

# III CONFERENCIA TÉCNICA SOBRE HURACANES Y METEOROLOGÍA TROPICAL TECHNICAL CONFERENCE ON HURRICANES AND TROPICAL METEOROLOGY

México, D. F., Jun. 6-12, 1963.

1A. SESIÓN

1ST. SESSION

## CONFIGURACIONES A GRAN ESCALA DEL FLUJO EN LOS TRÓPICOS LARGE-SCALE FLOW PATTERNS IN THE TROPICS

### *UN MODELO DINAMICO PARA INVESTIGAR LOS EFECTOS DE FUENTES DE CALOR PERIO- DICO SOBRE LA ESTRATOSFERA ECUATORIAL*

LOUIS BERKOFKY \* y RALPH SHAPIRO \*

### *A DYNAMICAL MODEL FOR INVESTIGATING THE EFFECTS OF PERIODIC HEAT SOURCES ON THE EQUATORIAL STRATOSPHERE*

LOUIS BERKOFKY \* and RALPH SHAPIRO \*

#### RESUMEN

Se ha observado un ciclo de 26 meses en la componente E-W del viento a unos 25 mb en las regiones ecuatoriales y se ha construido un modelo teórico para investigar si la existencia de fuentes de calor periódico en la atmósfera podría producir movimientos del período y amplitud observados.

#### INTRODUCCION

Recientemente Reed y otros (1962) han observado una periodicidad en la componente E-W del viento en la estratósfera ecuatorial. El período de oscilación parece ser de unos veintiséis meses y tener su máxima amplitud cerca del ecuador, haciéndose mayor de 25 m/seg a 25 mb. Por debajo de 25 mb disminuye la amplitud y desaparece la oscilación en la vecindad de la tropopausa. En dirección al polo la oscilación todavía es débilmente perceptible a 30° N. La fase varía con la altura, apareciendo primero cada banda de vientos del este o del oeste a los más altos niveles observados (cerca de 30 Km) y progresando hacia abajo a una velocidad algo mayor de 1 Km/mes.

Para permitir la construcción de un modelo teórico e investigar tales observaciones, proponemos el siguiente problema: supóngase que tenemos una atmósfera cuya circulación a niveles altos es independiente de la coordenada  $x$ , es decir, cuyos cambios únicos se hacen en los planos  $(\gamma, p)$ ; inyectemos algunas fuentes de calor periódico en dichos niveles altos para inducir movimientos verticales por calentamiento y producir divergencias a gran escala. ¿Cuál será la naturaleza del forzado movimiento vertical debido a ese calentamiento y cuál será su efecto sobre el viento a niveles altos?

\* Laboratorios Cambridge de Investigación de la Fuerza Aérea.

#### ABSTRACT

A 26-month cycle in the E-W component of the wind at about 25 mb has been observed in the equatorial regions. A theoretical model has been devised to investigate whether the existence of periodic heat sources in the atmosphere could produce motions of the observed period and amplitude.

#### INTRODUCTION

Recently, Reed and others (1962) have observed a periodicity in the E-W component of the wind in the equatorial stratosphere. The period of the oscillation appears to be about twenty-six months and its amplitude is greatest near the equator, becoming greater than 25 m/sec at 25 mb. Below 25 mb, the amplitude decreases, and the oscillation fades away in the vicinity of the tropopause. In the poleward direction the oscillation is still faintly detectable at 30° N. The phase varies with height, each band of easterly or westerly winds appearing first at the highest levels observed (about 30 Km) and progressing downward at a speed slightly greater than 1 Km/month.

In order to construct a theoretical model for investigation of these observations, we pose the following problem: suppose we have an atmosphere in which the flow at high levels is independent of the  $x$ -coordinate, i. e., the only changes are in  $(\gamma, p)$  planes. We inject certain periodic heat sources at these high levels. Thus vertical motions will be induced by the heating, and large-scale divergences will take place. What will be the nature of the forced vertical motion due to this heating, and what will be its effect on the wind at high levels?

