

SIMPOSIO PANAMERICANO DEL MANTO SUPERIOR
PAN-AMERICAN SYMPOSIUM ON THE UPPER MANTLE

(MÉXICO, D. F., MARZO 18-21, 1968)
MARCH

GRUPO V-SISMOLOGÍA
GROUP V-SEISMOLOGY

EXPLICACION DEL ERROR SISTEMATICO EN
LA TABLA DE DISTANCIA-TIEMPO DE
JEFFREYS-BULLEN

CINNA LOMNITZ *

RESUMEN

Al graficar el tiempo de recorrido sísmico desde un punto como función de azimut y distancia se tiene una superficie llamada "cronoide". La cronoide para una tierra estandar es una superficie de revolución, llamada la "cronoide estandar". Las anomalías locales se definen como el conjunto de transformaciones de coordenadas requeridas para llevar a una coincidencia de mínimos cuadrados la cronoide local con la cronoide estandar. En general, ésto se obtiene por medio de dos traslaciones ortogonales mutuas, más una rotación en un plano azimutal. Estas operaciones dan lugar a tres componentes distintas de la anomalía local. Una de ellas, la "anomalía de sesgo", introduce un error en el residuo del tiempo de recorrido como lo definió Jeffreys.

Se demuestra que el valor esperado del residuo es mayor que cero. La suposición de que el residuo medio es cero lleva a una sobrestimación sistemática del tiempo de recorrido estandar.

INTRODUCCION

Una función del tiempo de recorrido, como en la tabla de tiempos de Jeffreys-Bullen (1935) es una predicción del tiempo de recorrido, t_{ij} entre una fuente i y una estación j . Depende de la forma de la ecuación de predicción y especialmente del número de variables de predicción. En la teoría de Jeffreys (1935) del tiempo de recorrido, la ecuación de predicción era lineal con una sola variable de predicción, la distancia Δ del epicentro:

$$t_{ij} - T(\Delta_{ij}) = R_{ij} \quad (1)$$

donde a R_{ij} , cuyo valor esperado se suponía igual a cero, se le llamó "residuo del tiempo de recorrido".

La tierra estandar es un modelo de tierra que expresa esta función de tiempo de recorrido. Puede representarse simbólicamente por una superficie de revolución con centro en la fuente i , tal que los tiempos se midan radialmente desde el eje Δ . Más generalmente, para el sistema de coor-

* Universidad Nacional Autónoma de México
Contribución No. 1020, Instituto de Geofísica.

AN EXPLANATION OF THE SYSTEMATIC
ERROR IN THE JEFFREYS-BULLEN
TRAVEL-TIME TABLE

CINNA LOMNITZ *

ABSTRACT

Plotting the seismic travel time from a point as a function of azimuth and distance yields a surface called a "chronoid". The chronoid for the standard earth is a surface of revolution, termed the "standard chronoid". Local anomalies are defined as the set of coordinate transformations required to bring the local chronoid into least-square coincidence with the standard chronoid. In general, this is accomplished by means of two mutually orthogonal translations, plus one rotation in an azimuthal plane. These operations give rise to three distinct components of the local anomaly. One of these, the "skew anomaly", introduces a bias in the travel-time residual as defined by Jeffreys.

It is shown that the expected value of the residual is greater than zero. The assumption that the mean residual is zero leads to a systematic overestimation of the standard travel time.

INTRODUCTION

A travel-time function, such as the Jeffreys-Bullen (1935) travel time table, is a predictor of the seismic travel time t_{ij} between a source i and a station j . It depends on the form of the predictor equation, and notably on the number of predictor variables. In the Jeffreys (1936) theory of travel time the predictor equation was linear and a single predictor variable, the epicentral distance Δ , was used:

where the quantity R_{ij} , whose expected value was assumed equal to zero, was called the "travel-time residual".

