

# GEOFISICA

# INTERNACIONAL

REVISTA DE LA UNIÓN GEOFÍSICA MEXICANA, AUSPICIADA POR EL INSTITUTO DE GEOFÍSICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Director: Julián Adem

Subdirector: Manuel Maldonado-Koerdell

Vol. 4

México, D. F., 1o. de Julio de 1964

Núm. 3

## III CONFERENCIA TÉCNICA SOBRE HURACANES Y METEOROLOGÍA TROPICAL TECHNICAL CONFERENCE ON HURRICANES AND TROPICAL METEOROLOGY

México, D. F., Jun. 6-12, 1963

4a. SESIÓN

4th. SESSION

CONFIGURACIÓN EN GRAN ESCALA DEL FLUJO EN LOS TRÓPICOS (II)  
LARGE SCALE FLOW PATTERN IN THE TROPICS (II)

*CRECIMIENTO DE PERTURBACIONES  
INCIPIENTES A ESCALA SINOPTICA EN LOS  
TROPICOS \**

GEIRMUNDUR ÁRNASON \* \*

### INTRODUCCION

Los estudios teóricos de Haque (1952) y de Lilly (1960) sobre pequeñas perturbaciones en una atmósfera estáticamente inestable en reposo han demostrado que la escala de movimiento preferida es de columnas infinitamente angostas con desplazamiento alternativamente ascendente y descendente. Si se toman en cuenta la fricción y conducción de calor (Kuo, 1961), la escala horizontal preferida se hace finita y es aproximadamente la de una nube en cumulus. Además, al existir una estratificación estable en áreas de movimiento descendente se encuentra que la distancia entre centros ascendentes puede llegar hasta 20-40 Km.

Un resultado adicional de tales estudios proporciona un criterio para la mayor escala horizontal con índice de crecimiento positivo y sucede que esta "perturbación limitante" es del orden de unos cuantos cientos de Km, determinán-

\* El trabajo descrito ahora fue apoyado en parte por el U. S. Weather Bureau bajo Contrato Núm. CWB-10499.

\* \* The Travelers Research Center, Hartford, Connecticut.

*THE GROWTH OF INCIPIENT  
SYNOPTIC-SCALE DISTURBANCES IN THE  
TROPICS \**

GEIRMUNDUR ÁRNASON \* \*

### INTRODUCTION

Theoretical studies by Haque (1952) and Lilly (1960) of small perturbations in a statically unstable atmosphere at rest have shown that the preferred scale of motion is that of infinitely narrow columns of alternately rising and sinking motion. If one takes friction and heat conduction into account (Kuo, 1961), the preferred horizontal scale becomes finite and is approximately that of a cumulus cloud. Allowing, furthermore, a stable stratification in the areas of descending motion, one finds that the distance between ascending centers may be as much as 20-40 Km.

An additional result of these studies is the criterion for the largest horizontal scale with positive growth rate. It turns out that this "limiting perturbation" is of the order of a few hundred Km and is uniquely determined by the

\* The work reported herein was partly supported by the U. S. Weather Bureau under Contract No. CWB-10499.

\* \* The Travelers Research Center, Hartford, Connecticut.

dola peculiarmente la estabilidad estática y la latitud. Los mencionados estudios de Haque y Lilly implican que la existencia de perturbaciones inestables a tal escala pueden explicar la existencia de ciclones tropicales. A pesar de ello, según Kuo (1961), todo es esencialmente una falsa interpretación ya que sólo la escala preferida, es decir, la nube en cumulus, puede desarrollarse si se introducen perturbaciones al azar.