\* Air Force Cambridge Research Laboratories.

## EL MODELO

Dividamos la atmósfera en una estratósfera (0-100 mbs) y una tropósfera (100-1000 mbs). La capa inferior sólo existe para producir condiciones de frontera inferior para los cálculos de movimientos en la capa superior. La capa superior se divide en tres capas: 0-2 mb, 2-4 mb, 40-100 mb.

Las ecuaciones de movimiento, la ecuación hidrostática según la primera ley de la termodinámica y la ecuación de continuidad para las capas superiores son

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (uv)_i + \frac{\partial}{\partial p} (u\omega)_i - f v_i = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (v\omega)_i + \frac{\partial}{\partial p} (v\omega)_i + f u_i = -\frac{\partial \phi_i}{\partial \gamma} \quad (2)$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial p} \right)_i = -\frac{R}{p} \left( \frac{p}{p_0} \right)^k \theta_i \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (v\theta)_i + \frac{\partial}{\partial p} (\omega\theta)_i = Q_i \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \gamma} = - \left( \frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_i \quad (5)$$

$$\omega = 0 \text{ at } p = 0, \quad \omega = \omega_T \text{ at } p = p_T \quad (6)$$

$i = (1), (3), (5)$ . Dichos índices representan valores de presión media en cada capa, es decir,  $p_1 = 1$  mb,  $p_3 = 21$  mb,  $p_5 = 70$  mb. Las soluciones se obtendrán con dichas presiones (ver Fig. 1). Todos los símbolos usados en las ecuaciones (1) - (5) son standard.

$i = (1), (3), (5)$ . These indices represent values at the midpressure of each layer, i. e.,  $p_1 = 1$  mb,  $p_3 = 21$  mb,  $p_5 = 70$  mb. Solutions will be obtained at these pressures (see Fig. 1). All symbols used in equations (1) - (5) are standard.

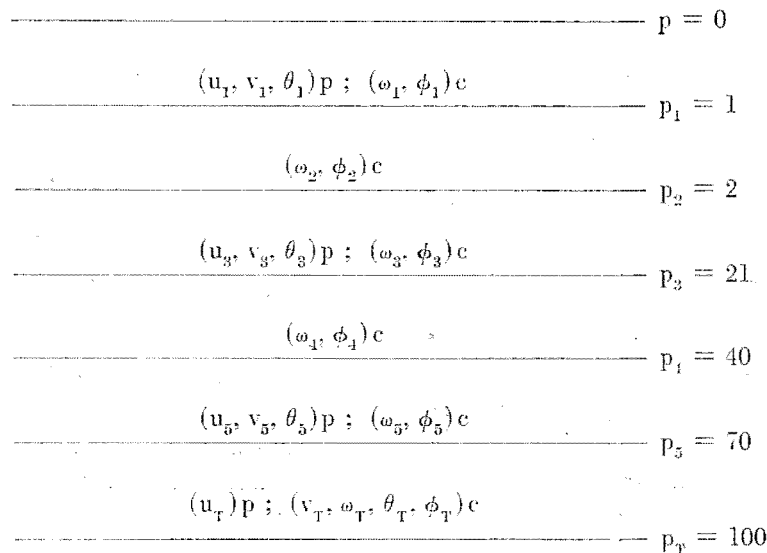


Fig. 1.

