

# GEOFISICA

# INTERNACIONAL

REVISTA DE LA UNIÓN GEOFÍSICA MEXICANA, AUSPICIADA POR EL INSTITUTO DE GEOFÍSICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Director: Julián Adem

Subdirector: Manuel Maldonado-Koerdell

Vol. 3

1o. de Enero de 1963

Núm. 1

## INFLUENCIA DEL AMORTIGUAMIENTO VISCO-SO SOBRE LA RESPUESTA A TEMBLOR DE ESTRUCTURAS LINEALES

A. ARIAS S. \* y R. HUSID L. \* \*

### RESUMEN

Se analiza la influencia del amortiguamiento viscoso, expresado como fracción del amortiguamiento crítico, sobre el espectro de respuesta de estructuras lineales de un grado de libertad. Se han tomado como base del análisis los espectros obtenidos por Alford, Housner y Martel y se ha confirmado el resultado con apoyo en los espectros medios propuestos por Housner y los espectros medios obtenidos por Bycroft para osciladores lineales sometidos a pulsos de aceleración distribuidos al azar.

Se concluye que existe una dependencia muy clara entre la magnitud de la respuesta y el grado de amortiguamiento: para una estructura de período dado, la respuesta es proporcional a  $n^{-0.4}$  para  $n > 0.02$ .

Un análisis teórico debido a Hudson muestra que la respuesta para una estructura de período dado es proporcional a  $n^{-0.5}$ . Este resultado puede extenderse a estructuras de varios grados de libertad bajo las hipótesis siguientes: el temblor puede representarse como un proceso aleatorio estacionario, conocido como ruido blanco; existen modos de vibración ortogonales con frecuencias todas diferentes.

Se explica la discrepancia entre los resultados teóricos y experimentales por la duración finita de los temblores reales y se extienden los resultados de Hudson para comparar las respuestas de osciladores con amortiguamiento nulo y con amortiguamiento distinto de cero.

Alford, Housner y Martel (1951) han encontrado que el grado de amortiguamiento tiene una influencia notable sobre la respuesta máxima de un oscilador lineal simple sometido a temblor. En la Fig. 1 se reproduce una de las figuras de la citada publicación, en que puede apreciarse dicha influencia.

\* Profesor de Mecánica Racional, Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile.

\* \* Profesor Auxiliar de Mecánica Racional, Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile.

## INFLUENCE OF VISCOUS DAMPING ON THE EARTHQUAKE RESPONSE OF LINEAR STRUCTURES

A. ARIAS S. \* and R. HUSID L. \* \*

### ABSTRACT

The influence of viscous damping, expressed in terms of critical damping, on the response spectrum of single degree of freedom linear structures is analyzed. The spectra published by Alford, Housner and Martel are taken as a basis for this analysis, and the results are confirmed through the standard spectra proposed by Housner and also through mean spectra obtained by Bycroft for linear oscillators subjected to random acceleration pulses.

It is concluded that there is a very clear dependence between the magnitude of the response and the damping ratio: for a structure with given period, the response is proportional to  $n^{-0.4}$  for  $n > 0.02$ .

A theoretical analysis due to Hudson shows that the response for a structure of given period is proportional to  $n^{-0.5}$ . This result can be generalized for structures with several degrees of freedom under the following hypothesis: the earthquake may be represented as a stationary random process known as white noise; there are principal modes of vibration that are orthogonal and their frequencies are all different.

The discrepancy between theoretical and experimental results is explained as arising from the finite duration of real earthquakes. The findings of Hudson are extended to include the possibility of comparing the responses of undamped and damped oscillators.

Alford, Housner and Martel (1951) have found that the damping ratio has considerable influence on the maximum earthquake response of a simple linear oscillator. Fig. 1 is a reproduction of one of the diagrams of the publication just mentioned; the influence of damping is clearly shown.

\* Professor of Theoretical Mechanics, School of Engineering, University of Chile.

\* \* Assistant Professor of Theoretical Mechanics, School of Engineering, University of Chile.

Se han analizado estos espectros dividiendo, para cada uno de ellos y para un período propio dado, la ordenada del espectro correspondiente a un grado de amortiguamiento dado por la ordenada del espectro para un grado de amortiguamiento igual a 0.2 veces el amortiguamiento crítico. Se eligió 0.2 como grado de amortiguamiento de comparación porque para ese valor el espectro se obtuvo para 26 de los 28 espectros que aparecen en dicha publicación. Los resultados aparecen en la Fig. 2. Salvo para amortiguamientos pequeños ( $n = 0.02$ ), la razón es prácticamente independiente del período.

An analysis has been done of these spectra, for each one and for a given natural period of the oscillator, the ordinate for a fixed damping ratio was divided by the ordinate of the spectrum corresponding to a damping ratio equal to 0.2. This damping ratio has been selected for that comparison because for such value the spectrum was obtained in 26 out of the 28 cases that appear in that publication. Results are shown in Fig. 2. Except for small degrees of damping ( $n = 0.02$ ), the ratio is practically independent of the period.

