,J_2\,R^2\,\frac{1}{r^2}\right)$$

c) Introduction d'une erreur en temps

On suppose de plus que la valeur du temps reçue par signaux horaires peut être entachée d'une pettite erreur; ceci conduit à ajouter dans l'expression de $d\overline{A}$ un terme de la forme $\overline{V}$ dt, $\overline{V}$ représentant la valeur vitesse et dt l'erreur en temps que l'on veut calculer. En définitive, on a:

$$d\overline{A} = \overline{V}\,dt + d\overline{A}_0 + d\overline{A}_1\,t$$

B) CORRECTIONS AUX OBSERVATIONS

Le chapitre précédent suppose que les observations au comparateur donnent un point de la droite satellite-station; or, la lumière ne suit pas un parcours rectiligne, ne provient pas du centre de gravité du satellite et n'a pas été reçue au même instant. Pour se ramener au problème de l'intersection d'une droite et d'un plan, il faut faire subir aux coordonnées mesurées sur la plaque un certain nombre de corrections. Dans notre méthode, ces corrections sont apportées avant le calcul des relations vues plus haut. Donc, cet exposé inverse l'ordre du travail pratique.

1o.) Corrections dues aux différentes déviations subies par la lumière

a) la distorsion

C'est un phénomène bien connu; disons simplement que les formules choisies sont les suivantes:

$$\xi = \xi_0 \; (A + B \, \rho^2 + C \, \rho^4)$$

$$\eta = \eta_0 \; (A + B \, \rho^2 + C \, \rho^4)$$

ξ_0, η_0, coordonnéss plaques observées

$$\rho^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2$$

A, B et C: constantes calculées à partir de mesures en laboratoire

b) la réfraction

Là encore, nous sommes devant un problème bien résolu; cependant, nous nous y étendrons un peu, car le déplacement de l'image sur la plaque dû à la réfraction exige quelques calculs supplémentaires à partir de l'expression de la correction de distance zénithale apparente, que l'on trouve dans tous les manuels et qui est de la forme:

$$R' = a' \text{tg}\, z - b' \, \text{tg}^3 z$$

a', b': coefficients connus

z: distance zénithale apparente

On montre que pour le calcul des corrections dans la plaque, il suffit de connaître la quantité $P = -\dfrac{R'}{\sin z}$,qui ne nécessite donc que le calcul de cos z, donné par l'expression:

$$\cos z = u \cos L \cos M + v \cos L \sin M + w \sin L$$

L et M : coordonnées géographiques de la station

u, v, w : composantes du vecteur unitaire donnant la direction apparente du flash

Connaissant P, on en tire la valeur des coordonnées d'un vecteur $d\overline{R}$ dont nous verrons plus loin l'utilisation pour le calcul des corrections à apporter aux coordonnées plaques.

$$d\overline{R} \begin{cases} P \cos L \cos M \\ P \cos L \sin M \\ P \sin L \end{cases}$$

2o) *Corrections d'excentrement*

Pur un satellite ballon du type Echo I, on peut admettre que l'on se trouve en présence d'un miroir sphérique; la lumière réfléchie à partir de celle du soleil provient d'un point de la surface; il en résulte une correction d'excentrement que nous appellerons correction de phase. Le vecteur $d\,\overline{\Phi}$ qui joint ce point réflechissant de la surface au centre du ballon a des composantes facilement calculables à partir de la direction du soleil, de la direction du satellite et naturellement du rayon de notre ballon.

Il arrive parfois qu'on veuille ramener les observations faites à une certaine station à ce qu'elles auraient été si la chambre balistique avait été placée sur un autre pilier proche de celui utilisé. Il faut faire le calcul d'une véritable correction d'excentrement à partir de la connaissance du vectur $d\overline{S}$ symbolisant le déplacement de la station.

On montre facilement que les corrections à apporter aux coordonnées mesurées sur la plaque son données par les expressions:

$$d\xi = \frac{d}{\overline{f}.\,\overline{n}'}\left(d\overline{R} + \frac{d\overline{\Phi} - d\overline{S}}{\triangle}\right).\,\overline{M}'$$

$$d\eta = -\frac{d}{\overline{f}.\,\overline{n}'}\left(d\overline{R} + \frac{d\overline{\Phi} - d\overline{S}}{\triangle}\right).\,\overline{L}'$$

$\triangle$: distance station-satellite

d : module du vecteur $\overline{f}$

$\overline{n}' = \overline{\ell} \wedge \overline{m}$ $\quad$ $\overline{M}' = \overline{f} \wedge \overline{m}$ $\quad$ $\overline{L}' = \overline{f} \wedge \overline{\ell}$

vecteur qui joint l'image du flash sur la plaque au point nodal image, donc, vecteur très facilement calculable à partir des coordonnées plaques ξ et η

3o) *Correction de temps*

Pour un satellite ballon, le temps de propagation de la lumière réfléchie depuis le satellite jusqu'à la station dépend de la distance de cette dernière; on se ramène au temps de l'émission de la lumière, on ajoute au temps mesuré la correction

$$dt = -\triangle/c$$

$\triangle$:distance station-satellite
c : vitesse de la lumière

Il y a d'autres corrections de temps, mais liées au type d'appareil; il est inutile de les développer dans cet article.

