

GEOFISICA INTERNACIONAL

REVISTA DE LA UNIÓN GEOFÍSICA MEXICANA, AUSPICIADA POR EL INSTITUTO DE GEOFÍSICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIRECTOR: ISMAEL HERRERA

SUBDIRECTOR: MANUEL MALDONADO KOERDELL

Volumen 8

México, D. F., 1o. de Enero de 1968

Número 1

*PALPITACIONES PROPIAS DE UNA CUENCA EN OCHO **

GORDON W. GROVES **

RESUMEN

Se investigan las palpitations barotrópicas de onda larga en una cuenca de profundidad constante, cuyos límites son curvas de un sistema de coordenadas elíptico-hiperbólicas. Las palpitations gravitacionales y planetarias son evaluadas por un procedimiento numérico iterativo. Se estableció que las frecuencias de las palpitations gravitacionales decrecen con la disminución del ancho de la cintura de la cuenca, según la teoría del resonador de Helmholtz y que las corrientes más fuertes se encuentran en la cintura de la cuenca. Para las palpitations planetarias las frecuencias generalmente aumentan según la disminución del ancho de la cintura, pero no en forma tan marcada y las corrientes asociadas con ellas tienen velocidades mínimas en la cintura de la cuenca.

INTRODUCCION

Se sabe que una cuenca que consiste en dos partes anchas conectadas a través de una cintura o estrecho angosto tiene modos de palpitation cuyas frecuencias son considerablemente más bajas que las de una cuenca sin tal cintura. Neumann (1944a, 1944b) demostró que estas palpitations son análogas a las del resonador del Helmholtz y sugirió un método de impedancia para su análisis. En el resonador de Helmholtz un orificio pequeño separa dos volúmenes grandes de aire, como en un instrumento, de viento en madera. El

* Contribución Núm. 1008, Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México.

** *Instituto de Geofísica de Hawaii, Universidad de Hawaii.*

*SEICHES IN A BUTTERFLY-SHAPED BASIN **

GORDON W. GROVES **

ABSTRACT

Long barotropic seiches are investigated in a basin of constant depth bounded by curves of an elliptical-hyperbolic coordinate system. Both planetary and gravitational seiches are evaluated numerically by an iteration procedure. It is found that the frequencies of the gravitational seiches decrease with decreasing width of the narrow waist of the basin, in accordance with the theory of the Helmholtz resonator, and the strongest currents are found in the waist of the basin. For planetary seiches, the frequencies generally increase with decreasing width of the waist, tho not dramatically, and the associated currents are weakest in the narrow waist.

INTRODUCTION

It is known that in the case of gravity seiches a basin with a narrow waist or constriction has modes of oscillation of much lower frequency than would occur in there were no constriction. Neumann (1944a, 1944b) showed that these oscillations are analogous to those of the Helmholtz resonator, and suggested an impedance method of analysing them. In the Helmholtz resonator a small orifice separates larger bodies of air, as in woodwind instrument. The only inertial effects occur in the immediate vicinity of the orifice

* Contribution No. 1008, Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México.

** *Hawaii Institute of Geophysics, University of Hawaii.*

único efecto de inercia ocurre cerca del orificio, pues las velocidades y aceleraciones en el resto de la región son despreciables. Este hecho permite un método de aproximación para calcular las frecuencias de tales resonadores.

El interés en cuencas conectadas a través de estrechos angostos surge de la geometría conocida de los océanos. Neumann (comunicación personal) estima que el modo gravitacional más bajos de frecuencia en el océano posee un período cercano a cinco días, pero si no hubiera continentes el período sería solo de 15 o 23 horas (dependiendo de si se toma en cuenta o no la rotación de la tierra, Hough, 1897; véase también Lamb, 1945, sec. 222). La diferencia se debe a que los océanos reales están debilmente conectados a través de estrechos, como el Estrecho de Drake, etc.

No se había investigado el efecto de estrechos sobre palpitations no gravitacionales (como las palpitations planetarias). Este modelo numérico-hidrodinámico puede facilitar el entendimiento de las palpitations planetarias en cuencas con estrechos y proveer una solución precisa al caso de una palpitation gravitacional en una cuenca de tal forma.

as the velocities and accelerations elsewhere are negligible. This leads to an approximate method of calculating the frequencies of such resonators.

The interest in basins connected thru narrow straits arises from the actual geometry of the oceans. Neumann (personal communication) estimates that the gravest gravity mode of the oceans has a period near five days, whereas if there were no continents this period would be only 15 or 23 hours, approximately (depending on whether the earth's rotation is or is not taken into account; Hough, 1897; See also, Lamb, 1945, sec. 222). The difference is due to the fact that the real oceans are poorly connected together thru straits, such as the Drake Passage, etc.

The effect of constrictions on seiches other than gravity modes (for example, planetary seiches), has not been investigated. The present numerical-hydrodynamical model may help to understand planetary seiches in constricted basins, as well as to provide an accurate solution to a case of a gravity seiche in a constricted basin.

LAS ECUACIONES

Para las palpitations gravitacionales y planetarias se puede utilizar la ecuación

$$\nabla^2 \psi + \gamma^2 \psi = 0 \quad (1)$$

en el interior de una región bidimensional (x, y). Se supone que la profundidad es constante y que la longitud de onda es mucho mayor que la profundidad. Las componentes horizontales de velocidad del agua, en este caso son independientes de la coordenada vertical. En el caso de palpitations gravitacionales la superficie (x, y) es plana y la tierra, en que está situada la cuenca, no gira. En el caso de palpitations planetarias se ha hecho la aproximación beta, donde la superficie (x, y) tiene forma de un cilindro parabólico que se toca en un meridiano con la superficie terrestre. La superficie del agua se constriñe por una 'tapa' que impide que oscile (véase Longuet-Higgins, 1964). (Posteriormente se puede aproximar la elevación de la superficie del agua partiendo de la distribución calculada de la presión). Se trata como constante el parámetro de Coriolis f , pero se toma en cuenta su derivada respecto a latitud.