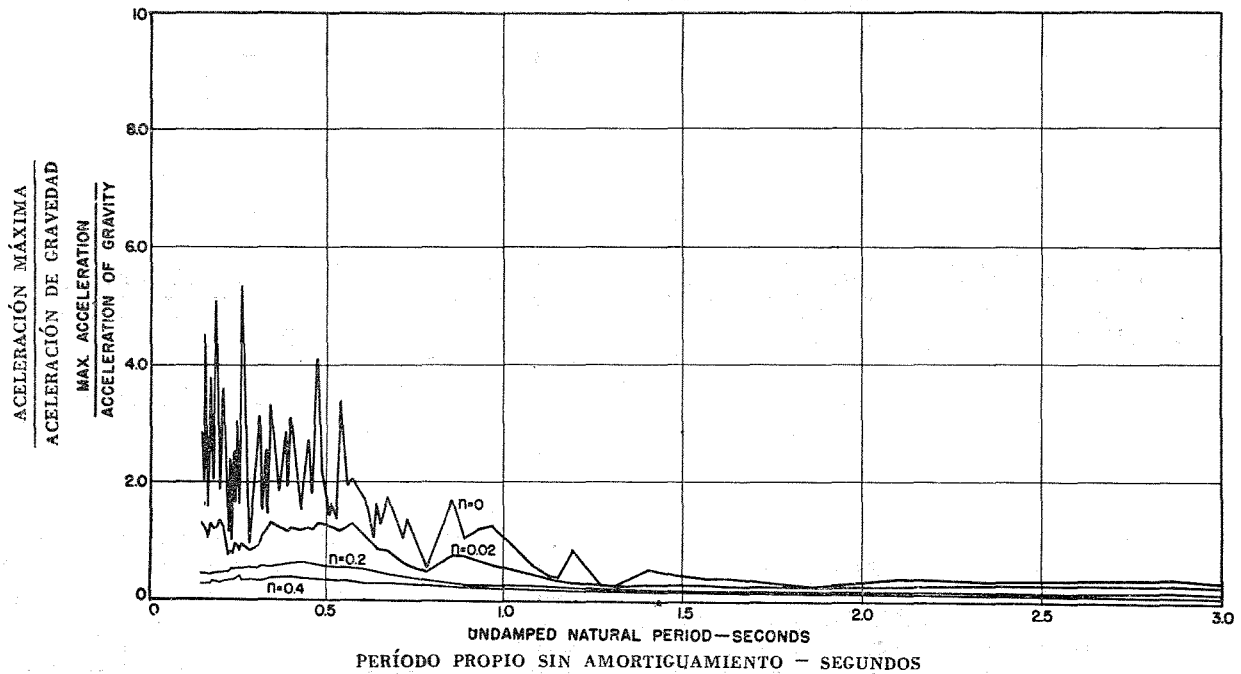


Fig. 1. Espectro de aceleraciones para el terremoto de El Centro, California; 18 de Mayo de 1940. Componente N-S. (Según Alford, Housner y Martel, 1951.)

Fig. 1. Acceleration spectrum for El Centro, California, earthquake, May 18, 1940. Component N-S. (From Alford, Housner and Martel, 1951.)

Housner (1959) ha desarrollado espectros medios de aceleración y velocidad (Fig. 3), promediando los espectros de algunos temblores que aparecen en la publicación citada. Repitiendo el cálculo con estos espectros medios se obtienen los resultados en la Fig. 4. Aquí resulta más clara todavía la independencia de la razón  $A_n : A_{0.2}$  respecto del período  $T$ .

Las ordenadas de las líneas horizontales de las Figs. 3 y 4 se han representado en la Fig. 5 como función de  $n$  en un diagrama logarítmico. Los puntos quedan en una recta de ecuación.

Housner (1959) has developed standard acceleration and velocity spectra (Fig. 3), by taking a weighted mean of the spectra of some of the earthquakes that appear in his contribution. Repeating all computations with these standard spectra, results shown in Fig. 4 are obtained. Here the independence between  $A_n : A_{0.2}$  and the period  $T$  is even more clear.

The ordinates of the horizontal lines of Figs. 3 and 4 have been plotted as a function of  $n$  in logarithmic paper (Fig. 5). The points fall on a straight line, and their equation is.