Por otra parte, si el modelo teórico equivale a la mitad inferior de la tropósfera, los sistemas a gran escala de su mitad superior podrían interpretarse como perturbaciones inducidas a la misma escala en la mitad inferior. Según ese punto de vista, la "perturbación limitante" tiene interés en razón de la posibilidad de esa influencia a gran escala, para la cual estudié el efecto de un parámetro de Coriolis variable ( $\beta$  - efecto) sobre el tamaño de la "perturbación limitante" por medio de un modelo barotrópico descrito en otra parte (Árnason, 1961). El resultado es que la dimensión de esta perturbación aumenta *considerablemente* por ello, pero como en los estudios previos, la escala de cumulus continúa como la preferida para el desarrollo. En consecuencia, puede concluirse de modo general que el desarrollo inicial de una perturbación a escala sinóptica no puede explicarse satisfactoriamente dentro del marco exclusivo de una atmósfera en reposo o en movimiento uniforme.

En un intento para encontrar un mecanismo que logre explicar cómo puede surgir la perturbación a escala sinóptica como la preferida para el crecimiento en latitudes bajas, introduje la baroclinicidad en la atmósfera en reposo tratada en estudios previos. Ha sido un planteamiento provechoso, pues el flujo baroclínico favorece las perturbaciones en una dimensión mucho mayor que las nubes en cumulus. Se han descrito los resultados de un estudio con atmósfera estáticamente estable o baroclínicamente neutra en otro lugar (Árnason, 1963) y aunque tales resultados tienen cierto valor en los trópicos, alcanzan mayor interés en las latitudes bajas, pues los resultados corresponden a una atmósfera estáticamente inestable. Todavía se continúan las investigaciones con esta clase de modelo, mostrando los resultados tentativos que en una atmósfera baroclínica que no es neutra ni tiene una pequeña estabilidad estática negativa la escala de máximo crecimiento es del orden de unos cuantos cientos a cerca de dos mil Km. Ya que el número de Richardson negativo del flujo básico aumenta en magnitud, la escala preferida se acerca a la de una "perturbación limitante" en una atmósfera en reposo, como en los estudios previos. Para número de Richardson negativos suficientemente grandes, el crecimiento se hace explosivo en tal escala particular. En términos físicos eso significa que la energía de dos fuentes resulta disponible para perturbaciones en crecimiento y ocurre algo parecido a una resonancia. Para números de Richardson negativos pequeños la validez de la teoría matemática que da base a tales resultados no queda establecida satisfactoriamente en la vecindad inmediata del punto donde el índice de crecimiento se hace excesivo. Por tal razón, no intentaré dar una detallada interpretación física de los resultados matemáticos sobre ese punto, pero mencionaré que ese punto se acerca

static stability and the latitude. The above quoted studies by Haque and Lilly imply that the existence of unstable perturbations on this scale may explain the occurrence of tropical cyclones. According to Kuo (1961), this, however, is essentially a misinterpretation since only the preferred scale, i.e. the cumulus cloud, can be expected to develop if random perturbations are introduced.

If, on the other hand, the theoretical model is identified with the lower half of the troposphere, large-scale systems in its upper half could be thought of as inducing perturbations on the same scale upon the lower half. From this point of view the "limiting perturbation" is of interest. Because of the possibility of such a large-scale influence, I have studied the effect of a variable Coriolis parameter ( $\beta$  - effect) upon the size of the "limiting perturbation" by means of a barotropic model described elsewhere (Árnason, 1961). The result is that the dimension of this perturbation is thereby *considerably* increased but, as in previous studies, the cumulus scale remains the preferred scale to develop. One may, therefore, generally conclude that the initial development of synoptic-scale disturbances cannot be explained satisfactorily within the exclusive framework of an atmosphere at rest or in uniform motion.