En el caso de palpitations gravitacionales, $\psi e^{-i\sigma t}$ en (1) representa la elevación de la superficie del agua y

$$\gamma^2 = \sigma^2/gh \quad (2)$$

donde σ es igual a 2π entre el período de oscilación y g es la aceleración de la gravedad terrestre, y h es la profundidad constante del agua. Como condición de frontera se exige que la derivada de ψ perpendicular a la frontera sea cero.

En el caso de palpitations planetarias, $\psi e^{-i\gamma x - i\sigma t}$ es la función de corriente, donde x' es distancia hacia el este.

THE EQUATIONS

For both gravity and planetary seiches we have the equation

to be applied in the interior of a two-dimensional (x, y) region. It is assumed that the depth is constant, and that the wave length is long compared to the water depth. The horizontal components of the water motion are then independent of the vertical coordinate. In the gravity-seiche case the x, y surface is flat and the basin is on a non-rotating earth. In the planetary case the beta approximation has been made. Accordingly, the x, y surface is that of a parabolic cylinder osculating with the earth's surface along a meridian. There is no oscillation of the sea surface, which has been replaced by a "lid", (see Longuet-Higgins, 1964). (The actual surface level is later approximated from the distribution of pressure). The Coriolis parameter f is treated as a constant, but its derivative with respect to distance along a meridian, β , is retained in the calculations.

In the gravity seich problem $\psi e^{-i\sigma t}$ in (1) is the sea surface elevation and

where σ is 2π over the period of the oscillation, g is the acceleration of gravity and h is the constant water depth. The boundary conditions are that the derivative of ψ normal to the boundary must vanish.

In the planetary seiche problem $\psi e^{-i\gamma x - i\sigma t}$ is the stream function, where x' is distance toward the east. (The x, y

(Se pueden orientar arbitrariamente los ejes x, y). El parámetro γ se define por

axes can be oriented arbitrarily). The parameter γ is defined by

$$\gamma = \beta/2\sigma \tag{3}$$

Como condición de frontera se exige que ψ sea cero.

The boundary conditions are simply that ψ must be zero on the boundary.

En ambos casos de palpitaciones gravitacionales y planetarias, la parte imaginaria de ψ no tiene nada de interés.

In both the gravitational and the planetary case, the imaginary part of ψ contributes nothing of interest.

EL MODELO

THE MODEL

Es conveniente utilizar un sistema de coordenadas ortogonales que haga posible construir una cuenca que tenga forma de ocho y cuyas fronteras coincidan con las curvas coordenadas. Un sistema de coordenadas elíptico-hiperbólicas sirve para formar tal cuenca. Considérese el sistema definido por las relaciones

The problem is to find an orthogonal coordinate system which can represent the boundaries of a butterfly-shaped basin by its coordinate curves. We take an elliptical-hyperbolic coordinate system (α, β) defined by

$$x = c \alpha \sqrt{1 + \beta^2} \quad -1 < \alpha < 1 \tag{4}$$

$$y = c \beta \sqrt{1 - \alpha^2} \quad -\infty < \beta < \infty$$

donde x, y son las coordenadas cartesianas. Las curvas $\alpha =$ constante son las hipérbolas.

where x, y are cartesian coordinates. The curves $\alpha =$ constant are the hyperbolas

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{1 - \alpha^2} = c^2 \tag{5}$$

Se nota que el punto de intersección del eje- x con cualquier de estas hipérbolas se encuentra en $x = c\alpha$. Las curvas $\beta =$ constante son elipses

It is noted that the intercept on the x -axis of any of these hyperbolas is at $x = c\alpha$. The curves $\beta =$ constant are the ellipses

$$\frac{x^2}{1 + \beta^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = c^2 \tag{6}$$

Las curvas que corresponden a valores grandes de $|\beta|$ aproximan círculos cuyo radio es $c|\beta|$. Se nota que el punto de intersección del eje y con cualquiera de estas elipses se encuentra en $y = c\beta$.

The curves corresponding to very large values of $|\beta|$ approximate circles of radius $c|\beta|$. It is noted that the intercept on the y -axis of any of these ellipses is at $y = c\beta$. The mapping of the (x, y) plane onto (α, β) is one-to-one. It should be noted that points on the two infinite segments of the x -axis, $x \leq -c$ and $x \geq c$ are absent from the (α, β) plane.

La transformación del plano (x, y) al de (α, β) es biunívoca. Hay que notar que los puntos que se encuentran sobre los dos segmentos infinitos del eje x , $x \leq -c$ y $x \geq c$ no tienen correspondencia en el plano (α, β) .

The laplacian operator in the (α, β) coordinates is

El operador laplaciano en las coordenadas (α, β) es

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2(1 - \alpha^2 + \beta^2)} \left[(1 - \alpha^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + (1 + \beta^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right] \tag{7}$$

La ventaja de usar tal sistema de coordenadas es que se pueden separar las variables en el problema considerado. Esto reduce el orden de las matrices que se han de tratar, de nm a $(n + m)$, donde n y m son números de puntos de la malla a lo largo de los ejes de los α y β , respectivamente,

The advantage of using such a coordinate system is that the variables in the problem under consideration can be separated. This reduces the order of the matrices to be dealt with from nm to $(n + m)$, where n and m are the number of grid points along the α and β axes, respectively, used in the

usada en los cálculos numéricos. Se pone $\psi(\alpha, \beta) = X(\alpha)Y(\beta)$ en (1) y se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(1 - \alpha^2) X'' - \alpha X' - (\gamma^2 c^2 \alpha^2 + \lambda) X = 0$$

$$(1 + \beta^2) Y'' + \beta Y' + [\gamma^2 c^2 (1 + \beta^2) + \lambda] Y = 0$$

Estas ecuaciones tienen la forma de la Ecuación Diferencial de Mathieu, y pueden expresarse en la manera usual por medio de las substitutiones $\alpha = \cos \mu$, $\beta = \cosh v$, que en efecto son las variables ordinariamente usadas en el sistema elíptico-hiperbólico.