C) LE PROBLEME PRATIQUE

Il ressort des deux chapitres précédents que les problèmes théoriques posés par l'exploitation des plaques photographiques sont parfaitment solubles en ce qui concerne le calcul des corrections et des relations d'observation. Mais il va falloir traiter toutes ces relations et nous nous trouvons en présence d'un volume considérable. Avant d'en venir à ce dernier point, nous allons examiner la solution pratique qui a été adoptée pour les calculs préliminaires.

1) *Traitement des observations par plaque*

Etant donné que nous voulons simplifier la tâche metérielle, nous allons commencer à étudier tout ce que nous pouvons tirer des observations d'une seule plaque.

a) les étoiles

On phtographie sur une même plaque le passage du stallite et les étoiles qui se trouvent dans la région du ciel comprise dans le champ de la chambre balistique. Ces images des étoiles forment la référence à laquelle on se rapporte. Chaque mesure de coordonnées au comparateur donne deux relations d'observation, dans lesquelles, comme nous l'avons dit plus haut, nous avons uniquement les inconnues concernant la mise en place du système instrumental, c'est-à-dire $d\ell_1$, $d\ell_2$, $d\ell_3$, dm_1, dm_2, dm_3, dh et dk.

Un premier calcul à partir des étoiles seulement nous permet donc d'avoir déjà une définition précise du système instrumental.

b) les flashs

Nous connaissons les vecteurs $\overline{\ell}$, $\overline{m}$, $\overline{n}$, calculés grâce aux étoiles, et les coordonnées plaque observées ξ_o, η_o. La correction de distorsion se fait sans difficulté, mais pour les autres corrections, nous devons connaître aussi les coordonnées géographiques de la station, la direction et la distance du satellite. Les coordonnées geographiques de la station sont toujours connues avec une assez bonne précision, ne serait-ce que par un point astronomique. La direction du satellite est fournie par le vecteur $\overline{f}$ dont les composantes sont données par les formules suivantes:

$$f_1 = -\xi \ell_1 - \eta m_1 + p n_1$$

$$f_2 = -\xi \ell_2 - \eta m_2 + p n_2 \qquad \bar{f} = -\xi \bar{\ell} - \eta \bar{m} + p \bar{n}$$

$$f_3 = -\xi \ell_3 - \eta m_3 + p n_3$$

ξ , η : coordonnées plaque

p : distance focale de la chambre balistique

La distance station-satellite est calculée à partir d'une valeur approchée de l'altitude du satellite, obtenue par un calcul simple d'orbite. Cette altitude peut être relativement mauvaise (quelques kilomètres), sans que l'erreur sur les corrections atteigne une valeur significative. Seul le temps de propagation risque d'être faux de quelques décimillisecondes; il sera tenu compte de ce décalage ultérieurement.

En conclusion, un programme traite les problèmes de chaque plaque:

1o.) on introduit comme données:

- –des coordonnées plaques théoriques des étoiles calculées par un programme précédent; ces coordonnées permettent de définir des directions de référence;
- –des coordonnées plaques observées des étoiles et des flashs;
- –un certain nombre de grandeurs: p. distance focale, H, altitude du satellite, L et M, coordonnées géographiques de la station, enfin, les paramètres des formules de distorsion, de réfraction, etc. . .

2o.) on perfore les résultats à raison d'une carte par observation

–la carte étoile contient: les coordonnées plaques observées corrigées de la distorsion et les cosinus directeurs de cette même étoile dans le système cartésien terrestre;

–la carte flash contient: les coordonnées plaques observées (corrigées de la distorsion, de la réfraction, de la phase), le temps d'émission de chaque flash et la distance approchée satellite-station.

3o.) on perfore aussi les valeurs des trois vecteurs $\overline{\ell}$, $\overline{m}$, $\overline{n}$, ainsi que les coordonnées aprochées X_0, Y_0, Z_0, d'un flash.

2) *Traitement des résultats précédents par série*

On appelle série l'ensemble des observations relatives à un même pasagge du satellite; une série comprend donc autant de plaques qu'il y a de chambres balistiques qui ont pu photographier le satellite et les étoiles à l'instant du passage. Dans ce traitement, on pose que les coordonnés des stations et les valeurs des vecteurs $\overline{\ell}$, $\overline{m}$, $\overline{n}$, sont invariables et on cherche à déterminer les paramètres de la trajectoire et les petites inconnues de temps (défaut de synchronisme entre les stations).

Le programme est donc très simple: on entre comme données les résultats du programme précédent regroupés par série, on perfore les coefficientes des polynômes du 3ème degré, expression analytique de la trajectoire.