In an attempt to find a mechanism capable of explaining how synoptic-scale perturbations may emerge as the preferred growth scale at low latitudes, I have introduced baroclinicity into the resting atmosphere dealt with in the previous studies. This has turned out to be a fruitful approach in that a baroclinic flow will favor perturbations of a much larger dimension than that of a cumulus cloud. The results of a study dealing with a statically stable or neutral baroclinic atmosphere have been reported elsewhere (Árnason, 1963). Although these results have some bearing on the tropics, the results of greatest interest for low latitudes are perhaps, those pertaining to a statically unstable atmosphere. The investigation of this kind of model is still in progress. Tentative results show that in a baroclinic atmosphere which is either neutral or has a small negative static stability, the scale of a maximum growth is in the range of a few hundred to about two thousand Km. As the negative Richardson number of the basic flow increases in magnitude, the preferred scale approaches that of the "limiting perturbation" in a resting atmosphere which is dealt with in the previous studies. For sufficiently large negative Richardson numbers, the growth becomes explosive for this particular scale. In physical terms, this means that energy from two sources becomes available to the growing disturbances and something approaching a resonance appears to take place. For small negative Richardson numbers the validity of the mathematical theory, upon which these results are based, is not satisfactorily established in the immediate vicinity of the point where the growth rate becomes excessive. I will, therefore, not attempt to give a detailed physical interpretation of the mathematical results near this point but will mention that as this point is approached the field

al campo de movimiento cuando se hace cada vez más no-geostrofico. Un análisis más completo requiere ampliar los estudios matemáticos.

of motion becomes increasingly non-geostrophic. A more complete analysis requires further mathematical studies.

INDICES DE CRECIMIENTO DE PERTURBACIONES EN UNA ATMOSFERA ESTATICAMENTE INESTABLE Y BAROCLINICA

GROWTH RATES OF PERTURBATIONS IN A BAROCLINIC AND STATICALLY UNSTABLE ATMOSPHERE

La atmósfera tropical es reemplazada por una capa única de fluido compresible e invíscido en equilibrio hidrostático y de extensión lateral infinita. En otro lugar se ha usado este modelo (Árnason, 1963) para el caso de una estabilidad estática positiva dentro del marco de la teoría de las perturbaciones y en consecuencia, trataré de reducirme al caso de estabilidad estática negativa. Cuando el  $\beta$  - efecto se omite, la ecuación diferencial que gobierna el problema de estabilidad baroclínica es:

The tropical atmosphere is here replaced by a single layer of a compressible, inviscide fluid in hydrostatic balance and of infinite lateral extent. This model has been dealt with elsewhere (Árnason, 1963), for the case of a positive static stability within the framework of perturbation theory, and I shall, therefore, confine myself to the case of negative static stability. When the  $\beta$  - effect is omitted, the differential equation governing the baroclinic stability problem is:

$$\epsilon(1 - \epsilon^2)D'' - 2D' - \epsilon h^2 D = 0 \tag{1}$$

donde los símbolos tienen el siguiente significado

where the symbols have the following meaning:

- $h^2$  número de Richardson del flujo básico
- $D$  amplitud de  $\omega$ , "velocidad vertical" en un sistema-p
- $\epsilon = \Delta/C_1$
- $C_1 = \frac{f}{k} = \frac{\text{parámetro de Coriolis}}{\text{número de onda}} = \text{velocidad de ondas de inercia}$
- $\Delta = c - U$  donde  $c$  es la velocidad de fase de las perturbaciones y  $U$  es la velocidad del flujo básico;

- $h^2$  the Richardson's number of the basic flow
- $D$  the amplitude of  $\omega$ , the "vertical velocity" in a p-system
- $\epsilon = \Delta/C_1$
- $C_1 = \frac{f}{k} = \frac{\text{Coriolis parameter}}{\text{wave number}} = \text{speed of inertia waves}$
- $\Delta = c - U$  where  $c$  is the phase speed of the perturbations and  $U$  is the speed of the basic flow;

una prima significa diferenciación con respecto a  $\epsilon$ , la variable independiente. Puede demostrarse que  $\epsilon$  es numéricamente igual al cociente entre la divergencia de viento horizontal y la componente vertical de vorticidad del viento y por ello, que es mucho más pequeña que la unidad para el movimiento casi-geostrofico.

a prime means differentiation which respect to  $\epsilon$ , the independent variable. It can be shown that  $\epsilon$  is numerically equal to the ratio horizontal wind divergence to the vertical component of the wind vorticity and is, therefore, much smaller than unity for quasi-geostrophic motion.