Se definirá la cuenca por tratar por medio de

$$-1 \leq a < \alpha < a' \leq 1$$

$$-\infty < b < \beta < b' < \infty$$

EL METODO NUMERICO

Sean n puntos a lo largo del eje de los α y m a lo largo del eje de los β . Asimismo, tenemos

$$\Delta \alpha = \frac{a' - a}{n - 1},$$

$$\Delta \beta = \frac{b' - b}{m - 1}$$

Para los puntos en el interior de la cuenca, tenemos las ecuaciones

$$X_{j-1} \left[\frac{1 - \alpha^2}{\Delta \alpha^2} + \frac{\alpha}{2\Delta \alpha} \right] + X_j \left[-\gamma^2 c^2 \alpha^2 - \lambda - \frac{2}{\Delta \alpha^2} (1 - \alpha^2) \right] + X_{j+1} \left[\frac{1 - \alpha^2}{\Delta \alpha^2} - \frac{\alpha}{2\Delta \alpha} \right] = 0$$

(11)

$$Y_{k-1} \left[\frac{1 + \beta^2}{\Delta \beta^2} - \frac{\beta}{2\Delta \beta} \right] + Y_k \left[\gamma^2 c^2 (1 + \beta^2) + \lambda - \frac{2}{\Delta \beta^2} (1 + \beta^2) \right] + Y_{k+1} \left[\frac{1 + \beta^2}{\Delta \beta^2} + \frac{\beta}{2\Delta \beta} \right] = 0$$

donde

$$2 \leq j \leq (n - 1),$$

where

$$2 \leq k \leq (m - 1)$$

Se toman los valores de las variables independientes (α , β) en (11) sobre los puntos (j , k), aunque otros procedimientos hubieran servido también. Para los puntos de frontera tomamos $X_1 = X_n = 0$, $Y_1 = Y_m = 0$ para el caso de las palpitations planetarias. Para las gravitacionales usamos derivadas unilaterales y obtenemos

$$3X_1 - 4X_2 + X_3 = 0$$

$$X_{n-2} - 4X_{n-1} + 3X_n = 0$$

y otra relación semejante para Y .

numerical calculations. We put $\psi(\alpha, \beta) = X(\alpha)Y(\beta)$ in (1) and get the two ordinary differential equations

(8)

These equations are a form of Mathieu's Differential Equation, and can be brought into the standard form by the substitutions $\alpha = \cos \mu$, $\beta = \cosh v$ which, in fact, are the usual variables used in the elliptic-hyperbolic coordinates.

The basin of interest to us is defined by the region

(9)

THE NUMERICAL SCHEME

Let there be n points along the α -axis, and m along the β -axis. Thus we have

(10)

For interior points we have the equations

The values of the independent variables (α , β) in (11) are taken at the points (j , k), although other procedures could have been used as well. For the boundary we take $X_1 = X_m = 0$, $Y_1 = Y_m = 0$ for the planetary-seiche case. For the gravity-seiche case we take one-sided derivatives and obtain

and similarly for Y .

EL PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

THE EIGENVALUE PROBLEM

Las ecuaciones (11) unidas a condiciones de frontera apropiadas dan dos ecuaciones matriciales homogéneas, que pueden representarse

Equations (11) with their appropriate boundary conditions lead to two homogeneous matrix equations which can be represented by

$$AX = 0,$$

$$BY = 0 \tag{12}$$

Aquí, las matrices A y B dependen de los parámetros γ y λ . El problema consiste en encontrar pares de valores de γ y λ , además de los vectores X y Y que satisfagan simultáneamente ambas ecuaciones de (12). Partiendo de una solución aproximada, $\gamma_0, \lambda_0, X_0, Y_0$, el procedimiento iterativo, descrito a continuación sirve para refinar la solución.

Here, the matrices A and B both depend on the parameters γ and λ . The problem is to find pairs of values of γ and λ , along with vectors X and Y, which simultaneously satisfy both equations of (12). If one begins with an approximate solution $\gamma_0, \lambda_0, X_0, Y_0$, then the following iteration procedure can be used to refine the solution.

Se representan las matrices A y B a través de una serie de Taylor alrededor del punto γ_0, λ_0 , reteniendo solamente los términos de primer orden. Se expresan los vectores X y Y en la forma $X_0 + \Delta X$ y $Y_0 + \Delta Y$. Después, se consideran pequeños los valores $\Delta\gamma, \Delta\lambda, \Delta X, \Delta Y$, despreciando sus productos y cuadrados. Estas aproximaciones dan las ecuaciones

The matrices A and B are represented as a Taylor's series about the point γ_0, λ_0 , retaining only terms up to the first order. The vectors X and Y are expressed in the form $X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y$. Finally, $\Delta\gamma, \Delta\lambda, \Delta X, \Delta Y$ are all taken to be small quantities, and their products are neglected. These approximations lead to the equations.

$$\frac{\partial A_0}{\partial \gamma} X_0 \Delta\gamma + \frac{\partial A_0}{\partial \lambda} X_0 \Delta\lambda + A_0 \Delta X = -A_0 X_0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial B_0}{\partial \gamma} Y_0 \Delta\gamma + \frac{\partial B_0}{\partial \lambda} Y_0 \Delta\lambda + B_0 \Delta Y = -B_0 Y_0 \tag{14}$$

ciones que comprenden un sistema de ecuaciones lineales algebraicas. A_0 y B_0 representan los valores de las matrices evaluadas con $\gamma = \gamma_0, \lambda = \lambda_0$. Si A y B son matrices (n x n) y (m x m), respectivamente, entonces (13) y (14) juntas consisten en (n + m) ecuaciones con (n + m + 2) incógnitas, que son $\Delta\gamma, \Delta\lambda$ y los elementos de ΔX y ΔY . No se puede separar fácilmente el sistema (13) del (14) porque las incógnitas $\Delta\gamma$ y $\Delta\lambda$ aparecen en ambos. Ya que X y Y tienen sendos factores constantes arbitrarios, que no se determinan por medio de (12), se puede poner uno de los elementos de ΔX y uno de ΔY , iguales a cero sin pérdida de generalidad (con tal que los elementos correspondientes de X_0 y Y_0 no sean iguales a cero). Esto disminuye el número de incógnitas por dos, haciéndolo igual al número de ecuaciones y el sistema resulta soluble. Este procedimiento generaliza el método de Derwidue (1955; véase también Faddeev y Faddeeva, 1963).