$$\frac{A_n}{A_{0.2}} = \left( \frac{0.2}{n} \right)^{0.4} \quad (1)$$

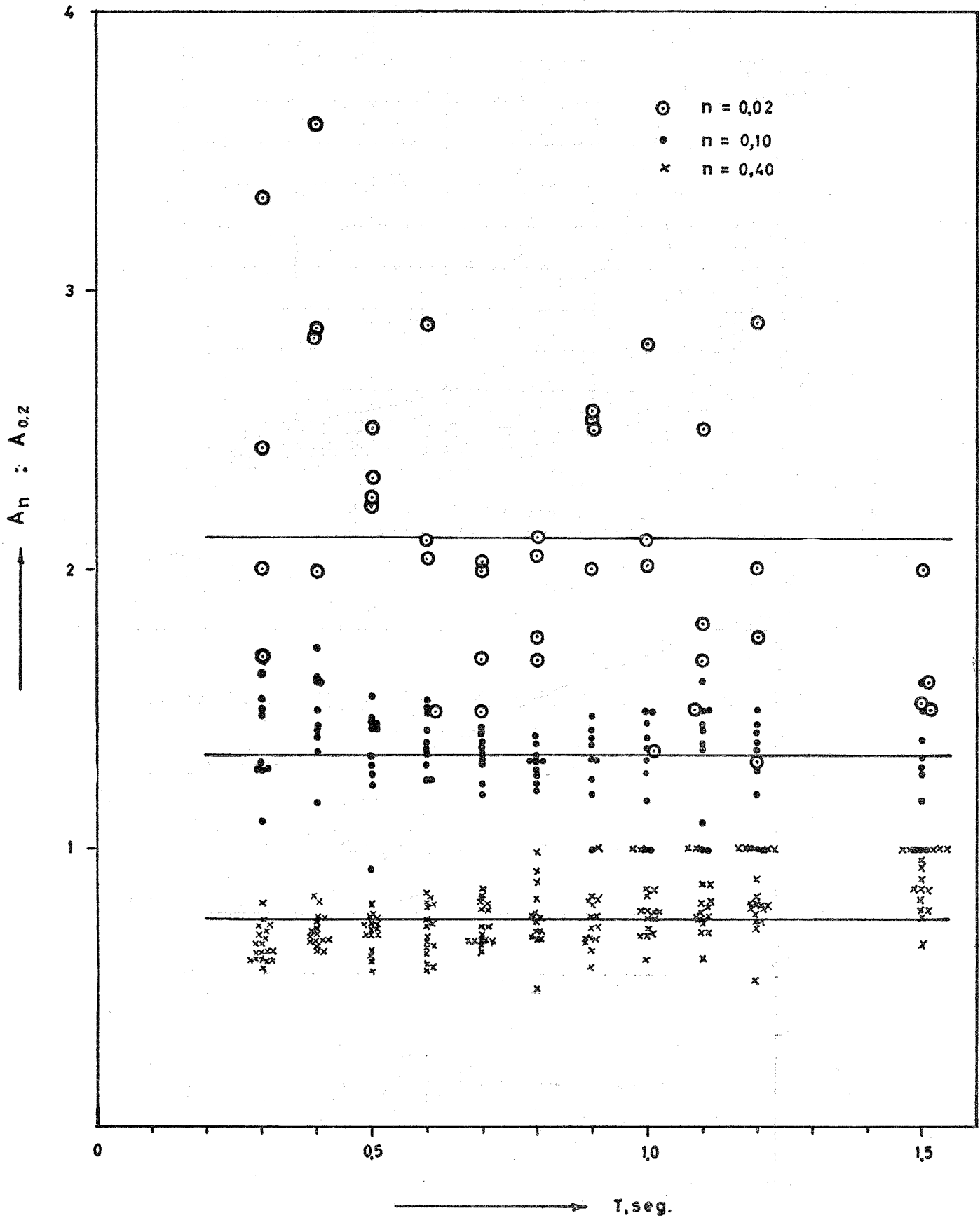


Fig. 2. Razón  $A_n : A_{0.2}$  entre la máxima aceleración de respuesta de un oscilador con grado de amortiguamiento  $n$  y la de un oscilador con grado de amortiguamiento 0.2 en función del periodo propio  $T$ .

Fig. 2. Ratio of  $A_n : A_{0.2}$  between the maximum acceleration response of an oscillator with damping degree of  $n$  and that of one oscillator with damping degree of 0.2 as a function of the natural period  $T$ .

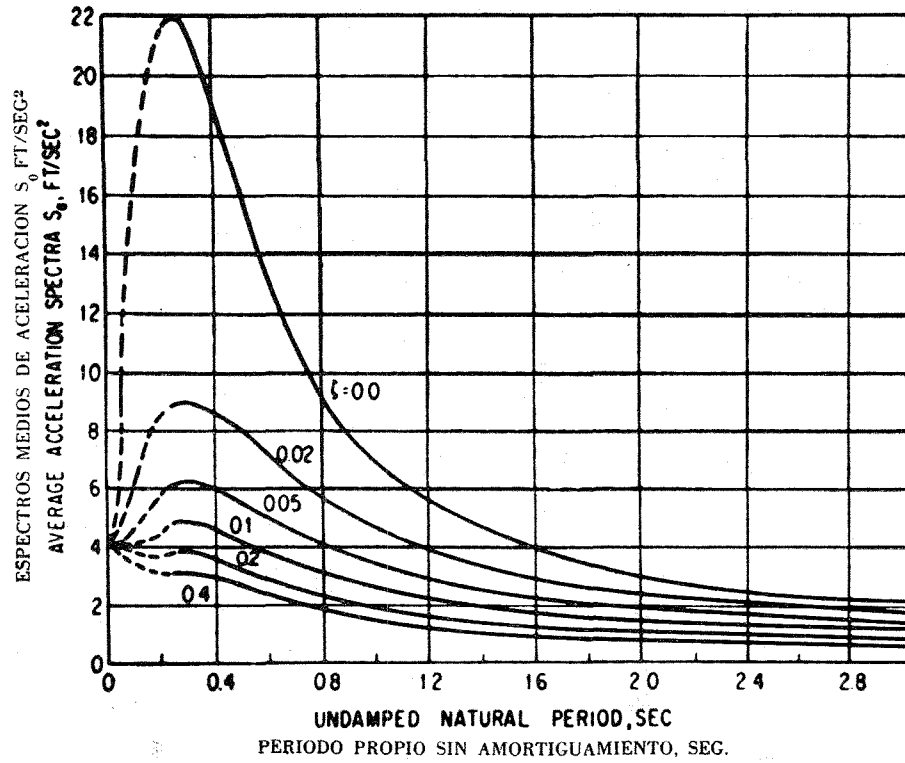


Fig. 3. Espectros medios de máxima aceleración.  
(Según Housner, 1959)

Fig. 3. Standard acceleration spectra.  
(From Housner, 1959)