Si suponemos que los valores iniciales de  $u, v, \theta, \phi, Q$  son conocidos, podemos resolver las formas de diferencia finita de (1) - (5). Lo haremos así integrando (5) para obtener  $\omega$  a varios niveles y luego calculando tendencias de  $u, v, \theta$ . Si adelantamos el tiempo para obtener nuevos campos para estas cantidades, lograremos el geopotencial  $\phi$  con el nuevo tiempo al integrar la ecuación hidrostática hacia arriba a partir de  $p = p_T = 100$  mb, la presión de la tropopausa. Así, la ecuación hidrostática integrada toma esta forma

$$\phi_j = \phi_{j+1} - \frac{R}{K} \frac{(\theta_{j+1} + \theta_j)}{2} \left[ \left( \frac{p_j}{p_0} \right)^K - \left( \frac{p_{j+1}}{p_0} \right)^K \right] \quad (7)$$

$$j = 1, 2, 3, 4, 5, T \quad (5 + 1 = T)$$

Donde  $j$  es uniforme, usándose la siguiente fórmula de interpolación para todas las variables

$$u_j, v_j, \theta_j = \left( \frac{p_j - p_{j+1}}{p_{j-1} - p_{j+1}} \right) u_{j-1}, v_{j-1}, \theta_{j-1} + \left( \frac{p_{j-1} - p_j}{p_{j-1} - p_{j+1}} \right) u_{j+1}, v_{j+1}, \theta_{j+1} \quad (8)$$

Esta es una medida ponderada para explicar el desigual espesor a cada lado de los niveles uniformes.

Así, si conocemos la variación de  $Q$  en el espacio y en el tiempo (lo cual se especificará) y si conocemos los valores iniciales de las variables podemos predecir futuros desarrollos. Para hacerlo así todo dependerá del conocimiento de las condiciones de frontera  $u_T, v_T, \theta_T, \omega_T, \phi_T$  en  $p = p_T$ .

Los valores de cantidades en  $p = p_T$  pueden obtenerse resolviendo las ecuaciones maestras para el nivel inferior, al cual tratamos de la siguiente manera suponiendo que la estabilidad estática

$$\sigma(p) = \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{KT}{p} = \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \quad (9)$$

es solamente una función de la presión. Consideremos la primera ley de la termodinámica en la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \sigma \omega = Q \quad (10)$$

Si diferenciamos (10) con respecto a  $p$ , al multiplicar (10) por  $-\frac{K}{p}$  y agregar los resultados usando (9), encontramos

$$\frac{\partial}{\partial p} (p^{-K} \sigma \omega) = \frac{\partial}{\partial p} (p^{-K} Q) - \frac{\partial}{\partial p} (p^{-K} v \frac{\partial T}{\partial y}) \quad (11)$$

Integrando (11) entre  $p_0$  y  $p$ , y suponiendo

$$\omega_{p_0} = 0 \quad \text{en} \quad p = p_0 \quad (12)$$

If we assume that initial values of  $u, v, \theta, \phi, Q$  are known, we may solve the finite-difference forms of (1) - (5). We do so by integrating (5) to obtain  $\omega$  at various levels, then computing tendencies of  $u, v, \theta$ . We step these forward in time to obtain new fields of these quantities. To obtain the geopotential  $\phi$ , at the new time, we integrate the hydrostatic equation upwards, starting from  $p = p_T = 100$  mb, the tropopause pressure. The integrated hydrostatic equation then takes the form

When  $j$  is even, the following interpolation formula is used for all variables:

This is a weighted mean to take account of the unequal thicknesses on either side of even levels.

Thus, if we know the variation of  $Q$  with space and time (this will be specified), and if we know initial values of the variables, we may predict future developments. The ability to do so will depend upon a knowledge of the boundary conditions  $u_T, v_T, \theta_T, \omega_T, \phi_T$  at  $p = p_T$ .

The values of quantities at  $p = p_T$  may be obtained by solving the governing equations for the lower layer. We treat the lower layer in the following way. We assume that the static stability

is a function of pressure only. We consider the first law of thermodynamics in the form

If we differentiate (10) with respect to  $p$ , multiply (10) by  $-\frac{K}{p}$ , add the results, make use of (9), we find

We integrate (11) between  $p_0$  and  $p$ , and assume

Entonces

Then

$$\omega = \frac{1}{\sigma} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\kappa} \frac{\partial T_{p_0}}{\partial \gamma} (v_{p_0} - v) + Q - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\kappa} Q_{p_0} \right] \quad (13)$$