En el caso de estabilidad estática negativa,  $h^2$  resulta negativa y consecuentemente, para conveniencia, lo escribiré  $h^2 = -h_1^2$ , donde  $h_1^2$  es positiva. Cuando  $h_1^2$  es grande puede demostrarse que dentro del intervalo de interés  $\epsilon^2 \ll 1$  y que puede obtenerse una solución aproximada para (1) resolviendo la más simple ecuación.

In the case of negative static stability  $h^2$  is negative and I will, therefore, for convenience sake write  $h^2 = -h_1^2$  where  $h_1^2$  is positive. When  $h_1^2$  is large it can be shown that within the range of interest  $\epsilon^2 \ll 1$  and an approximation solution to (1) is obtained by solving the simpler equation

$$\epsilon D'' - 2D' + \epsilon h_1^2 D = 0 \tag{1a}$$

que carece de los puntos singulares  $\epsilon \pm 1$ . Rápidamente se verifica que (1a) tiene dos soluciones fundamentales

which is free of the singular points  $\epsilon \pm 1$ . It is readily verified that (1a) has the two fundamental solutions

$$D_1 = (1 + ih_1 \epsilon) e^{-ih_1 \epsilon}; \quad D_2 = (1 - ih_1 \epsilon) e^{ih_1 \epsilon} \tag{2}$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria.

where  $i$  is the imaginary unit.

La Ec. (2), con las condiciones de frontera de  $D$  desapareciendo en la cima y en el fondo del modelo de una capa, lleva a la ecuación característica

Eq. (2) with the boundary conditions of  $D$  vanishing at the top and the bottom of the one layer model leads to the characteristic equation

$$j^2 = -(\tan \alpha - \alpha)(\cot \alpha + \alpha). \tag{3}$$

Aquí

$$\alpha = \frac{h_1}{2} \frac{U_2 - U_1}{C_i} = \frac{\pi}{2} \frac{C_g}{C_i} \quad ; \quad j = \frac{h_1}{2} \frac{(c - U)}{C_i}$$

$\bar{U} = \frac{1}{2} (U_2 + U_1)$  y los índices 1 y 2 se refieren al fondo y a la cima de la capa;  $C_g$  es la velocidad de las ondas de gravedad de intervalo. Se sigue de (3) que  $j$  es puramente imaginaria (como lo es la velocidad de fase  $c$ ) para todos los valores de  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ; para  $\alpha$  acercándose a  $\frac{\pi}{2}$ ,  $j$  se aproxima al infinito y cambia de signo al sobrepasar  $\alpha$  el valor  $\frac{\pi}{2}$ .

Este valor de  $\alpha$  corresponde a  $C_g = C_i$  que define, como puede demostrarse, la "perturbación limitante" ya discutida.

La solución del problema del valor de Eigen asociado con (1) tiene mayor interés práctico que (3). Sin embargo, es un problema más difícil de resolver por las singularidades  $\epsilon \pm 1$  que tienen importancia para pequeños valores del número de Richardson. Para valores de  $h_1$  mayores de 3 se ha obtenido una solución aproximada de (1) por medio de una expansión de series de potencias alrededor del punto ordinario  $\epsilon = 0$ . El problema de los valores de Eigen asociados se ha resuelto, en ese caso, obteniéndose soluciones para pequeños valores de  $h_1$  por medio del método de series de potencias que no son válidas dentro del intervalo completo de interés. Como se conoce la solución para  $h = 0$  (Fjörtoft, 1950), es posible usar consideraciones de continuidad para extrapolar curvas de crecimiento para pequeños valores de  $h_1$ .