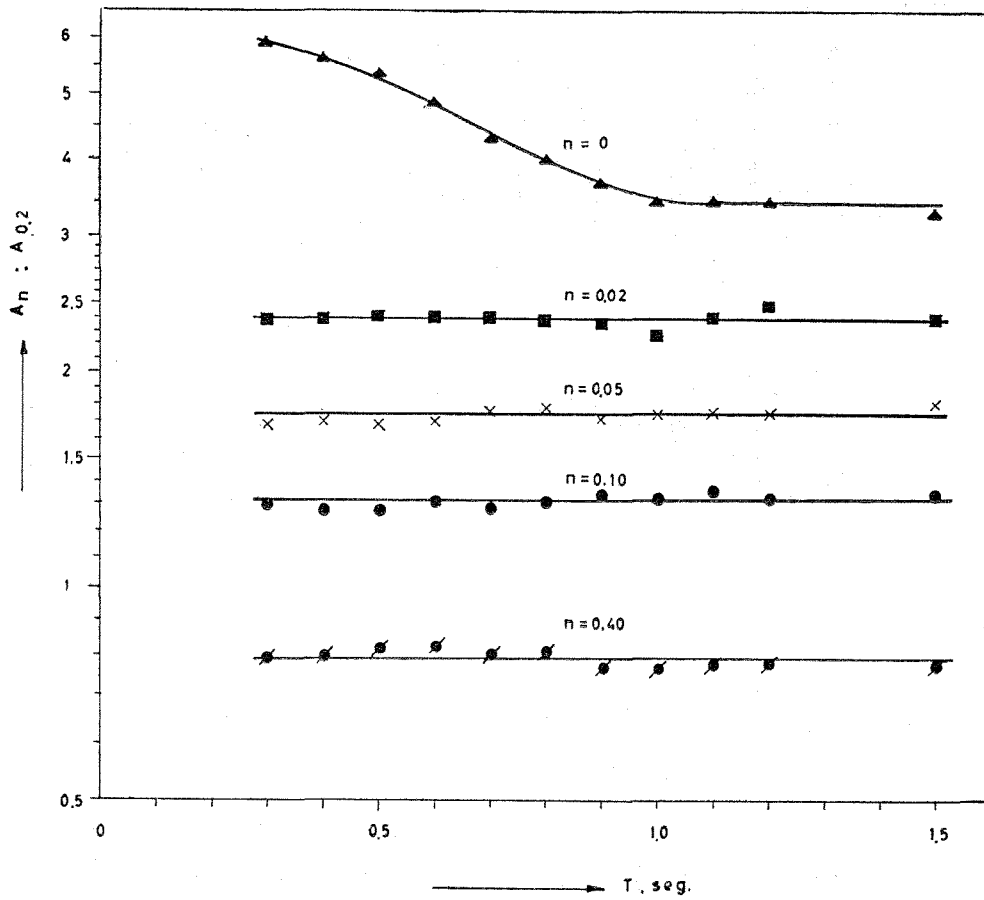


Fig. 4. Razón  $A_n : A_{0.2}$  calculada sobre espectros medios de aceleración Housner en función del periodo T.

Fig. 4. Ratio of  $A_n : A_{0.2}$  computed on standard acceleration spectra of Housner as a function of period T.

La relación (1) se puede generalizar como sigue:

Relation (1) can be generalized in the following way:

$$\frac{A_n}{A_{n^1}} = \left( \frac{n^1}{n} \right)^{0.4} \quad (2)$$

en que  $n$  y  $n^1$  son dos grados de amortiguamiento no inferiores a 0.02.

$n$  and  $n^1$  being two different degrees of damping exceeding 0.02.

Este resultado no es nuevo; ya había sido mencionado sin justificación detallada por Kawasuki y Kamai (1956).

This result is not new; it was pointed out by Kawasumi and Kanai (1956) without any demonstration.