Al suponer que no se produce calentamiento en el interior del fluido entre 100 y 1000 mb resulta que  $Q = 0$ ,  $Q_{p_0} = 0$ . Además supongamos que la temperatura superficial  $T_{p_0}$  no cambia con el tiempo en regiones tropicales, es decir,

$$T_{p_0} = T_{p_0}(\gamma) \quad (14)$$

Entonces la primera ley de la termodinámica en  $p = p_0$  esThen the first law thermodynamics at  $p = p_0$  is

$$v_{p_0} \frac{dT_{p_0}}{d\gamma} = 0 ; \quad (15)$$

ya que  $\frac{dT_{p_0}}{d\gamma} \neq 0$ , de lo cualsince  $\frac{dT_{p_0}}{d\gamma} \neq 0$ , it follows that

$$v_{p_0} = 0 \quad (16)$$

Consecuentemente, (13) se convierte en

Therefore (13) becomes

$$\omega = -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\kappa} v \frac{dT_{p_0}}{d\gamma} \quad (17)$$

como la ecuación para calcular el movimiento vertical en la capa inferior. Así, en  $p = p_T$ ,as the equation for computing the vertical motion in the lower layer. Thus, at  $p = p_T$ ,

$$\omega_T = -\frac{1}{\sigma_T} \left( \frac{p_T}{p_0} \right)^{\kappa} v_T \frac{dT_{p_0}}{d\gamma} \quad (18)$$

Vemos en (18) que el movimiento en la interfase se expresa en términos de la circulación meridional a ese nivel. Para determinar dicha cantidad usamos la ecuación integrada de continuidad para la capa superior, es decir,

We see from (18) that the vertical motion at the interface is given in terms of the meridional flow at that level. To determine this quantity, we make use of the integrated equation of continuity for the upper layer, i. e.,

$$\omega_T = -p_2 \frac{\partial v_1}{\partial \gamma} + (p_2 - p_4) \frac{\partial v_3}{\partial \gamma} + (p_4 - p_T) \frac{\partial v_5}{\partial \gamma} \quad (19)$$

La ecuación integrada de continuidad para la atmósfera total no dará divergencia media de cero a menos que ambos  $\omega_T$ 's sean iguales entre sí. Luego, igualando (18) y (19) encontramos

The integrated equation of continuity for the entire atmosphere will not yield zero mean divergence unless the two  $\omega_T$ 's are equal to each other. Thus, equating (18) and (19), we find

$$v_T = -\frac{\left( \frac{p_0}{p_T} \right)^{\kappa}}{\frac{dT_{p_0}}{d\gamma}} \left[ -p_2 \frac{\partial v_1}{\partial \gamma} + (p_2 - p_4) \frac{\partial v_3}{\partial \gamma} + (p_4 - p_T) \frac{\partial v_5}{\partial \gamma} \right] \quad (20)$$

Para encontrar  $u_T$  usamos la ecuación de vorticidad en su forma baroclínica energéticamente consistente

To obtain  $u_T$ , we use the vorticity equation in its simplest energetically-consistent baroclinic form,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\eta v) = 0 \tag{21}$$

Definamos la componente u en la capa inferior como no-divergente

We define the u component in the lower layer to be non-divergent,

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \tag{22}$$

en tanto que la componente v es divergente y ageostrófica y podría expresarse como

while the v component is divergent, ageostrophic, and might be thought of as

$$v = \frac{\partial x}{\partial \gamma} \tag{23}$$

La ecuación de vorticidad puede escribirse

The vorticity equation may be written

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} + f \right) v \right] = 0 \tag{24}$$

En  $p = p_T$

At  $p = p_T$ ,

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial \psi_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi_T}{\partial \gamma^2} + f \right) v_T \right] = 0 \tag{25}$$

Si tomamos  $\psi_T$  inicialmente (lo cual se sabe ya que  $u_T$  se conoce) entonces con  $v_T$  según (20) podemos resolver (25) para nuevos valores de  $\psi_T$  y dar nuevos valores para  $u_T$ .