3) Traitement d'ensemble

Tous les résultats obtenus jusqu'a présent sont considérés comme approchés, c'est-à-dire que tous vont être remis en cause. A priori, on pourrait se demander: pourquoi les programmes précédents? Effectivement, il eût été possible d'écrire directement un seul programme réglant tout le problème. Nous avons préféré procéder par étapes, car dans toute observation se glisse un certain pourcentage d'erreurs et de fautes, qui compliquent encore la solution pratique. Les deux traitements précédents éliminent toutes les fautes et toutes les observations ayant un résidu trop fort. Nous posons donc maintenant que toutes les données sont bonnes, ce qui permet de ne faire aucun test et de simplifier le programme.

La relation d'observation est complète; elle contient:

9 inconnues de plaque ($d\overline{\ell}, d\overline{m}$, dh, dk et dt)

6 inconnues de trajectoire ($d\overline{A}_0$ et $d\overline{A}_1$)

3 inconnues de station ($d\overline{S}$)

Mais les inconnues du problème sont beaucoup plus nombreuses, puisque chaque plaque donne naissance à 9 inconnues, chaque série à 6 inconnues et chaque station à 3 inconnues. Par exemple, pour la campagne d'observations, qui en France parte le nom de RCP 133, nous avons eu:

1,619 inconnues de plaque
232 inconnues de trajectoire
18 inconnues de station

et 63,159 relations d'observation.

Le problème est finalement soluble sur un ordinateur IBM (32 K) car les inconnues peuvent être éliminnées les unes après les autres, et ainsi on ne garde en machine que très peu de nombres. Le paquet de cartes, représentant les 31,530 observations, est classé par plaques, elles-mêmes regroupées par séries. Pour chaque carte, on calcule les deux relations d'observation et on les normalise individuellement; les résultats sont cumulés dans une matrice "plaque". Dès qu'une plaque est terminée, on élimine les 9 inconnues correspondantes et on cumule les résultats dans une matrice "série" qui ne comprend que les inconnues de trajectoire et de station. Dès qu'une série est terminée, on élimine les 6 inconnues correspondantes et on cumule les résultats dans une matrice "station" qui ne comprend que les inconnues de station. On ne conserve donc en machine que 3 matrices relativement petites. Dans le programme écrit à l'Institut Géographique National, nous avons les dimensions suivantes:

matrice-plaque	19 X 19
matrice-série	34 X 34
matrice-station	28 X 28

A la fin du passage de toutes les cartes, on perfore la matricestation finale à partir de laquelle on peut calculer les inconnues en introduisant les conditions que l'on désire.

CONCLUSION

Le problème du calcul d'une campagne de photographies de satellite a été résolu en prenant comme unité de base l'observation au comparateur, qui est bien la donnée brute. Il n'y a aucune simplification, nous sommes conformes à la théorie des moindres carrés et les difficultés pratiques se résolvent sans grande peine, essentiellement en raison du rangement des observations dans un certain ordre. Naturellement, on passe trois fois en machine les cartes portant les données, mais il est difficile de faire autrement lorsqu'on ne possède qu'un ordinateur moyen. Il n'est pas sûr que même avec un ordinateur très puissant on puisse résoudre le problème d'un seul bloc, à cause des répercussions assez imprévisibles de certaines fautes. Avec un peu d'organisation, on vient à bout de tout le traitement pour un prix relativement modique, puisqu'on peut estimer que pour la RCP 133 il a fallu en tout environ 120 heures de IBM 1130, pour l'ensemble des trois phases décrites ci-dessus.

Naturellement, pour l'instant, nous n'avons de résultats que pour les inconnues de station; les autres inconnues éliminées en cours de route devront être calculées en introduisant les coordonnées définitives des stations et en reprenant les calculs par série. Cette phase n'a pas encore été réalisée; elle permetra d'obtenir toutes les inconnues et aussi tous les résidus.

Cependant, en même temps que nous avons cumulé les résultats partiels dans la matrice-station, nous avons pris soin de cumuler aussi la somme des carrés des termes constants, qui nous permet en fin d'équation de calculer l'écart type d'une observation isolée et l'écart type sur les inconnues de station. Pour la RCP 133, nous avons trouvé:

2,8 microns pour l'écart type d'une observation isolée

5 à 8 mètres pour l'écart type des coordonnées des stations de Dakar et Fort-Lamy.

BIBLIOGRAFIA

DUFOUR, H.M. La Détermination des Formes de la Terre. Colloque du Centre National d'Etudes Spatiales.

DUPUY, M. & H.M. 1969. *La Géodésie, collection "Que sais-je"*. Paris.

HEISKANEN, U.A. & H. MORTIZ. 1967. *Physical Geodesy*, W.H. Freeman and Company, San Francisco and Londres.

LEVALLOIS, J.J. 1969. *Géodésie Générale*, Editions Eyrolles.