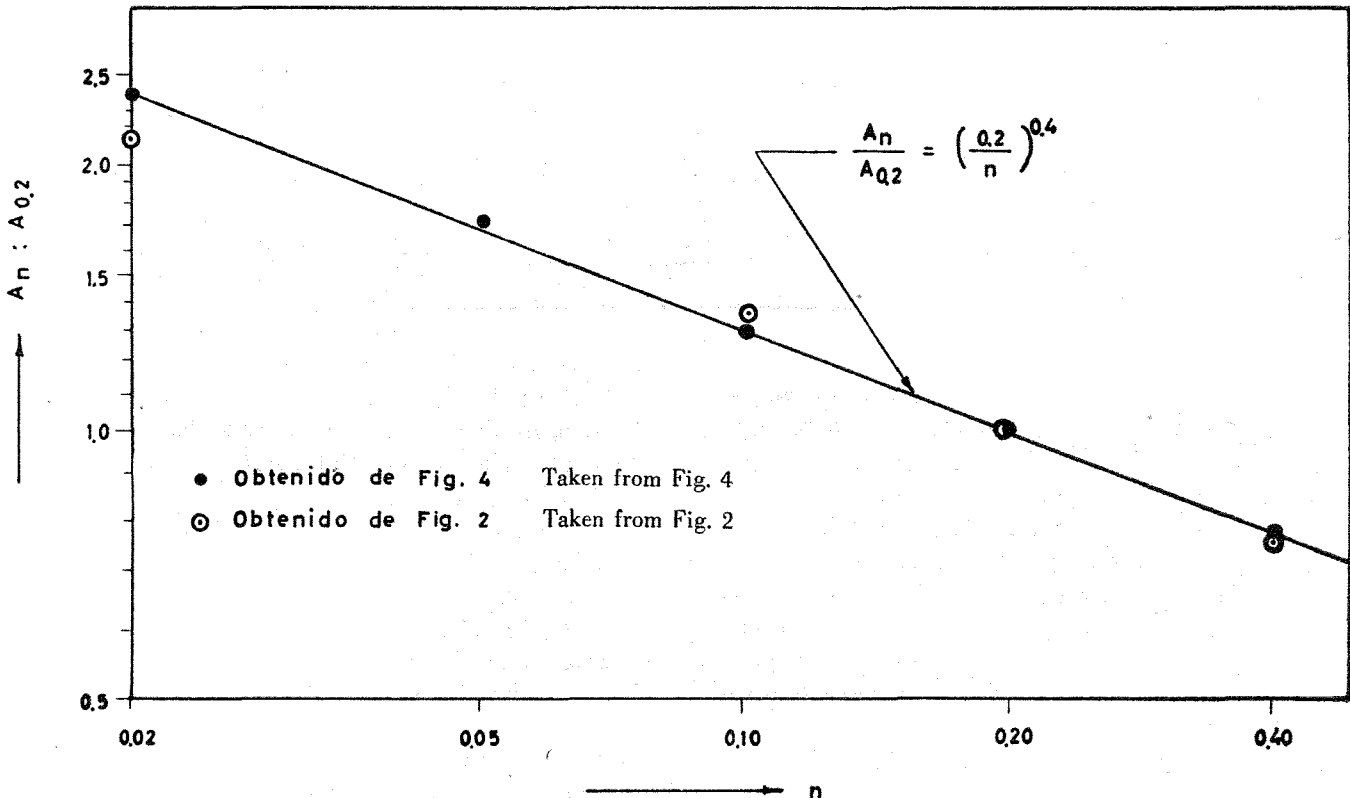


Fig. 5. Razón  $A_n : A_{0.2}$  expresada como función de  $n$ .

Fig. 5. Ratio of  $A_n : A_{0.2}$  expressed as a function of  $n$ .

Bycroft (1960) ha estudiado la respuesta de un oscilador lineal simple sometido a trenes de pulsos de aceleración de 25 segundos de duración total y de una densidad espectral de energía constante e igual, para todos los trenes de pulsos, a la que corresponde a uno de los terremotos de El Centro, California (1940). Calculó los espectros medios de respuesta de máxima velocidad para amortiguamiento del oscilador iguales a 5, 10 y 20 por ciento del amortiguamiento crítico.

Bycroft (1960) has studied the response of a simple linear oscillator subjected to trains of acceleration pulses of 25 seconds of duration and constant spectral energy density, equal for all trains of pulses to the mean energy density observed in one of the earthquakes at El Centro, California (1940). He has calculated the mean maximum velocity response spectra for degrees of damping equal to 5, 10 and 20 per cent of critical damping.

Si se calculan las razones entre las ordenadas correspondientes a un mismo período, para períodos comprendidos entre 0.2 y 2.4 segs. entre los espectros de Bycroft correspondientes a  $n = 0.05$  y  $n = 0.10$  y se repite el cálculo para el par de espectros con  $n = 0.10$  y  $n = 0.20$ , se encuentran valores que oscilan entre 1.25 y 1.46, con un promedio de 1.315 y una desviación típica de 0.050 (Tabla I). Si se acepta la ley expresada en la fórmula (2), el valor de la razón calculado a partir de ella es  $2^{0.4} = 1.320$ .

If the ratios between the ordinates corresponding to the same period are calculated, for periods ranging from 0.2 secs to 2.4 secs among the spectra of Bycroft for  $n = 0.05$  and  $n = 0.10$  and the calculations repeated with spectra for  $n = 0.10$  and  $n = 0.20$ , one finds that these ratios oscillate between 1.25 and 1.46, with a mean equal to 1.315 and standard deviation 0.050 (see Table I). If one accepts the law of equation (2) one obtains for this ratio the value  $2^{0.4} = 1.320$ .

TABLA I

TABLE I

Razón entre las ordenadas de los espectros de respuesta de máxima velocidad obtenidos por Bycroft para diferentes grados de amortiguamiento.

Ratio between ordinates of maximum velocity response spectra obtained by Bycroft for different degrees of damping.

$T$ , seg. sec.	$\overline{(S_v)}_{0.05} : \overline{(S_v)}_{0.10}$	$\overline{(S_v)}_{0.10} : \overline{(S_v)}_{0.20}$
0,2	1,36	1,46
0,4	1,34	1,39
0,6	1,32	1,36
0,8	1,31	1,35
1,0	1,31	1,34
1,2	1,29	1,34
1,4	1,28	1,33
1,6	1,26	1,31
1,8	1,25	1,31
2,0	1,25	1,30
2,2	1,25	1,30
2,4	1,25	1,30

Los resultados obtenidos por Bycroft (1960) en el análisis de una estructura de cinco grados de libertad sometida a los pulsos de aceleración ya descritos, permiten esperar que la ecuación (2) sea también aplicable sin grave error a estructuras de varios grados de libertad. Esta afirmación debe tomarse con algunas reservas, pues Bycroft trabajó en este caso sólo con dos grados de amortiguamiento (0.10 y 0.20) y ha supuesto los amortiguamientos iguales para todos los modos.