The standard earth is an earth model realization of this travel-time function. It may be represented symbolically by a surface of revolution centered at the source i , such that the times are measured radially from the Δ -axis. More generally, for the cylindrical coordinate system (x, r, ϕ)

* National Autonomous University of Mexico
Contribution No. 1020, Institute of Geophysics.

denadas cilíndricas (x, r, ϕ) con centro en la localidad, podemos definir una superficie de tiempo de traslación dada por

$$\begin{aligned} x &= \Delta_{ij} \\ r &= t_{ij} \\ \phi &= A_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

que podemos llamar la *cronoide* de la localidad (Fig. 1). El azimut A_{ij} siempre se mide desde el punto i al punto j . La cronoide especial que corresponde a la tierra estandar se llama "cronoide estandar".

DEFINICION DE ANOMALIAS

La Fig. 1 representa la cronoide observada en la fuente i de profundidad cero. Es conveniente definir las anomalías de tiempo de recorrido en i como *el conjunto de transformaciones de coordenadas requeridas para llevar la cronoide en i a la coincidencia mínima cuadrada con la cronoide estandar*.

which may be called the "chronoid" of the locality (Fig. 1). The azimuth A_{ij} is always measured from point i to point j . The special chronoid which corresponds to the standard earth, is called "standard chronoid".

DEFINITION OF ANOMALIES

Let Fig. 1 represent the observed chronoid at the zero-depth source i . It is convenient to define the travel-time anomalies at i as *the set of coordinate transformations required to bring the chronoid at i into least-square coincidence with the standard chronoid*.

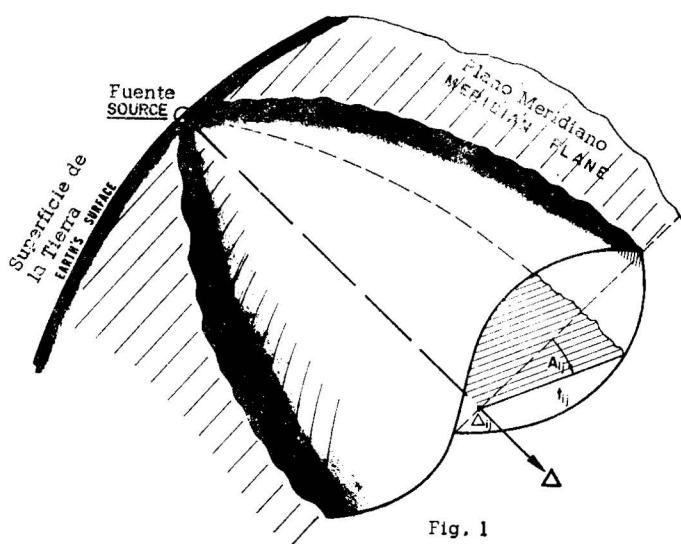


Fig. 1

En otras palabras, supongamos que la tierra real vista desde un punto dado sobre su superficie pueda reducirse a la tierra estandar por un conjunto de traslaciones y rotaciones. Desde luego, ésto no implica que podamos obtener de esta manera una descripción exhaustiva de la tierra real. Lo que se pretende es una representación compacta de aquellas desviaciones de la tierra estandar que puedan asociarse con una localidad específica.

Para distancias cortas, esta definición es insatisfactoria, puesto que ambas cronoide tienen que pasar por el origen. Es conveniente establecer desde el principio que la cronoide estandar no está definida para distancias menores de 20° . Entonces, no surgen ambigüedades puesto que no hay cronoide estandar a escala de distancia local.

In other words, one assumes that the true earth as seen from a given point on its surface can be reduced to the standard earth by a set of translations and rotations. Of course, this does not imply that an exhaustive description of the real earth can be obtained in this fashion. What is intended is a compact representation of those deviations from the standard earth that can be associated with a specific locality.

At short distances this definition is unsatisfactory, since both chronoids are constrained to go through the origin. It is convenient to state from the outset that the standard chronoid is undefined for distances less than 20° . Then no ambiguity arises; no standard chronoid exists in the local distance range.

El tiempo de recorrido entre dos puntos i y j es único y simétrico.

$$t_{ij} = t_{ji} \quad (3)$$

Por lo tanto, la cronoide es única y no debe depender de que el punto sea fuente o estación.

INTERPRETACION GEOFISICA

(a) La Fig. 2 representa el conjunto de coordenadas de transformación en el caso general. El vector de traslación ha sido separado en sus componentes Δ y t . La figura muestra que habrá tres anomalías distintas en una localidad.