which are a linear algebraic system. A_0 and B_0 denote values of the matrices evaluated at $\gamma = \gamma_0, \lambda = \lambda_0$. If A and B are (n x n) and (m x m) matrices, respectively, then (13) and (14) together consist of (n + m) equations in (n + m + 2) unknowns. The unknowns are $\Delta\gamma, \Delta\lambda$ and the elements of ΔX and ΔY . The system (13) is not readily separated from (14) because the unknowns $\Delta\gamma$ and $\Delta\lambda$ occur in both systems. Now, since X and Y are determined by (12) only to an arbitrary constant factor, no generality is lost by taking one of the elements of ΔX , and one of ΔY equal to zero (provided that corresponding elements of X_0 and Y_0 are not zero). This makes the number of unknowns equal to the number of equations, and the system can be solved. This procedure is a generalization of the method of Derwidue (1955; see also Faddeev and Faddeeva, 1963).

EL PROCEDIMIENTO

THE PROCEDURE

En el caso de una cuenca definida por los parámetros dados a, a', b, b', puede ser difícil encontrar una solución lo bastante aproximada, en el problema de valores propios, para que converjan las ecuaciones iterativas (13) y (14). Por otro lado, pudieran encontrar algunas, pero sin la seguridad de que sean las únicas de interés. El teorema planteado a continuación es útil para (a) encontrar una solución propia al problema y (b) asegurar que se encuentren

For a basin bounded by given parameters a, a', b, b' it may be difficult to find a close enough approximation to any of the eigensolutions for the iteration equation (13) and (14) to converge. Or, some may be found, but without any assurance that they are the only ones of interest. The following theorem is helpful in (a) finding eigensolutions of the problem, and (b) finding all the eigensolutions of interest: An infinitesimal change in the eigenvalue and

todas las soluciones de interés: Un cambio infinitesimal en la configuración de la cuenca dará lugar a un cambio infinitesimal en el valor y solución propios de un modo dado. Como corolario, se puede decir (por medio de integración) que aún un cambio finito en la configuración de la cuenca no introducirá ni perderá ninguna solución propia (con tal que no se altere la naturaleza topológica de la cuenca, como ocurriría, por ejemplo, si se introdujera una isla). Asimismo, se pueden considerar los 'modos Helmholtz' de una cuenca en forma de ocho como versiones perturbadas de los modos ordinarios de, digamos, una cuenca rectangular.

Aquí no se ha demostrado la validez de este teorema y es posible que no la haya. Parece razonable que cualquier modo de interés en cualquier cuenca dada permanecerá reconocible mientras se efectúa una deformación finita de la cuenca, con tal que dicho modo no degenera a una etapa intermedia de la deformación. Es decir, con tal que la frecuencia del modo dado permanezca distinta de todos los demás modos durante todo el procedimiento de la deformación. Dadas dos cuencas topológicamente equivalentes, no es obvio que exista un camino continuo de deformaciones pequeñas que llegue a la segunda cuenca sin que tropiece el modo dado de palpitación con una degeneración en algún punto del camino. Es posible que se conozca un teorema análogo o ejemplo que demuestre su invalidez, en alguna disciplina de la matemática. Lo único que se puede decir ahora es que no se encontraron ningunas dificultades numéricas durante el procedimiento de deformar la cuenca. Si se hubiera encontrado una situación degenerada, es probable que algunas dificultades numéricas hubieran resultado. Asimismo, parece razonable nombrar a los modos calculados para la cuenca que tiene forma de ocho, igual que a los modos existentes en una cuenca rectangular.

Se nota que para valores pequeños de $|a|$, $|a'|$, $|b|$, $|b'|$, las ecuaciones (8) tienen la forma

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (15)$$

$$Y'' + (\lambda + \gamma^2 c^2) Y = 0$$

que son las conocidas para una cuenca rectangular. Sus soluciones propias son

$$\lambda = -\frac{r^2 \pi^2}{(a' - a)^2} \quad \lambda + r^2 c^2 = \frac{s^2 \pi^2}{(b' - b)^2} \quad (16)$$

$$r, s = 0, 1, 2, \dots \quad \text{for gravity modes}$$

$$= 1, 2, \dots \quad \text{for planetary modes,}$$

y

$$X(\alpha) = \cos \left[\frac{r\pi(\alpha - a)}{a' - a} \right], \quad Y(\beta) = \cos \left[\frac{s\pi(\beta - b)}{b' - b} \right], \quad (17)$$

para palpitaciones gravitacionales y con senos en vez de cosenos para las planetarias. Asimismo, se comienza con

eigenvector of a given mode will result from an infinitesimal change in the basin configuration. As a corollary it may be stated (by integration) that even gross changes in the basin configuration will not introduce or lose any of the eigen-solutions (provided that the topological nature of the basin is not altered, as would occur, for example by the insertion of an island). Thus, the 'Helmholtz modes' of a constricted basin can be thought of as perturbed versions of the ordinary modes of, say, a rectangular basin.

The validity of the above theorem has not been shown here, and in fact it may not be true. It certainly seems reasonable that any seiche mode of interest in any given basin will remain recognizable thruout a gross deformation of the basin provided that the mode not become degenerate at an intermediate stage of the deformation. That is, provided that the frequency of the given mode remain distinct from those of all other modes thruout the basin deformation process. Given two topologically-equivalent basins, and a certain seiche mode in the first basin, it is not obvious that there exist a continuous path of deformations leading to the second basin without the given seiche mode passing thru a degeneracy somewhere along the way. An analogous theorem, or example showing it to be false, might be known in some branch of mathematics. All that can be said here is that no numerical troubles were encountered in the process of deforming the basin. If a degenerate situation had been encountered, it is likely that serious numerical troubles would have resulted. Thus, it seems reasonable to label the modes computed in the butterfly-shaped basin after their rectangular-basin counterparts.