Los resultados se muestran en la Fig. 1, donde las ordenadas son el índice de crecimiento  $\sigma$  sobre el seno de latitud que se muestra en unidades de  $10^{-4}$  y las abscisas la mitad de la deformación vertical del viento total sobre la velocidad de ondas de inercia  $C_i$  y en consecuencia, proporcional al número térmico de Rossby  $\frac{U_2 - U_1}{fL}$ . La figura muestra índices de crecimiento para estabildades estáticas positivas y negativas incluso el caso neutro, pudiendo notarse los máximos relativos de índice de crecimientos para las positivas y débilmente negativas. Para un cierto valor crítico por  $h_1$ , el máximo asociado desaparece y el índice de crecimiento aumenta monotónicamente y se hace excesivo al acercarse al número térmico de Rossby que corresponde a  $C_g/C_i = 1$ , lo cual se ilustra en la figura en dos casos correspondientes a  $h_1 = 5$  y  $h_1 = 10$ . La escala horizontal en la cima de la figura de la longitud de onda  $L$  en cientos de Km que corresponde a los números de la escala del fondo. La conversión de  $\frac{1}{2} \frac{U_2 - U_1}{C_i}$  a longitud de ondas se hizo cuando

$U_2 - U_1 = 5$  m/seg, ya que  $C_i$  depende tanto de la longitud de onda como de la latitud;  $L$  se indica para varias latitudes.

Se sigue que la escala preefrida para el flujo baroclínico es del orden de cientos de Km, lo cual es muy diferente de las condiciones en una atmósfera en reposo donde la escala de unos cuantos Km es la más favorecida. Una teoría más completa de un flujo básico baroclínico e inestable estáticamente tendría probablemente ambas escalas como preferidas

Here

$\bar{U} = \frac{1}{2} (U_2 + U_1)$  and the subscripts 1 and 2 refer to the bottom and the top of the layer;  $C_g$  is the speed of interval gravity waves. It follows from (3) that  $j$  is purely imaginary (and so is the phase speed  $c$ ) for all values of  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ; for  $\alpha$  approaching  $\frac{\pi}{2}$ ,  $j$  approaches infinity and changes its sign as  $\alpha$  surpasses the value  $\frac{\pi}{2}$ . This

value of  $\alpha$  corresponds to  $C_g = C_i$  which, as can be shown, defines the "limiting perturbation" dealt with above.

Of greater practical interest than (3) is the solution of the Eigen value problem associated with (1). This, however, is a more difficult problem to solve because of the singularities  $\epsilon \pm 1$  which is of importance for small values of the Richardson number. For values of  $h_1$  greater than 3, an approximate solution to (1) has been obtained by means of a power series expansion around the ordinary point  $\epsilon = 0$ . The associated Eigen value problem has been solved in this case. Solutions for small values of  $h_1$  may be obtained by means of the power series method, but are not valid within the entire range of interest. Because the solution for  $h = 0$  is known (Fjörtoft, 1950) it is possible to use continuity considerations to extrapolate the growth curves for small values of  $h_1$ .

The results are shown in Fig. 1. The ordinate is the growth rate,  $\sigma$ , over the sine of latitude and is shown in units of  $10^{-4}$ . The abscissa is one half the total vertical wind shear over the speed of inertia waves,  $C_i$ , and is therefore proportional to the thermal Rossby number  $\frac{U_2 - U_1}{fL}$ .

The figure shows growth rates for both positive and negative static stabilities, including the neutral case. Note the relative maxima of the growth rates for positive and slightly negative static stabilities. For a certain critical value by  $h_1$ , the associated maximum disappears and the growth rate increases monotonically and becomes excessive as the thermal Rossby number corresponding to  $C_g/C_i = 1$  is approached. This is illustrated in the figure in the two cases corresponding to  $h_1 = 5$  and  $h_1 = 10$ . The horizontal scale at the top of the figure gives the wavelength,  $L$ , in hundreds of Km that corresponds to the numbers on the bottom scale. The conversion from  $\frac{1}{2} \frac{U_2 - U_1}{C_i}$  to wavelength was done by setting  $U_2 - U_1 = 5$  m/sec; since  $C_i$  depends on both wavelength and latitude,  $L$  is shown for different latitudes.

