GEOFISICA INTERNACIONAL

REVISTA DE LA UNIÓN GEOFÍSICA MEXICANA, AUSPICIADA POR EL INSTITUTO DE GEOFÍSICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Director: Julián Adem — Subdirector: Manuel Maldonado-Koerdell

Vol. 4 — México, D. F. 1o. de Octubre de 1964 — Núm. 4

III CONFERENCIA TÉCNICA SOBRE HURACANES Y METEOROLOGÍA TROPICAL
TECHNICAL CONFERENCE ON HURRICANES AND TROPICAL METEOROLOGY

México, D. F., Jun. 6-12, 1963

5a. SESIÓN — 5th. SESSION

DESARROLLO DE HURACANES (I)
HURRICANE DEVELOPMENT (I)

UN PROBLEMA CLAVE EN EL MODELO NUMERICO DE CICLONES TROPICALES *

AKIRA KASAHARA * *

INTRODUCCION

Una dificultad en previos experimentos numéricos sobre desarrollo de ciclones tropicales, basados en ecuaciones hidrodinámicas de Navier-Stokes, es que el crecimiento de las convecciones a escala de cumulus en una atmósfera condicionalmente inestable es tan enorme que eventualmente obscurece movimientos a gran escala en el sistema (Kasahara, 1961; Syono, 1962). Es evidente que este crecimiento no se debe a una inestabilidad "computacional" que se deriva de una formulación incorrecta de ecuaciones diferenciales finitas, sino que resulta de una inestabilidad "física" causada por calor latente de condensación liberado en celdas convectivas. Los resultados del análisis de estabilidad linealizada indican que la escala de movimientos más preferente en una atmósfera condicionalmente inestable es del orden de varios kilómetros para magnitudes ordinarias del coeficiente de intercambio turbulento para momento y calor (Lilly, 1960; Kuo, 1960; Kasahara, 1962; Ogura y Charney, 1962).

* *Este trabajo es auspiciado por el Centro de Cálculo y Matemáticas Aplicadas, CEA, Instituto Courant de Ciencias Matemáticas, Universidad de Nueva York, bajo Contrato AT (30-1)-1480 con la Comisión de Energía Atómica de los EE. UU.*

* * *Centro de Cálculo y Matemáticas Aplicadas CEA, Instituto Courant de Ciencias Matemáticas, Universidad de Nueva York.*

A KEY PROBLEM IN THE NUMERICAL MODEL OF TROPICAL CYCLONES *

AKIRA KASAHARA * *

INTRODUCTION

A difficulty in previous numerical experiments on development of tropical cyclones based upon Navier-Stokes hydrodynamic equations is that the growth of cumulus-scale convections in a conditionally unstable atmosphere is so enormous that eventually it obscures large-scale motions in the system (Kasahara, 1961; Syono, 1962). It is evident that this growth is not due to a "computational" instability which arises from an incorrect formulation of finite difference equations, but is due to a "physical" instability caused by the released latent heat of condensation in the convective cells. The results of linearized stability analyses indicate the most preferred scale of motions in a conditionally unstable atmosphere is in the order of several kilometers for ordinary magnitudes of the eddy-exchange coefficient for momentum and heat (Lilly, 1960; Kuo, 1960; Kasahara, 1962; Ogura and Charney, 1962).

* *The work presented in this paper is supported by the AEC Computing and Applied Mathematics Center, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University under Contract AT (30-1)-1480 with the U. S. Atomic Energy Commission.*

* * *AEC Computing and Applied Mathematics Center, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.*

Ya que la fuente primaria de energía de ciclones tropicales es el calor latente de condensación liberado durante la ascensión de aire húmedo en tormentas, estos movimientos convectivos a menor escala deben ser partes integrantes de la circulación de la tormenta. Luego, las preguntas centrales son: (I) ¿Por qué un sistema convectivo a gran escala, tales como ciclones tropicales, se forma cuando el movimiento de la atmósfera es aparentemente más inestable para una escala menor?; (II) ¿Cómo puede uno examinar ambos movimientos, a escala mayor y menor en el modelo numérico de ciclones tropicales? [1]

FACTORES QUE CONTROLAN LAS CONVECCIONES A PEQUEÑA ESCALA

Es bien sabido que el crecimiento de convecciones a escala de cumulus en la atmósfera está regido por muchos procesos físicos. Además de las consideraciones usuales de procesos dinámicos, tales como arrastre y retardo del aire en la corriente ascendente, los procesos físicos de nubes pueden ser muy importantes para restringir el crecimiento de convecciones a pequeña escala. Por ejemplo, la intensidad de corrientes ascendentes en una tronada, se reduce enormemente por formación de corrientes descendentes asociadas con fuerte lluvia en las corrientes ascendentes.

El problema aquí, sin embargo, es expresar estos procesos físicos en términos de fórmulas matemáticas en el modelo de huracán.