Por consideraciones teóricas, que consisten en suponer que el temblor está formado por un gran número de pulsos de aceleración distribuidos al azar en el tiempo y también en cuanto a signo y magnitud, Hudson (1956) ha obtenido una expresión para el espectro medio de respuesta de velocidad máxima. Con la anotación usada en este trabajo, la expresión puede ser:

The results obtained by Bycroft (1960) for a five-degree of freedom structure subjected to the trains of acceleration pulses already described, allow to expect that equation (2) is valid without serious error for structures with several degrees of freedom. This assertion should be taken with some care, because Bycroft worked in this case with only two damping ratios (0.10 and 0.20) and has accepted that the damping ratios are the same for all modes.

From theoretical considerations that consist in assuming that an earthquake is made up of a great number of acceleration pulses distributed at random in time as well as in sign and magnitude, Hudson (1956) has obtained an expression for the mean maximum velocity response spectrum. With the notation used in the present paper this expression reads:

$$\overline{(S_v)}_n = \sqrt{\frac{PT}{2m\pi n} \left(1 - e^{-\frac{4\pi n t_0}{T}}\right)} \quad (3)$$

en que  $\overline{(S_v)}_n$  es el espectro medio de respuesta de máxima velocidad para un grado de amortiguamiento igual a  $n$ ;  $P$  es la densidad espectral de energía del tren de pulsos por unidad de tiempo que se supone constante;  $T$  y  $m$  el período natural y la masa del oscilador y  $t_0$  la duración del tren de pulsos.

Si se supone que  $t_0$  es grande frente a  $T$ , la exponencial que figura bajo la raíz se puede despreciar y se obtiene simplemente

in which  $\overline{(S_v)}_n$  is the mean response spectrum of maximum velocity for one degree of damping equal to  $n$ ;  $P$  is the spectral energy density per time unit of the pulse trains, assumed to be constant;  $T$  and  $m$  are the natural period and the mass of the oscillator, and  $t_0$  is the duration of the pulse trains.

If it is assumed that  $t_0$  is big compared with  $T$ , the exponential under the radical sign may be overlooked and one obtains the simpler formula:

$$\overline{(S_v)}_n = \sqrt{\frac{PT}{2m\pi n}} \quad (4)$$

Luego

Hence

$$\frac{\overline{(S_v)_n}}{\overline{(S_v)_{n^1}}} = \sqrt{\frac{n^1}{n}} \quad (5)$$

Este resultado se puede extender a estructuras de varios grados de libertad cuyos modos de vibrar sean ortogonales. Bycroft (1960) ha hecho la extensión para el caso de una viga empotrada en un extremo y libre en el otro, cuya masa está distribuida uniformemente y cuya rigidez varía linealmente con la distancia al extremo. Pero, esta generalización depende solamente de la existencia de modos de vibrar ortogonales de frecuencias diferentes y de que el temblor sea representable por un tren de pulsos de aceleración que constituyan un proceso aleatorio estacionario conocido como "ruido blanco". Con estas hipótesis la conclusión se puede extender inmediatamente a estructuras lineales de un número cualquiera de grados de libertad con características de rigidez y distribución de masas arbitrarias. Para que los modos sean ortogonales, el amortiguamiento debe ser de tipo especial. Aunque así no fuera, la conclusión es válida sin grave error para grados de amortiguamiento relativamente pequeños, siempre que las frecuencias de los modos sean distintas y valgan las hipótesis hechas respecto de la naturaleza del temblor.

En la Tabla I puede observarse que la razón entre las ordenadas de los espectros obtenidos por Bycroft es mayor para los períodos cortos que para los períodos largos, y que para los períodos cortos se acerca al valor teórico, que es  $\sqrt{2}$ . La explicación puede residir en que para períodos cortos, la duración del tren de pulsos de aceleración es del orden de 100 veces el período natural del oscilador y existe la posibilidad de poder aceptar la hipótesis de que el tren de pulsos puede considerarse como un proceso estacionario; en cambio, para períodos largos, la duración del tren de pulsos es del orden de 10 veces el período propio del oscilador, resultando inaceptable la hipótesis de un proceso estacionario.

De la ecuación (3) se deduce que para un mismo temblor la relación entre los espectros de velocidad para dos grados de amortiguamiento  $n$  y  $n^1$  es

$$\frac{\overline{(S_v)_n}}{\overline{(S_v)_{n^1}}} = \sqrt{\frac{n^1}{n}} \sqrt{\frac{1 - e^{-\frac{4\pi n t_0}{T}}}{1 - e^{-\frac{4\pi n^1 t_0}{T}}}} \quad (6)$$

Si  $n^1 > n$ , la segunda raíz cuadrada es menor que la unidad y por lo tanto, la razón  $\overline{(S_v)_n} : \overline{(S_v)_{n^1}}$  es aproximadamente proporcional a  $n^1 : n$  elevado a un exponente menor que 0,5. Lo que reconciliaría el resultado teórico con la observación experimental.

De la definición de  $P$  se sigue inmediatamente que

$$P = \frac{m}{2t_0} \overline{(S_v)_n}^2 \quad (7)$$

This result may be extended to structures with several degrees of freedom whose principal modes are orthogonal. This extension has been done by Bycroft (1960) for the case of a shear beam built in at the lower end and free at the top, with uniformly distributed mass, and stiffness varying linearly from one end to the other. But the possibility of this generalization depends only on the existence of orthogonal principal modes of different frequencies, and that the earthquake may be represented as a train of acceleration pulses forming a stationary random process known as "white noise". With these hypothesis, the conclusion may be extended immediately to linear structures of any number of degrees of freedom with arbitrary distribution of mass and shear stiffness. In order that the modes be orthogonal, viscous damping should be of a special type. Anyhow, the conclusion is valid without serious error for relatively low damping, assuming that the frequencies of the modes are different and that the hypothesis concerning the nature of the earthquake are valid.