It follows then that the preferred scale for baroclinic flow is of the order of hundreds of Km. This is quite different from the conditions in a resting atmosphere where scale of a few Km is the one most favored. A more complete theory of a baroclinic and statically unstable basic flow will probably include both scales as preferred relative

respecto a escalas adyacentes. Como resultado podemos esperar que ambas se encuentren presentes al mismo tiempo al alimentarse cada una de fuentes de energía diversas. Aunque el modelo usado en este estudio es extremadamente simple, creo que su mecanismo para favorecer perturbaciones a escala sinóptica se encuentre en la más complicada atmósfera tropical.

3.0 CONCLUSIONES

Los estudios con un modelo barotrópico y otro baroclínico, ambos con estabilidad estática negativa y consecuentemente, simulando de manera burda una atmósfera tropical, llevan a las siguientes conclusiones:

to adjacent scales. As a result, we may expect both to be present at the same time each being fed from different energy sources. Although the model used in this study is extremely simple, I believe its mechanism for favoring synoptic scale perturbations is present in the more complicated tropical atmosphere.

3.0 CONCLUSIONS

Studies of a barotropic and a baroclinic model, both having a negative static stability and thereby crudely simulating the tropical atmosphere, have lead to the following conclusions:

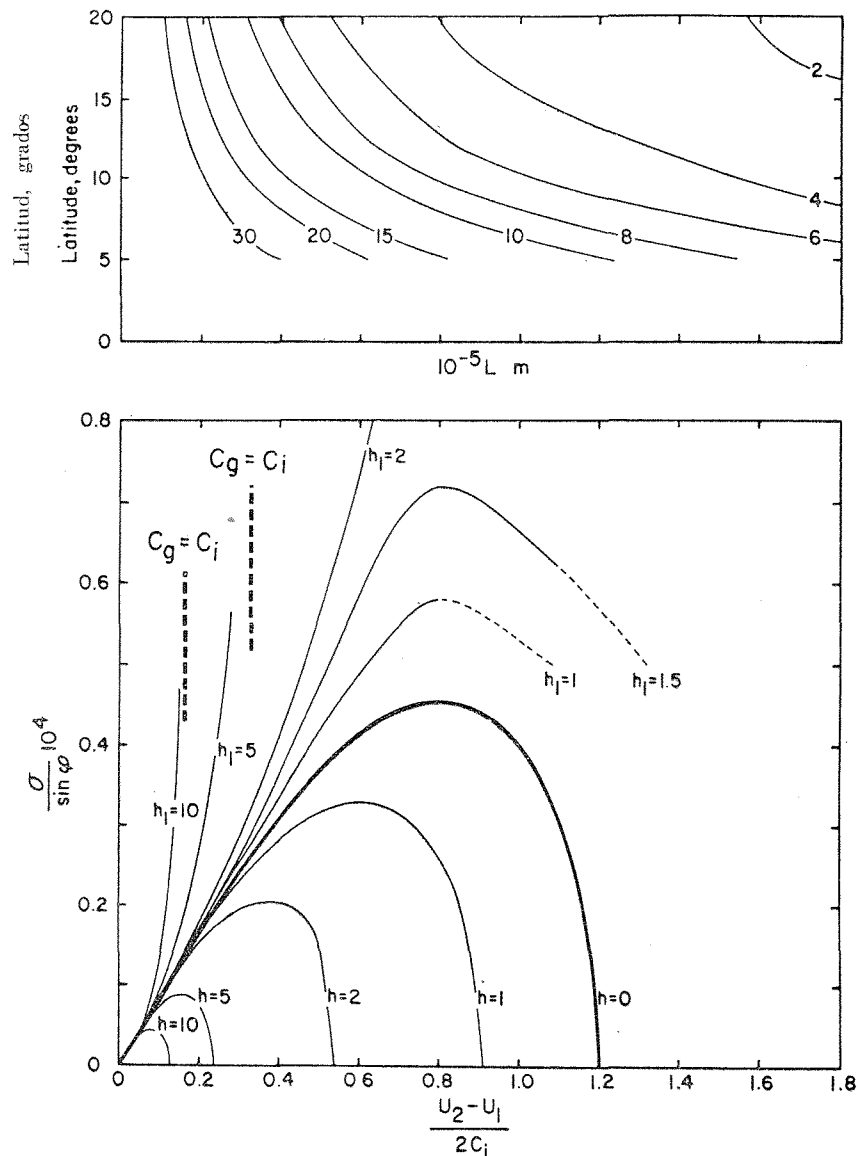


Fig. 1.—Las curvas de la parte inferior de la figura muestran índices de crecimiento en relación a  $\frac{U_2 - U_1}{C_i}$  para diferentes valores del parámetro  $h$ . La parte superior de la figura es una escala para la longitud de onda  $L$  que corresponde a cierto número en la escala en el fondo de la figura. La conversión supone  $U_2 - U_1 = 5$  m/seg. Para detalles véase texto.

Fig. 1.—The curves in the lower part of the figure show growth rates in relation to  $\frac{U_2 - U_1}{C_i}$  for different values of the parameter  $h$ . The upper part of the figure is a scale for the wavelength,  $L$ , corresponding to a certain number on the scale at the bottom of the figure. The conversion assumes  $U_2 - U_1 = 5$  m/sec. For details see text.

a) En el modelo barotrópico la escala preferida es aproximadamente una nube en cumulus de acuerdo con los resultados de otros investigadores. La "perturbación limitante" que representa la transición de ondas neutras a desarrolladas aumenta considerablemente al tomar el efecto  $-\beta$  en cuenta. Aunque eso tiene el efecto de aplanar las curvas de índice de crecimiento hacia mayores longitudes de ondas, las ondas cortas continúan siendo las más inestables.