It is noted that for small values of $|a|$, $|a'|$, $|b|$, $|b'|$ the equations (8) become:

which are the familiar equations for a rectangular basin. Their eigensolutions are given by

and

for gravity waves, and with sines replacing the cosines for planetary waves. Thus, one starts with a small rectangular

una cuenca pequeña rectangular con una solución propia exacta (16) y (17). Entonces se agranda o se altera en cierta forma la cuenca. Como aproximación inicial a la solución propia en la cuenca alterada, se toma

basin with an exact eigensolution (16), (17). The basin is then enlarged or otherwise altered somewhat. The initial approximation to the eigenvector in the altered basin is taken to be

$$\begin{aligned}
 X_2(\alpha) &= X_1 \left[\frac{(a_1' - a_1)\alpha + a_1 a_2' - a_2 a_1'}{a_2' - a_2} \right] \\
 Y_2(\beta) &= Y_1 \left[\frac{(b_1' - b_1)\beta + b_1 b_2' - b_2 b_1'}{b_2' - b_2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Para los valores propios se toman

The eigenvalues are taken either as

$$\lambda_2 = \left(\frac{a_1' - a_1}{a_2' - a_2} \right)^2 \lambda_1, \quad \lambda_2 + \gamma_2^2 c^2 = \left(\frac{b_1' - b_1}{b_2' - b_2} \right) (\lambda_1 + \gamma_1^2 c^2)
 \tag{19}$$

utilizando las relaciones para un rectángulo o

from the 'rectangle' relationships, or as

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= \gamma_1 \\
 \lambda_2 &= \lambda_1
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

debido a la falta de conocimiento sobre la forma en que las soluciones propias dependen de la forma y tamaño de la cuenca. Aquí el índice 2 se refiere a la solución propia aproximada en la cuenca nueva, 1 se refiere a la solución propia exacta en la cuenca anterior.

for lack of knowledge of the way the eigenvalues depend on basin size and shape. The subscript 2 refers to the approximate eigensolution in the new basin, 1 refers to the exact eigensolution in the previous basin.

En el curso de la alteración sucesiva de las fronteras de la cuenca, se puede probar un cambio algo grande para ver si la aproximación inicial a la solución propia es bastante precisa para que converja el procedimiento iterativo. Si no lo es, entonces hay que hacer un cambio que no sea tan grande. Mientras que la forma de la cuenca sea casi rectangular, las relaciones (18) y (19) proveen un buen comienzo para la solución propia siguiente, pero cuando la forma de la cuenca difiere mucho de la rectangular, hay que usar las relaciones (18) y (20). Se nota que la relación (18) especifica que la solución propia aproximada en la siguiente etapa es lo mismo que la solución precisa anterior, con tal que n y m permanezcan constantes.

In the successive alteration of the basin boundaries, one can try a moderately large change and see if the initial approximation to the eigensolution is good enough that the iteration procedure will converge. If it is not, then a smaller change in the basin boundaries is tried. As long as the basin form is roughly rectangular, the relations (18) and (19) give a good starting point for the subsequent eigensolution. but when the basin form is far from being rectangular the relations (18) and (20) are used. It is noted that the relation (18) specifies that the new approximate eigenvector is the same as the old exact one as long as n and m remain constant.

ALGUNOS RESULTADOS

SOME RESULTS.

Se efectuaron cálculos para algunos casos de palpitations gravitacionales y planetarias en cuencas simétricas (en las cuales $a' = -a$ y $b' = -b$). Se demuestran los resultados en las Figs. 1, 2, 4-6.

Computations were made for a few cases of both gravitational and planetary seiches in symmetrical basins (in which $a' = -a$ and $b' = -b$). The results are shown in figures 1, 2, 4-6.

Para las palpitations gravitacionales, el parámetro γc representa una frecuencia sin dimensión. Se hicieron cálculos solo para el modo (0, 1). Los casos exhibidos en las Figs. 1 y 2 pueden ser comparados con las palpitations en un rectángulo con igual longitud en la dirección y (o β), ya que son independientes del ancho del rectángulo. En ambos casos, la frecuencia en la cuenca en 'ocho' es menor que

For gravitational seiches the parameter γc represents a nondimensional frequency. Only the (0, 1) mode was computed. The cases shown in figures 1 and 2 can be compared to seiches in a rectangle of the same length in the y (or β) direction, since they are independent of the basin width. In both cases shown, the frequency of the butterfly-shaped basin is less than that of the corresponding rectangular basin, in

en la cuenca rectangular correspondiente, según las propiedades conocidas del resonador de Helmholtz.

Para las palpitaciones planetarias el parámetro $(\gamma c)^{-1}$ representa una frecuencia sin dimensión. Aún las palpitaciones planetarias de onda más larga en una cuenca rectangular tienen frecuencias que dependen del ancho del rectángulo y de su longitud. Asimismo, se hace una comparación de la frecuencia en la cuenca en 'ocho' con dos correspondientes cuencas rectangulares: rectángulo A, cuya longitud en la dirección y (o β) iguala la de la cuenca en 'ocho' y cuyo ancho en la dirección x (o α) iguala al máximo de la cuenca en 'ocho' y rectángulo B, de igual longitud que A, pero cuyo ancho iguala al de la sección mínima del estrecho de la cuenca en 'ocho'. Estos rectángulos de comparación están en la Fig. 3. En los casos de las Figs. 4-6, la frecuencia del modo en la cuenca en 'ocho' está entre los valores correspondientes de los rectángulos A y B. Asimismo, se concluye que el efecto del estrecho angosto es aumentar la frecuencia de palpitation libre de un modo planetario, pero no tanto como si se hubiera hecho más angosta la cuenca por toda su longitud.

Aunque no se determinaron velocidades de corriente, la forma de la elevación superficial en el caso de la palpitation gravitacional demuestra que hay propensión a que la corriente sea más fuerte en el estrecho de la cuenca. En el caso de las palpitaciones planetarias ocurre lo contrario, las corrientes son más débiles en el estrecho de la cuenca. Se podría dividir la cuenca por la mitad en el estrecho por la inserción de un muro impermeable sin afectar mucho la palpitation planetaria. Retrospectivamente son evidentes estas conclusiones, considerando sólo las condiciones de frontera en ambos casos. La dependencia de la frecuencia como función de la configuración de la cuenca indica que el efecto de un estrecho angosto sobre las palpitaciones gravitacionales es más fuerte que sobre las planetarias.