(a) Desplacemos la cronoide estandar en dirección Δ por una cantidad Z . Entonces, los tiempos de recorrido se reducirán por una cantidad.

$$a_z = Z \, dT/d\Delta \quad (4)$$

(b) The travel time between two points i and j is unique and symmetric:

$$t_{ij} = t_{ji} \quad (3)$$

Hence the chronoid at a locality is unique and should not depend on its being a source or a station.

GEOPHYSICAL INTERPRETATION

Fig. 2 represent the set of coordinate transformations in the general case. The translation vector has been separated into a Δ -component and a t -component. The figure shows that there will be three separate anomalies at a locality:

(a) Let the standard chronoid be shifted in the Δ -direction by an amount Z . Then all travel times will be reduced by an amount

$$a_z = Z \, dT/d\Delta \quad (4)$$

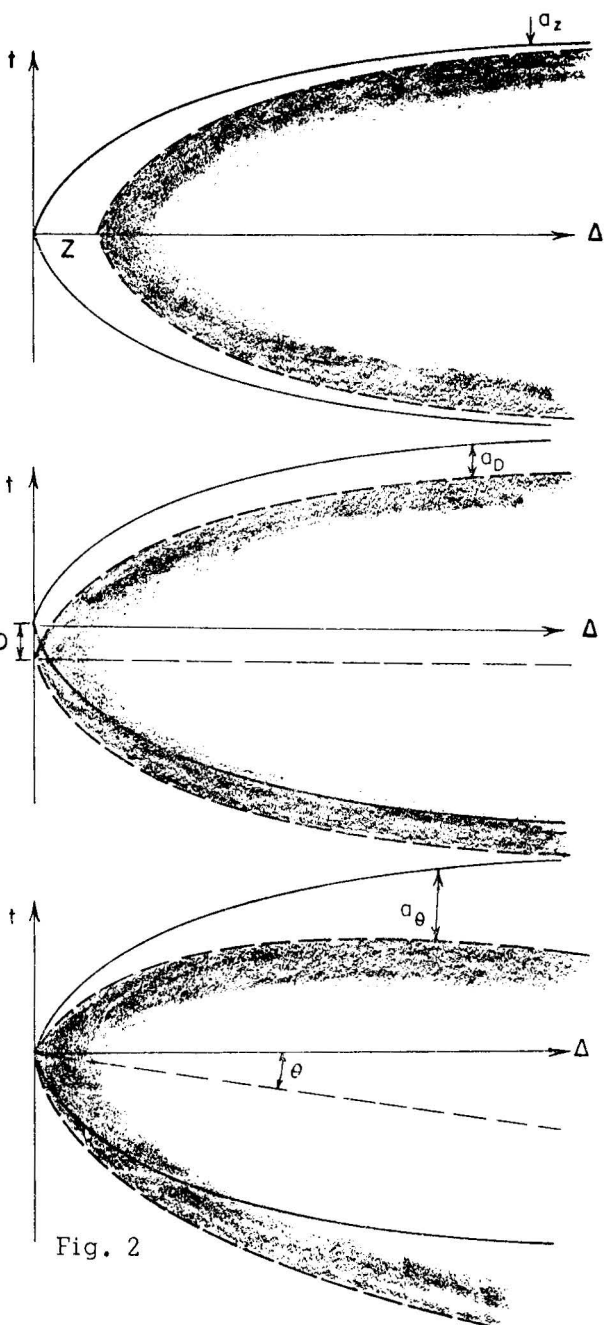


Fig. 2

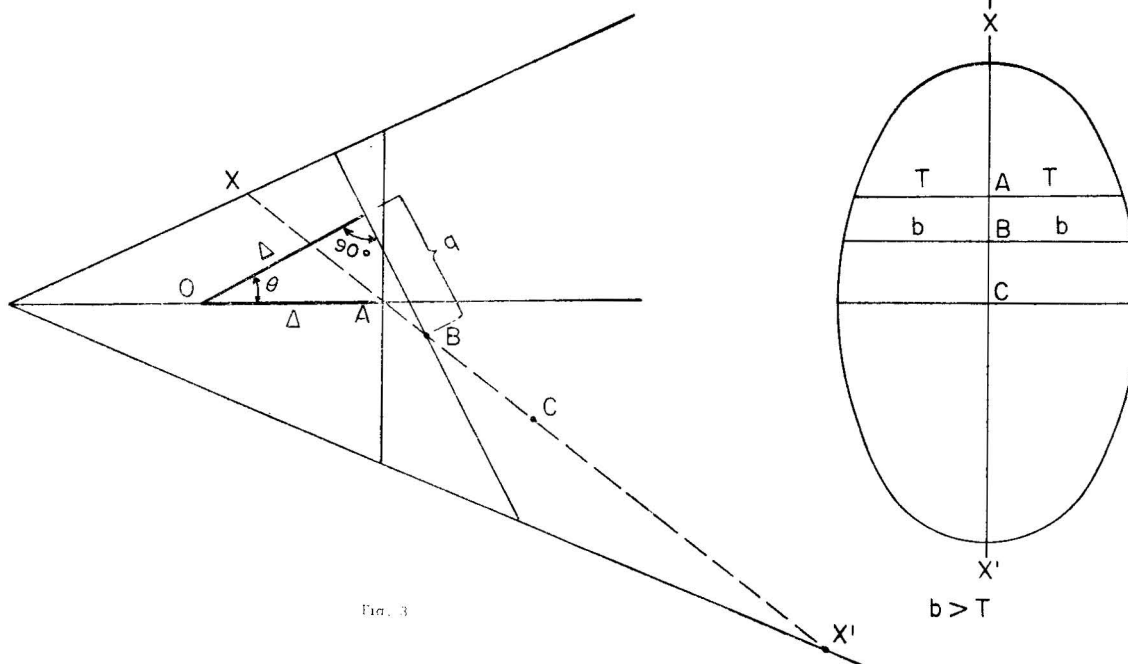


Fig. 3

Más o menos se obtiene el mismo efecto que rebajando una capa de espesor medio $\sim 1/4 Z$ de la tierra estandar. Para ángulos de incidencia casi verticales, el valor de a_z tiende a permanecer constante. Nótese la similitud con las "anomalías de fuente" y "anomalías de estación" propuestas por Herrin y Taggart (1962), Carder (1964), Press y Biehler (1964), Freedman (1967) y otros.