From Table I it can be seen that the ratios between the ordinates of the spectra obtained by Bycroft are greater for the shorter periods than for the longer ones, and that for short periods they approach the theoretical value,  $\sqrt{2}$ . The explanation may be that for short periods the duration of the pulse trains is of the order of 100 times the natural period of the oscillator, and the hypothesis that the pulse trains may be considered as stationary random processes may be accepted; on the other hand, for long periods, the duration of the pulse train is of the order of 10 times the natural period of the oscillator, and the hypothesis of a stationary process seems untenable.

From equation (3) it follows that for a given earthquake the ratio between the velocity response spectra for two different damping ratios,  $n$  and  $n^1$ , is

If  $n^1 > n$ , the second square root is less than unity, and the ratio  $\overline{(S_v)_n} : \overline{(S_v)_{n^1}}$  is approximately proportional to  $n^1 : n$  raised to a power whose exponent is less than 0,5. This would reconcile the theoretical result with observed facts.

From the definition of  $P$  it follows immediately that

en que  $(S_v)_0$  es el valor medio del espectro de velocidad para amortiguamiento nulo. Combinando las ecuaciones (3) y (7) resulta:

in which  $(S_v)_n$  is the mean maximum velocity response spectrum ordinate for zero damping. From equations (3) and (7) it follows that

$$\frac{(S_v)_0}{(S_v)_n} = \sqrt{\frac{1 - e^{-\frac{4\pi n t_0}{T}}}{1 - e^{-\frac{4\pi n t_0}{T}}}} \quad (8)$$

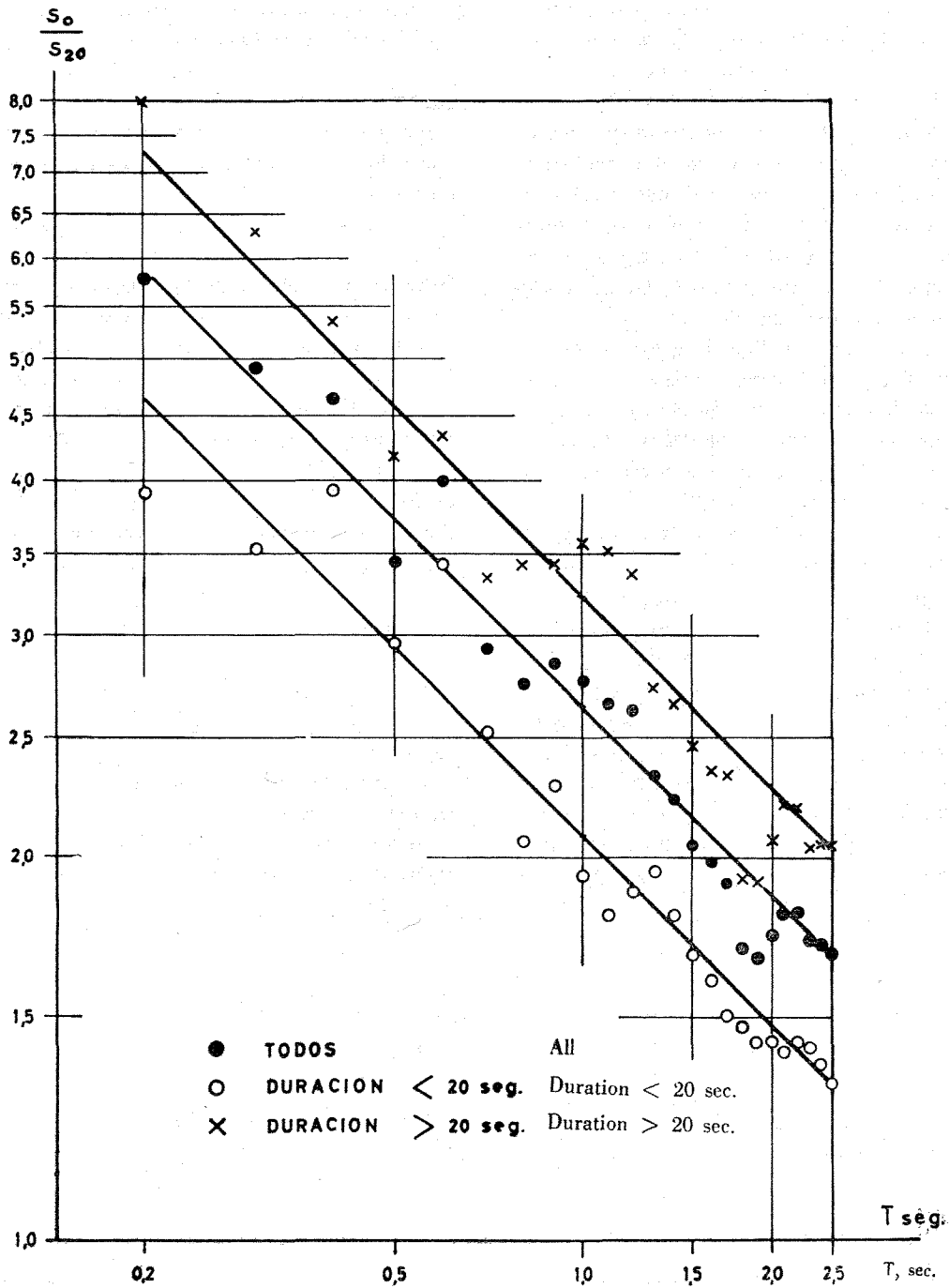


Fig. 6. Razón  $(S_v)_0 : (S_v)_{0.2}$  en función del periodo T.