El sistema de coordenadas elíptico-hiperbólicas será útil también para el estudio de palpitaciones en pequeñas ensenadas conectadas a un mar grande, si se usan cuencas asimétricas.

AGRADECIMIENTOS:

El autor expresa su agradecimiento a George Backus, José Barberán, George Carrier, Niels Christensen, Jim Larsen y Gerhard Neumann, por sus valiosos comentarios y críticas. Se hicieron los cálculos numéricos en el Centro de Cálculo Electrónico de la Universidad Nacional Autónoma de México. Este trabajo fue subvencionado, parcialmente, por la National Science Foundation, Grant GA-1117.

accordance with the known properties of Helmholtz resonators.

For planetary seiches the parameter $(\gamma c)^{-1}$ represents the non-dimensional frequency. In even the longest planetary modes in a rectangular basin both the width and length affect the frequency of free oscillation. Thus, a comparison of the butterfly-shaped basin is made with two corresponding rectangular basins: rectangle A, which has the same length in the y (or β) direction and the same overall width in the x (or α) direction, and rectangle B, which has the same length in the y direction but whose width in the x direction is equal to that of the butterfly-shaped basin's narrowest part. These comparison basins are illustrated in figure 3. In the cases shown in figures 4-6, the frequency of the butterfly-shaped basin lies between those of the corresponding comparison rectangular basins A and B. Thus, one can conclude that the effect of a constriction is to raise the frequency of free oscillation of a planetary mode, but not as much as if the entire basin were narrowed.

While the current velocities were not determined, it is evident from the surface pattern in the gravitational case that there is a tendency for them to be strongest in the constricted waist of the basin. For planetary waves the opposite occurs—the currents are weakest in the constricted waist of the basin. In fact, the basin could be divided at its narrowest part by insertion of an impermeable wall without greatly affecting the planetary seiche.

These conclusions are, in retrospect, fairly evident from the boundary conditions in the two cases. The dependence of frequency on basin configuration indicates that the effect of a constricted connection on gravity seiches is clearly more dramatic than on planetary seiches.

The elliptical-hyperbolic coordinate system can be used also to study seiches in small embayments connected to a large ocean, by considering assymmetrical basins.

ACKNOWLEDGEMENTS:

The author benefited from the advice and comments of George Backus, José Barberán, George Carrier, Niels Christensen, Jim Larsen, and Gerhard Neumann. The computations were done at the Centro de Cálculo Electrónico, Universidad Nacional Autónoma de México. This work was supported in part by the National Science Foundation thru grant GA-1117.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAPHY

- NEUMANN, G. 1944a. Die Impedanz mechanischer Schwingungssysteme und ihre Anwendung auf die Theorie des Seiches. *Ann Hydr. Marit. Meteorol.*, 72 (3) : 65.
- 1944b. Eine Methode zur Berechnung der Eigenperioden zusammengesetzter (gekoppelter) Seebeckensysteme. *Ann. Hydr. Marit. Meteorol.*, 72 (7) : 193.
- HOUGH, S. 1897. On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of the tides. *Phil. Trans. A*, CLXXXIX (201) : y and CXCII (139).
- LAMB, H. 1945. *Hydrodynamics*. New York., (Dover Publications). 739 pp.
- LONGUET-HIGGINS, M. S. 1964. Planetary waves on a rotating sphere. *Proc. Roy. Soc. A*279: 446-473.
- DERWIDUÉ, L. 1955. Une méthode mécanique de calcul des vecteurs d'une matrice quelconque. *Bull Soc. Roy. Sci. (Liège)*, xxxix, 24, (5) : 150-171 (R. Zh. M., 1956, 9115).
- FADDEEV, D. K. y V. N. FADDEEVA. 1963. *Computational methods of linear algebra*. San Francisco and London. (W. H. Freeman and Co.), 621 pp.

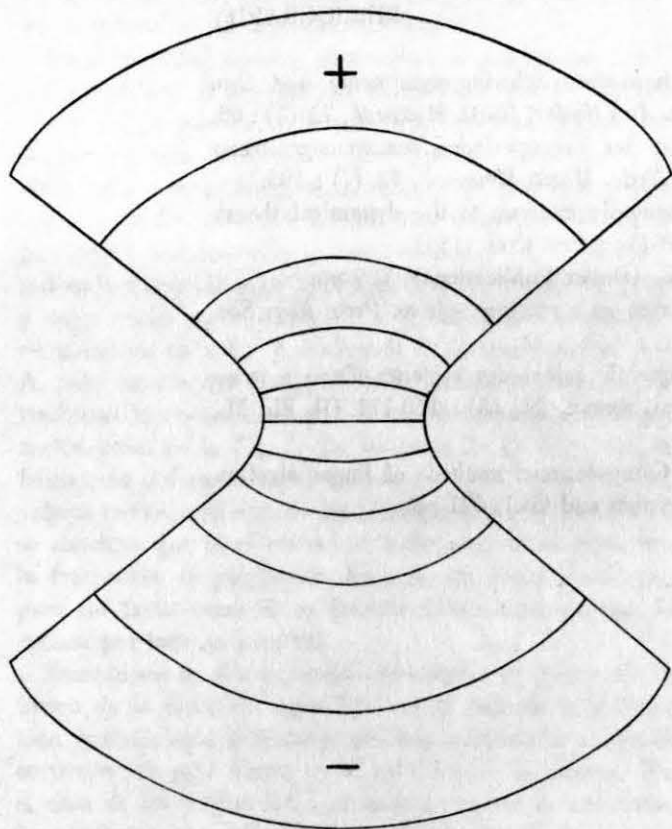


Fig. 1. El campo de ψ en el modo (0, 1) de la palpitación gravitacional en una cuenca definida por $a' = -a = 0.8$, $b' = -b = 4.0$. La frecuencia es $\gamma c = 0.279$. La frecuencia del mismo modo en una cuenca rectangular de la misma longitud es $\gamma c = 0.393$.