If we know  $\psi_T$  initially (and this is known since  $u_T$  is known), then, with  $v_T$  from (20), we may solve (25) for new values of  $\psi_T$ , and hence new values of  $u_T$ .

En la capa inferior  $\theta_T(\gamma)$  y  $\phi_T(\gamma)$  no cambian con el tiempo y se expresan en

In the lower layer,  $\theta_T(\gamma)$ ,  $\phi_T(\gamma)$  do not change with time, and are given by

$$\theta_T(\gamma) = T_{p_0}(\gamma) + p_0^k \int_{p_0}^{p_T} p^{-k} \sigma(p) dp \tag{26}$$

$$\phi_T(\gamma) = \phi_{p_0}(\gamma) - \frac{R}{K} \left[ \left( \frac{p_T}{p_0} \right)^K - 1 \right] T_{p_0}(\gamma) - R \int_{p_0}^{p_T} \left( p^1 \int_{p_0}^{p^1} p^{-k} \sigma dp^1 \right) dp \tag{27}$$

Así vemos que ambas capas accionan entre sí a través de sus valores en la frontera.

Thus we see that the two layers interact with each other through their values at the boundary.

Como asunto de interés notamos que existe una ecuación para calcular la variación de v con p y  $\gamma$  en la capa inferior. Podemos obtener esta ecuación diferenciando (17) respecto a p y substituyendo en la ecuación de continuidad.

As a matter of interest, we note that an equation exists for calculating the variation of v with p and  $\gamma$  in the lower layer. We may obtain this equation by differentiating (17) with respect to p and substituting into the equation of continuity.

LA FUNCION DE CALENTAMIENTO

THE HEATING FUNCTION

Especificaremos la variación de la función de calentamiento en el espacio y el tiempo, definiendo tres funciones,  $Q_A$ ,  $Q_B$  y  $Q_{AR}$ .

We shall specify the variation of the heating function in space and time. We define three heating functions,  $Q_A$ ,  $Q_B$ ,  $Q_{AR}$ .

$Q_A$  es el calentamiento de la atmósfera por radiación de onda corta entrante y se debe principalmente a la absorción de ozono. La variación de temperatura con la presión debida a este calentamiento es tal que se tiene un máximo cerca de  $p = 1$  mb y termina a 0 en  $p = 100$  mb. Esta variación de

$Q_A$  is the heating of the atmosphere by incoming short-wave radiation and is due mainly to absorption by ozone. The variation of temperature with pressure due to this heating is such as to have a maximum at about  $p = 1$  mb, and to fall off to 0 at  $p = 100$  mb. This variation of tem-