Fig. 6. Ratio of  $(S_v)_0 : (S_v)_{0.2}$  as a function of period T.



Para valores de  $t_0$ ,  $n$  y  $T$ , como los que se dan en la práctica, puede simplificarse despreciando la exponencial, en la forma siguiente:

$$\frac{(S_v)_0}{(S_v)_n} = \frac{2 \sqrt{\pi n t_0}}{\sqrt{T}}$$

Es decir, la razón entre las ordenadas de los espectros para amortiguamiento nulo y para un amortiguamiento distinto de cero varía inversamente con la raíz cuadrada del período propio del oscilador.

Se ha verificado esta relación, como se puede observar en la Fig. 6 en que se ha dibujado la razón  $(S_v)_0 : (S_v)_{0,20}$  en función del período  $T$ . Cada punto representa un promedio calculado a base de todos los espectros de Alford, Housner y Martel (1951). Como puede apreciarse, la concordancia entre la teoría y los valores observados es satisfactoria.

En los espectros de la misma figura se han dibujado en dos grupos los puntos correspondientes a los promedios del acelerograma según sean menores o mayores a 20 segundos. Los valores medios para ambos grupos se han calculado y representado como cruces y símbolos en la Fig. 6.

Se puede apreciar que los puntos obtenidos caen sobre rectas que tienen la misma inclinación que la recta correspondiente a todos los espectros. Se deduce que la proporcionalidad entre  $(S_v)_0 : (S_v)_{0,2}$  y  $\frac{1}{\sqrt{T}}$  se mantiene para cada uno de ambos grupos, pero el factor de proporcionalidad es diferente para cada uno de ellos.

For the values of  $t_0$ ,  $n$  and  $T$  found in practice the last equation may be simplified by disregarding the exponential term, obtaining

Accordingly, the ratio between the ordinates of the spectra for zero damping and for a damping ratio different from zero, varies inversely as the square root of the natural period of the oscillator.

This relation has been verified in Fig. 6 in which the ratio  $(S_v)_0 : (S_v)_{0,20}$  is given as a function of the period  $T$ . Each dot represents a mean value obtained from all spectra of Alford, Housner and Martel (1951). As it can be seen, the agreement between theory and observation is satisfactory.

The spectra of the same figure have been classified in two groups according whether the duration of the corresponding accelerogram is shorter or longer than 20 seconds. The mean values for these two groups have been computed and represented as crosses and circles in Fig. 6.

It can be seen that these points fall satisfactorily well in two lines with the same slope as the line for all spectra. It follows that proportionality between  $(S_v)_0 : (S_v)_{0,20}$  and  $\frac{1}{\sqrt{T}}$  holds also for each one of the two groups, but the factor of proportionality is different for each one of them.

#### ABREVIATURAS

$n, n^1$	: grado de amortiguamiento o razón entre coeficiente de amortiguamiento y amortiguamiento crítico.
$A_n$	: ordenada del espectro de máxima respuesta para el grado de amortiguamiento $n$ ;
$A_{0,2}$	: ordenada del espectro de máxima respuesta para el grado de amortiguamiento 0,2;
$A_n : A_{0,2}$	: razón entre $A_n$ y $A_{0,2}$ calculada para un mismo valor arbitrario de $T$ ;
$T$	: período natural del oscilador no amortiguado.
$(S_v)_n$	: valor medio de la ordenada del espectro de respuesta de máxima velocidad, para un valor dado de $T$ y un grado de amortiguamiento igual a $n$ .

#### ABBREVIATIONS

$n, n^1$	: degree of damping or ratio between damping ratio and critical damping;
$A_n$	: ordinate of maximum response spectrum for degree of damping $n$ ;
$A_{0,2}$	: ordinate of maximum response spectrum for degree of damping 0,2;
$A_n : A_{0,2}$	: ratio between $A_n$ and $A_{0,2}$ computed for the same arbitrary value of $T$ ;
$T$	: natural period of non-damping oscillator.
$(S_v)_n$	: mean value of ordinate of maximum velocity response spectrum, for a given value of $T$ and a degree of damping $n$ .

## BIBLIOGRAFIA

## BIBLIOGRAPHY

- ALFORD, J. L., G. W. HOUSNER & R. R. MARTEL. 1951. Spectrum Analyses of Strong Motion Earthquakes, *California Institute of Technology, Earthquake Research Laboratory*.
- BYCROFT, G. N. 1960. Effect of stiffness taper in aseismic design, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 50:537-552.
- HOUSNER, G. W. 1959. Behaviour of Structures during Earthquakes, *Journal of Engineering, Mechanics Division, ASCE*, 85 (EM 4):109-129.
- HUDSON, D. E. 1956. Response Spectrum Technique in Engineering Seismology, *Proceedings of the World Conference on Earthquake Engineering, Berkeley, California, 1956*, pp.
- KAWASUMI, H. & K. KANAI. 1956. Small Amplitude Vibration of Actual Buildings, *Proceedings of the World Conference on Earthquake Engineering, Berkeley, California, 1956*, pp.