(b) Traslademos la cronoide estandar paralela a sí misma en una dirección azimutal A_D . Sea D la magnitud de la traslación (Fig. 2b). Entonces, se modificarían todos los tiempos de recorrido por una cantidad

$$a_D = D \cos (A_{ij} - A_D) \quad (5)$$

donde D tiene dimensiones de tiempo, y es idéntico a la semi-amplitud de la "anomalía azimutal" propuesta por Bolt y Nuttli (1966), Otsuka (1966a, 1966b) y otros. Su origen puede atribuirse a la presencia de una capa inclinada bajo la fuente o estación.

(c) Finalmente, inclinemos el eje de la cronoide estandar en un ángulo θ (Fig. 2c). Si A_θ es el azimut del plano de rotación todos los tiempos de recorrido cambian en lo siguiente:

$$a_\theta \sim \Delta \tan \theta \cos (A_{ij} - A_\theta) [1 + (dT/d\Delta)^2] \quad (6)$$

donde $\tan \theta$ tiene dimensión de lentitud. El significado geofísico de la componente a_θ puede tomarse como debida a la presencia de un gradiente de velocidad lateral proporcional a $\tan \theta$ bajo la localidad.

NOMENCLATURA

Se propone la siguiente nomenclatura para las componentes de la anomalía sísmica local:

- (a) "anomalía estratigráfica", a_z (ecuación 4), para el efecto de topografía, superficie erosional, capas sedimentarias, etc.
- (b) "anomalía de inclinación", a_D (ecuación 5), para el efecto acumulado de refractores inclinados bajo una cierta localidad.
- (c) "anomalía de sesgo", a_θ (ecuación 6) para el efecto de un gradiente de velocidad lateral bajo una fuente o estación.