Fig. 1. The field of ψ in the (0, 1) gravitational seiche mode in a basin defined by $a' = -a = 0.8$, $b' = -b = 4.0$. The frequency is $\gamma c = 0.279$. The frequency of the same mode in a rectangular basin of the same length is $\gamma c = 0.393$.

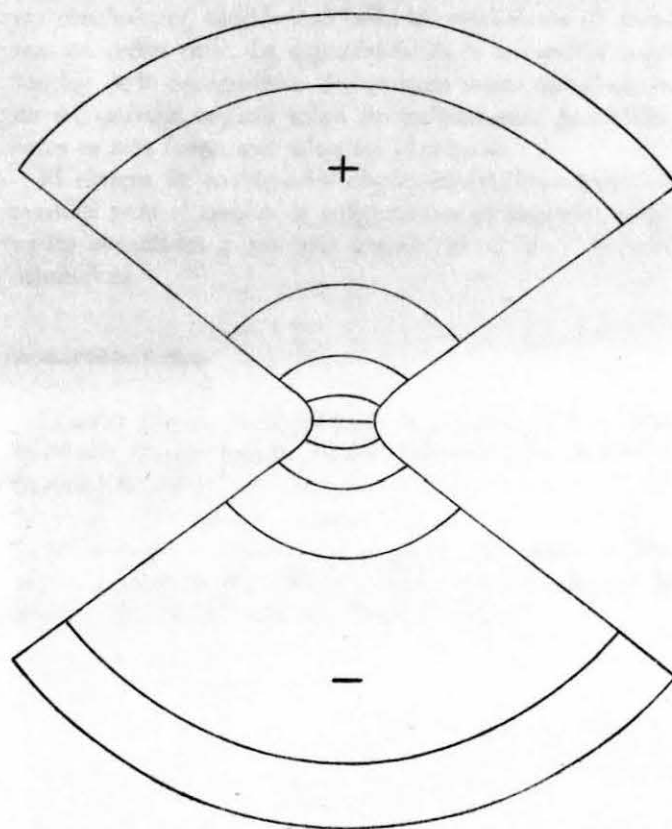


Fig. 2. El campo de ψ en el modo (0, 1) de la palpitación gravitacional en una cuenca definida por $a' = -a = 0.8$, $b' = -b = 10.0$. La frecuencia es $\gamma c = 0.0907$. La frecuencia del mismo modo en una cuenca rectangular es $\gamma c = 0.314$.

Fig. 2. The field of ψ in the (0, 1) gravitational seiche mode in a basin defined by $a' = -a = 0.8$, $b' = -b = 10.0$. The frequency is $\gamma c = 0.0907$. The frequency of the same mode in a rectangular basin of the same length is $\gamma c = 0.314$.

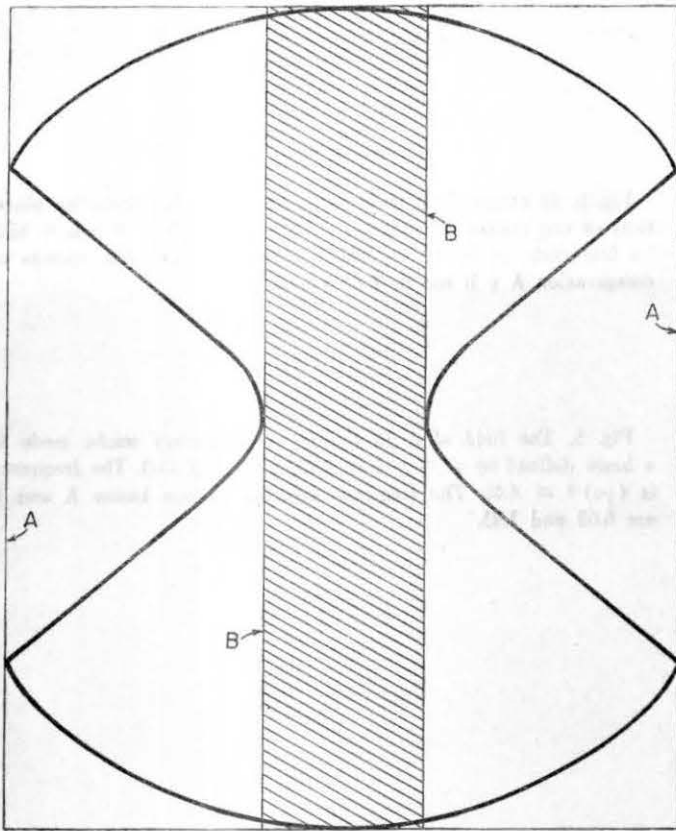


Fig. 3. Las cuencas rectangulares de comparación A y B, correspondientes a una cuenca dada que tiene forma de "ocho". El rectángulo A consiste en el rectángulo exterior completo. El rectángulo B consiste solo en la porción sombreada.

Fig. 3. The comparison rectangular basins A and B, corresponding to a given butterfly-shaped basin. Rectangle A is the entire outer rectangle. Rectangle B is the shaded portion only.