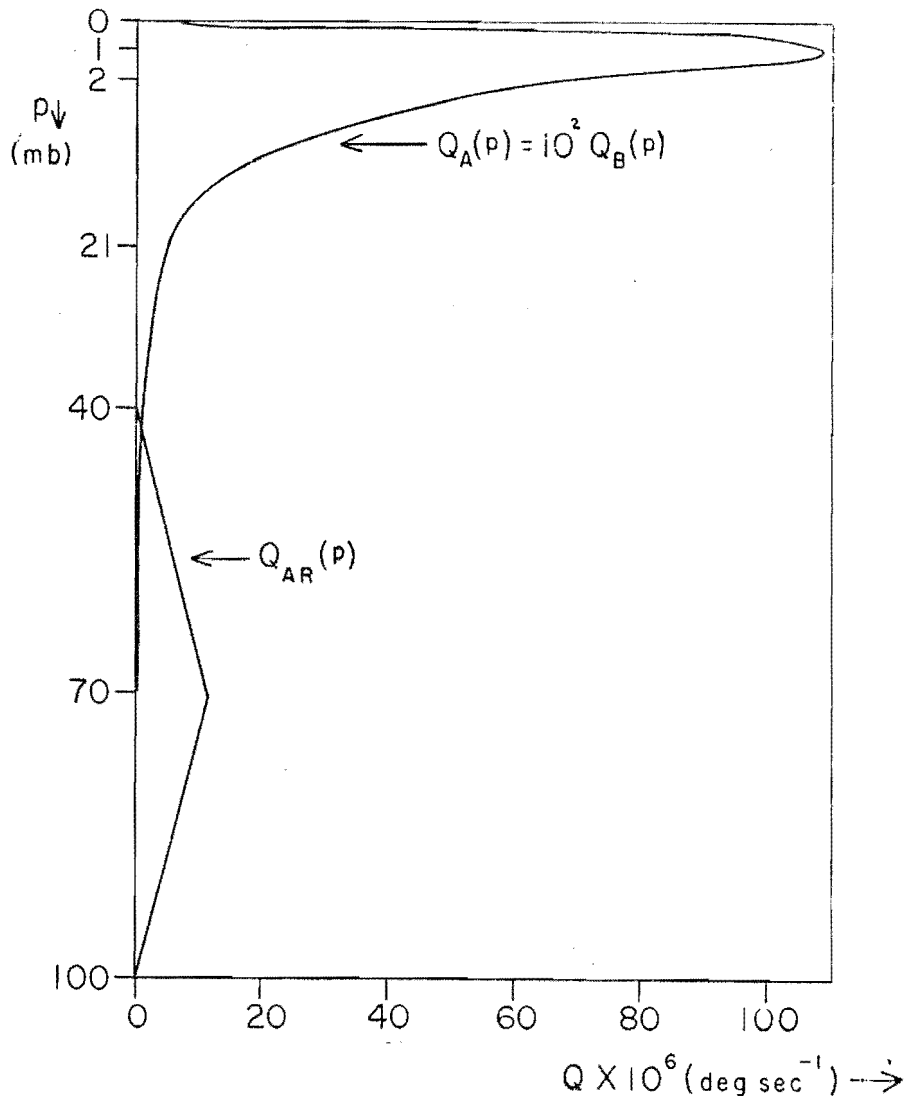


Fig. 2

temperatura cambia con la presión como se muestra en la Fig. 2 cuyos valores numéricos se tomaron de London (1957). La variación latitudinal es la ley del coseno uniforme

perature change with pressure is shown in Fig. 2, where the numerical values were taken from London (1957). The latitudinal variation is the standard cosine law,

$$Q_A(p_1, \phi_1, t) = Q_A(p) (\cos \theta x) \tag{28}$$

El ángulo \$\theta\$ en sí mismo es una función del tiempo y de la latitud y se expresa por

The angle \$\theta\$ is itself a function of time and latitude, and, is given by

$$\theta(\phi_1, t) = -22.5 \frac{u_1^s}{u_{35}^s} 2\pi t + \phi \tag{29}$$

donde \$\phi\$ es la latitud. Así, \$Q\_A\$ tiene variación anual. El ángulo de fase \$X\$ queda incluido para asegurar que el calentamiento medio sobre nuestra región de integración durante un ciclo completo es cero, ya que no incluimos la fricción en el modelo. Por ello, al escoger \$\phi = \pm 30^\circ\$ como las fronteras de nuestra región de integración

where \$\phi\$ is the latitude. Thus \$Q\_A\$ has an annual variation. The phase angle \$X\$ is included to insure that the average heating over our region of integration during a complete cycle is zero, since we do not include friction in the model. Thus, since we shall choose \$\phi = \pm 30^\circ\$ as the boundaries of our region of integration

$$x = \frac{3}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}} \int_0^1 \cos \theta(t_1, \phi) dt d\phi \tag{30}$$