La "anomalía de sesgo" es de interés especial por el sesgo que produce en la distribución de residuos de tiempos de recorrido. Demostraremos que las inhomogeneidades laterales bajo una fuente o estación introducen un error sistemático en la ecuación (1) de predicción de tiempos de recorrido. Así, un procedimiento basado en la estimación por mínimos cuadrados del tiempo de recorrido no produce una estima-

Much the same effect is obtained by stripping off a layer of average thickness $\sim 1/4 Z$ from the standard earth. For near-vertical angles of incidence the value of a_z tends to become constant. Note the similarity with the "source anomalies" and "station anomalies" proposed by Herrin and Taggart (1962), Carder (1964), Press and Biehler (1964), Freedman (1967), and others.

(b) Let us translate the standard chronoid parallel to itself in an azimuthal direction A_D . Let D be the magnitude of the translation (Fig. 2b). Then all travel times are modified by the amount

where D has the dimension of a time. It is identical to the half-amplitude of the "azimuth anomaly" proposed by Bolt and Nuttli (1966), Otsuka (1966a, 1966b), and others. Its origin may be attributed to the presence of a dipping layer under the source or station.

(c) Finally, let the axis of the standard chronoid be tilted by an angle θ (Fig. 2c). If A_θ is the azimuth of the plane of rotation all travel times are changed in the approximate amount

where $\tan \theta$ has the dimension of a slowness. The geophysical meaning of the component a_θ may be assimilated to the presence of a lateral velocity gradient proportional to $\tan \theta$ under the locality.

NOMENCLATURE

The following nomenclature for the components of the local seismic anomaly is suggested:

- (a) "stratigraphic anomaly", a_z (equation 4), for the effect of topography, surface weathering, sedimentary layers, and so on;
- (b) "dip anomaly", a_D (equation 5), for the cumulative effect of dipping refractors under the locality;
- (c) "skew anomaly", a_θ (equation 6), for the effect of lateral velocity gradient under the source or station.

The "skew anomaly" is of special interest because of the skew it produces in the distribution of travel-time residuals. We hope to show that lateral inhomogeneities under the source or station introduce a systematic error into the travel-time predictor equation (1). Thus, a procedure based on least-square estimation of travel times fails to yield a maximum-likelihood estimate of the standard chronoid unless

ción máxima probable de la cronoide estandar, a menos de tomar en cuenta en forma adecuada las anomalías de sesgo.

the effect of skew anomalies has been properly taken into account.

DEMOSTRACION

Para cualquier distancia dada, la cronoide se puede reemplazar por un cono tangente a ella. Tenga el eje de las Δ una inclinación θ . Todas sus normales estarán contenidas en la elipse (Fig. 3) cuyo eje menor es igual a $b > T$, el tiempo estandar para la distancia dada.

At any given distance the chronoid may be replaced by a cone tangent to it. Let the Δ -axis be tilted by an angle θ . All normals to it will now be contained in an ellipse (Fig. 3), whose minor axis equals $b > T$, the standard travel time at the given distance.

Consideremos el residuo

Consider the residual

$$R = t - T \quad (7)$$

donde el tiempo de recorrido t está representado por rayos trazados desde un punto excéntrico en el eje mayor de la elipse. Queremos demostrar que

where the travel times t are represented by rays drawn from some excentric point on the major axis of the ellipse. We wish to show that

$$\bar{R} \neq 0 \quad (8)$$

donde la barra denota el valor esperado.

where the bar denotes the expected value.