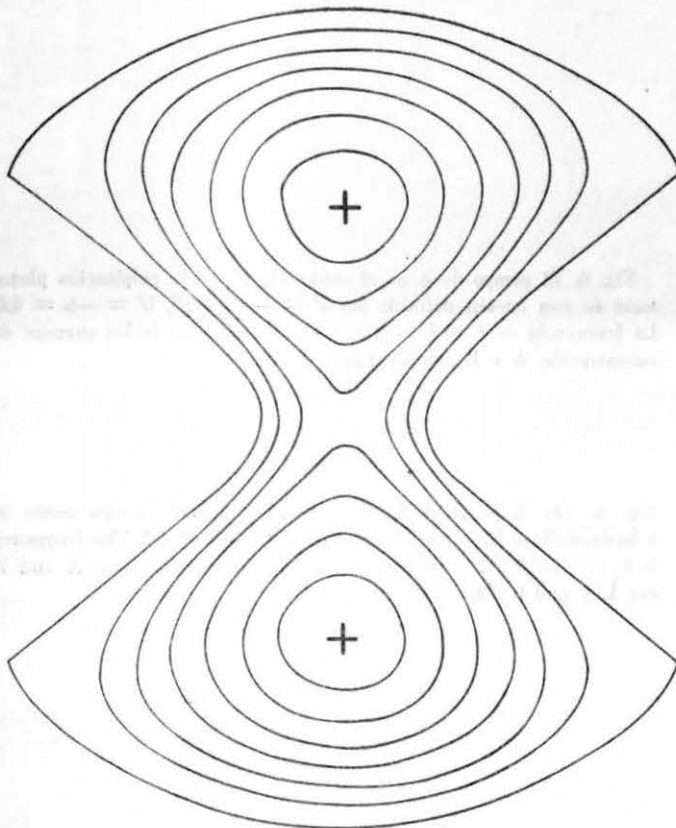


Fig. 4. El campo de ψ en el modo (1, 1) de la palpación planetaria en una cuenca definida por $a' = -a = 0.8$, $b' = -b = 4.0$. La frecuencia es $(\gamma c)^{-1} = 0.910$. Las frecuencias de las cuencas de comparación A y B son de 1.62 y 0.500.

Fig. 4. The field of ψ in the (1, 1) planetary seiche mode in a basin defined by $a' = -a = 0.8$, $b' = -b = 4.0$. The frequency is $(\gamma c)^{-1} = 0.910$. The frequencies of comparison basins A and B are 1.62 and 0.500.

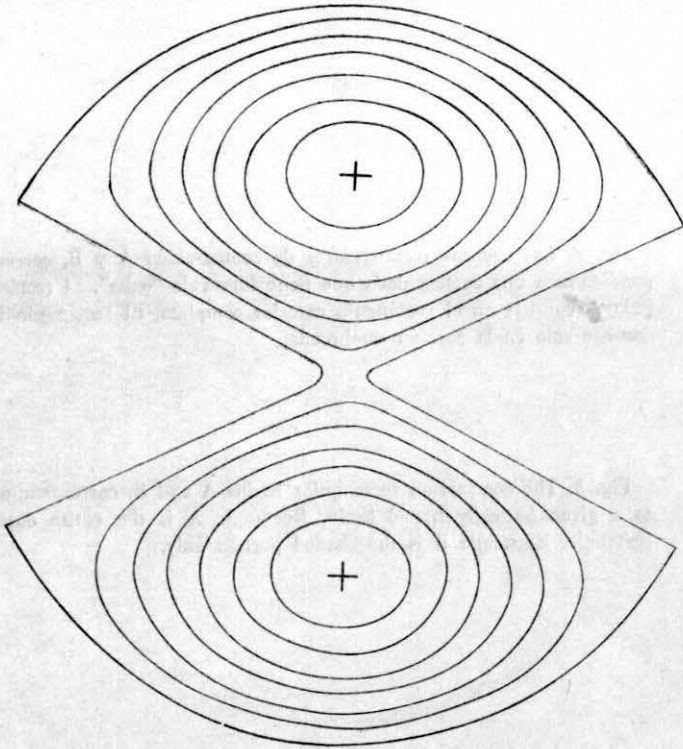


Fig. 5. El campo de ψ en el modo (1, 1) de la palpación planetaria en una cuenca definida por $a' = -a = 0.96$, $b' = -b = 15.0$. La frecuencia es $(\gamma c)^{-1} = 3.46$. Las frecuencias de las cuencas de comparación A y B son de 6.62 y 1.93.

Fig. 5. The field of ψ in the (1, 1) planetary seiche mode in a basin defined by $a' = -a = 0.96$, $b' = -b = 15.0$. The frequency is $(\gamma c)^{-1} = 4.46$. The frequencies of comparison basins A and B are 6.62 and 1.93.

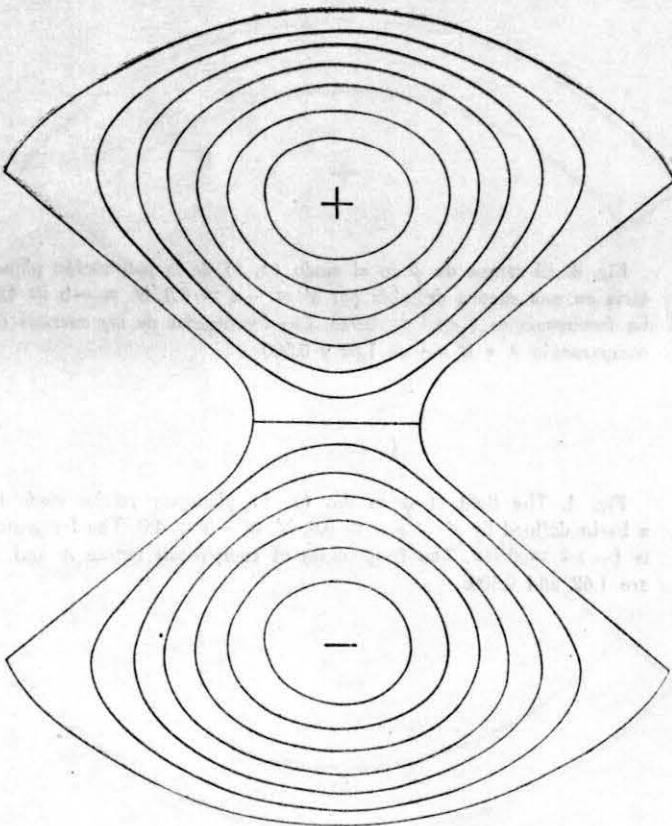


Fig. 6. El campo de ψ en el modo (1, 2) de la palpación planetaria en una cuenca definida por $a' = -a = 0.8$, $b' = -b = 4.0$. La frecuencia es $(\gamma c)^{-1} = 0.893$. Las frecuencias de las cuencas de comparación A y B son de 1.09 y 0.473.

Fig. 6. The field of ψ in the (1, 2) planetary seiche mode in a basin defined by $a' = -a = 0.8$, $b' = -b = 4.0$. The frequency is $(\gamma c)^{-1} = 0.893$. The frequencies of comparison basins A and B are 1.09 and 0.473.