b) En el modelo baroclínico la escala preferida es del orden de unos cuantos de cientos de Km hasta casi dos mil Km y siempre mayor que la "perturbación limitante" del modelo barotrópico. En el caso de un número de Richardson negativo grande la escala preferida se acerca a la de una "perturbación limitante" y el índice de crecimiento se hace excesivo.

c) Las perturbaciones tropicales a escala sinóptica pueden formarse en un atmósfera neutra o condicionalmente inestable que sea ligeramente baroclínica.

a) In the barotropic model, the preferred scale is approximately that of a cumulus cloud, in agreement with results by other investigators. The "limiting perturbation", which represents the transition from neutral to growing waves, is considerably increased by taking the  $\beta$  - effect into account. Although this has the effect of flattening the growth rate curves toward larger wavelengths, the short waves remain the most unstable waves.

b) In the baroclinic model, the preferred scale is in the range of a few hundred Km to a couple of thousand Km and is always larger than the "limiting perturbation" of the barotropic model. In the case of a large negative Richardson's number the preferred scale approaches that of the "limiting perturbation" and the growth rate becomes excessive.

c) Tropical disturbances on synoptic scale could form in a neutral or conditionally unstable atmosphere which is slightly baroclinic.

#### BIBLIOGRAFIA

- ÁRNASON, G. 1961. A Study of the Dynamics of a Stratified Fluid in Relation to Atmospheric Motions and Physical Weather Prediction. *Tellus*, 13(2):156-170.
- 1963. The Stability of Non-Geostrophic Perturbations in a Baroclinic Westerly Flow. *Tellus*, 15 (Submitted for publication) (Enviado para publicación).
- FJÖRTOFT, R. 1950. Application of Integral Theorems in deriving Criteria of Stability for Laminar Flows and for the Baroclinic Circular Vortex, *Geofysiske Publikasjoner* 17(6):1-52.
- HAQUE, S. M. A. 1952. The Initiation of Cyclonic Circulation in a Vertically Unstable Stagnant Air Mass. *Quart. Jour Royal Meteor. Soc.*, 78:394-406.
- KUO, H. L. 1961. Convection in Conditionally Unstable Atmosphere. *Tellus*, 13(4):441-459.
- LILLY, D. K. 1960. On the Theory of Disturbances in a Conditionally Unstable Atmosphere, *Mo. Weather Rev.*, 88:1-17.

#### BIBLIOGRAPHY