Basta probar que el valor esperado de la distancia desde cualquier punto de una elipse a cualquier punto de su eje mayor es más grande que el eje menor. Sea

It is sufficient to prove that the expected value of the distance from any point of an ellipse to any point on its major axis is greater than the minor axis. Let

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

la ecuación de la elipse tal que $a > b$. La distancia D desde cualquier punto (x, y) de la elipse a cualquier punto sobre el eje $(q, 0)$, puede escribirse

be the equation of the ellipse, such that $a > b$. The distance D from a point (x, y) on the ellipse to any axial point $(q, 0)$ may be written

$$D^2 = (x - q)^2 + y^2 \quad (10)$$

Sustituyendo por (9) encontramos

Introducing (9) we find:

$$D^2 = (x - q)^2 + b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2 \quad (11)$$

El valor esperado de D^2 es igual a

The expected value of D^2 equals

$$\bar{D}^2 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a D^2 dx = \frac{1}{3} (a^2 - b^2) + b^2 + q^2 \quad (12)$$

Puesto que $\bar{D}^2 > b^2$, se concluye que

Since $\bar{D}^2 > b^2$ it follows that

$$\bar{D} > b > T \quad (13)$$

con lo cual se completa la demostración.

which completes the proof.

DISCUSION

Se acaba de demostrar que el valor esperado del residuo para cualquier distancia arbitraria es mayor que cero:

DISCUSSION

It has been shown that the expected value of the residual at any arbitrary distance is greater than zero:

$$t = T + R_{JB} + \epsilon \quad (\epsilon > 0) \quad (14)$$

donde R_{JB} denota el residuo de Jeffreys-Bullen y ϵ es el sesgo positivo introducido por el ángulo de inclinación θ . Este resultado es bastante general.

Se concluye que la suposición de Jeffreys

$$t - T_{JB} = R_{JB} \quad (15)$$

nos lleva a una sobrestimación de

$$T_{JB} = T + \epsilon \quad (16)$$

El punto esencial es notar que este error es independiente de la precisión en las mediciones. También estará presente en caso de explosiones, donde el tiempo de recorrido se conoce por lo menos al 0.1 de segundo.

Otras fuentes de sesgos positivos ocurren en conexión con lecturas tardías y fallas instrumentales. En el caso de explosiones, se supone que estas fuentes de sesgos son despreciables. Queda por ver si la fuente presente es también despreciable o si quedan aún correcciones substanciales que hacer en las curvas derivadas de datos sísmicos superficiales.

where R_{JB} denotes the Jeffreys-Bullen residual and ϵ is the positive bias introduced by the skew angle θ . This result is quite general.

It follows that Jeffreys' assumption

leads to an overestimation of

The essential point is to note that this error is independent of the accuracy of the measurements. It must also be present in the case of explosions, where the travel time is known to the nearest 0.1 second or better.

Other sources of positive bias occur in connection with late readings and instrumental lags. In the case of explosions these sources of bias are assumed to be negligible. It remains to be seen whether the present source of bias is also negligible, or whether substantial corrections still remain to be made in the travel-time curves derived from surface data.

BIBLIOGRAFIA

- BOLT, B. A., & O. W. NUTTLI. 1966. P Wave residuals as a function of azimuth. 1. Observations, *Jour. Geophys. Res.*, 71:5977-5985.
- CARDER, D. S. 1964. Travel times from Central Pacific nuclear explosions and inferred mantle structure, *Bull. Seismol. Soc. America*, 54:2271-2294.
- FREEDMAN, H. 1967. A statistical discussion of P residuals from explosions, Part II, *Bull. Seismol. Soc. America*, 57:545-561.
- HERRIN, E. & J. TAGGART. 1962. Regional variations in P_n velocity and their effect on the location of epicenters, *Bull. Seismol. Soc. America*, 52:1037-1046.
- JEFFREYS, H. & K. E. BULLEN. 1935. Seismological Tables, *Publ. Bur. Central Internat. Seismol. A. Trav. Scient.*, 11.
- JEFFREYS, H. 1936. On travel times in seismology. *Publ. Bur. Central Internat. Seismol. A, Trav., Scient.*, 14:3-86.
- OTSUKA, M. 1966a. Azimuth and slowness anomalies of seismic waves measured on the Central California seismographic array, Part I: Observations, *Bull. Seismol. Soc. America*, 56:223-239.
- 1966b. Idem, Part 2: Interpretation, *Bull. Seismol. Soc. America*, 56:655-675.
- PRESS, F. & S. BIEHLER. 1964. Inferences on crustal velocities and densities from P wave delays and gravity anomalies, *Jour. Geoph. Res.*, 69:2979-2995.

BIBLIOGRAPHY