$Q_{AR}$  es el calentamiento de la ozonósfera debido a radiación de onda larga ( $9.6 \mu$ ) desde la Tierra. Suponemos incremento lineal de la temperatura debido a ese efecto entre  $p = 100$  a  $p = 70$  mb y decremento lineal desde esa cifra hasta  $p = 40$  mb. La curva se muestra en la Fig. 2. Los valores se determinan según los cálculos de Ohring (1956) para el calentamiento en las 100 mb superiores de la atmósfera debido a ese efecto. También se supone que esta función tiene un período anual, pero como el calentamiento máximo en la superficie de la Tierra se retarda del calentamiento solar por cerca de tres meses, hemos introducido un cambio de fase de  $\frac{1}{4}$ . Así,

$$Q_{AR}(p_1, \phi_1, t) = Q_{AR}(p) (\cos \theta - x) \tag{31}$$

donde where

$$\theta(\phi_1, t) = -22.5 \frac{\text{sen}}{\sin} 2\pi \left(t - \frac{1}{4}\right) + \phi \tag{32}$$

siendo X igual que en (30).

La función  $Q_B$  es una supuesta función de calentamiento que tiene un ciclo de dos años y cuya variación con la presión es idéntica a  $Q_A$ . Sin embargo, se ha supuesto que su magnitud es solamente 1/100 de  $Q_A$ . Así

$$Q_B(p_1, \phi_1, t) = 10^{-2} Q_A(p) (\cos \theta - x) \tag{33}$$

$$\theta(\phi_1, t) = -22.5 \frac{\text{sen}}{\sin} \pi t + \phi \tag{34}$$

$$x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}} \int_0^2 \cos \theta(t_1, \phi) dt d\phi \tag{35}$$

DISCUSION

La función  $Q_B$  es desde luego la única menos conocida. Será uno de los objetivos de nuestros cálculos numéricos propuestos para investigar las varias formas de esta función de calentamiento y ver si las fluctuaciones de velocidad del viento de la magnitud observada podrían ser afectados por funciones de calentamiento similares a las que fueron supuestas anteriormente. En el curso de tales cálculos también obtendremos la variación de  $v$  y  $\theta$  con el tiempo. Ya existe alguna evidencia de la periodicidad de la temperatura y podremos comparar también nuestros cálculos numéricos con tales resultados.

BIBLIOGRAFIA

LONDON, J. 1957. A Study of the Atmospheric Heat Balance - Final Report, Contract No. AF19(122)-165, July.  
 OHRING, G., J. LONDON & I. RUFF. 1956. Radiative Properties of the Stratosphere - Final Report, Contract No. AF19(604)-1285, October.  
 REDD, R. J. & D. G. ROGERS. 1962. The Circulation of the Tropical Stratosphere in the Year 1954-1960, *Jour. Atmosph. Sci.*, 19(2):127-135.

$Q_{AR}$  is the ozonosphere heating due to long wave ( $9.6 \mu$ ) radiation from the Earth. We assume a linear increase of the temperature due to this effect from  $p = 100$  to  $p = 70$  mb, and a linear decrease from there to  $p = 40$  mb. The curve is shown in Fig. 2. The values are determined from computations given by Ohring (1956) for heating of the top 100 mb of the atmosphere due to this effect. This function is also assumed to have an annual period, but, since the maximum heating at the Earth's surface lags that of the solar heating by about three months, we have introduced a phase shift of  $\frac{1}{4}$ -cycle here. Thus

and X is the same as in (30).

The function  $Q_B$  is an assumed heating function, which has a two-year-cycle, and whose variation with pressure is the same as  $Q_A$ . However, it has been assumed that its magnitude is only 1/100 that of  $Q_A$ . Thus

DISCUSSION

The function  $Q_B$  is, of course, the one about which least is known. It will be one of the objects of our proposed numerical calculations to investigate various forms of this heating function to see whether fluctuations of wind velocity of the observed magnitude could be affected by heating functions similar to those assumed here. During the course of the calculations, we will also obtain the variation of  $v$  and  $\theta$  with time. There already appears to be some evidence of the periodicity of the temperature, and we will be able to compare our numerical calculations with such results as well.

BIBLIOGRAPHY