Un encaramiento convencional es introducir procesos de intercambio "turbulento" no lineales para calor y momento (v. gr. Kuo, 1962; Kasahara, 1962). Sin embargo, la objeción a tal consideración parece estar en que la magnitud requerida de los coeficientes de intercambio turbulento es tan grande que la aplicación a este problema de la teoría de longitudes de mezcla ya no es justificable. Incidentalmente, existe un dilema similar en problemas astrogeofísicos. Spiegel (1962) trató de generalizar la teoría de longitudes de mezcla de convecciones turbulentas, para aliviar el requisito de longitudes de pequeñas mezclas de elementos de convección para introducir procesos de intercambio "turbulento".

USO DE LA APROXIMACION DE VIENTO GRADIENTE

Los movimientos de inercia-gravitacionales pueden crecer excesivamente con el calor latente liberado en una atmósfera condicionalmente inestable. Este crecimiento puede eliminarse si se quitan tales movimientos del sistema, lo que se logra al aplicar la aproximación de viento casi-gradiente a las ecuaciones de movimiento del sistema. Sin embargo, como Eliassen (1952 y 1959) hizo notar, tal formulación origina una dificultad matemática para resolver un problema de valores a la frontera de tipo mixto en que ambas regiones, elíptica e hiperbólica, aparecen en el dominio de integración. La elipticidad puede violarse en la región de convecciones húmedas.

[1] Ver la discusión de Charney en *Proceedings of the International Symposium Numerical Weather Prediction, Tokyo (Nov. 7-13), 1960*, pp. 401-403.

Since the primary energy source of tropical cyclones is the latent heat of condensation released during the ascent of moist air in the storms, these small-scale convective motions must be integral parts of the storm circulation. Thus, the central question are: (I) Why does a large-scale convective system such as tropical cyclones form when the motion of the atmosphere is apparently more unstable for a smaller scale?; (II) How can one deal with both small and large scale motions in the numerical model of tropical cyclones? [1]

CONTROLLING FACTORS ON SMALL-SCALE CONVECTIONS

It is well known that the growth of cumulus-scale convections in the atmosphere is subjected to the control of many physical processes. Besides usual considerations of dynamical processes such as entrainment and detrainment of air in the ascending current, cloud physical processes may be very important in restricting the growth of small-scale convections. For example, the intensity of updrafts in a thunderstorm is greatly reduced by the formation of downdrafts associated with heavy rainfall in the updrafts.

The problem here, however, is to express these physical processes in terms of mathematical formulations in the hurricane model.

One conventional approach is to introduce nonlinear "eddy" exchange processes for heat and momentum (e.g., Kuo, 1962; Kasahara, 1962). However, the objection to this approach seems to be that the required magnitude of the eddy exchange coefficients is so large that the application of the mixing-length theory to this problem is no longer justifiable. Incidentally, there is a similar dilemma in astrogeophysical problems. Spiegel (1962) made an attempt to generalize the mixing-length theory of turbulent convection to relax the requirement of small mixing length of convecting elements for introduction of "eddy" exchange processes.

THE USE OF GRADIENT WIND APPROXIMATION

Inertia-gravitational motions can grow excessively with the released latent heat in a conditionally unstable atmosphere. This growth may be eliminated by filtering out such motions from the system. This may be done by the application of quasi-gradient wind approximation to the equations of motion of the system. However, as pointed out by Eliassen (1952 and 1959), such a formulation gives rise to a mathematical difficulty of solving a boundary value problem of mixed type in which both elliptic and hyperbolic regions appear in the integration domain. The ellipticity condition may be violated in the region of moist convections.

[1] See the discussion by Charney in *Proceedings of the International Symposium Numerical Weather Prediction, Tokyo, (Nov. 7-13), 1960*, pp. 401-403.

Ooyama (1962) trató de vencer esta dificultad suponiendo que la cantidad de calor latente liberado está determinada por la convergencia de vapor de agua de la superficie de la capa límite.

UN ENCARAMIENTO ALTERNATIVO

Parece no haber duda de que la presencia de convecciones organizadas de tipo cumulonimbus en ciclones tropicales es bastante importante en cuanto se refiere a la dinámica de los huracanes. Pero, cuando mira uno a la configuración horizontal de *presiones* de un ciclón tropical, digamos, en el nivel meso-troposférico, difícilmente se nota la presencia de movimientos a pequeña escala. Esto contrasta con la situación encontrada en la circulación general troposférica de la atmósfera, en la cual se puede identificar fácilmente la presencia de "altas" y "bajas" en la configuración horizontal de presiones. En otras palabras, parece innecesario predecir o seguir los movimientos individuales de celdas convectivas en un ciclón tropical con el mismo grado de exactitud que el requerido para predecir los movimientos de altas y bajas en la circulación general de la atmósfera. Una analogía similar, aunque más fundamental en su naturaleza, puede encontrarse en la teoría cinética de los gases. En esa teoría, el gas se considera como un conjunto de partículas llamadas moléculas. Aunque a "simple" vista no se puede detectar la presencia de partículas individuales, sin embargo, el comportamiento macroscópico de gases se explica sobre la base de supuestos referentes a la naturaleza de las moléculas que componen el gas.

Riehl y Malkus (1961) encontraron en el Huracán Daisy, 1958, que casi toda la masa que alcanza grandes alturas en el núcleo, sube rápidamente en torres convectivas de cumulus sin diluir, limitadas en número más que por una uniforme y gradual "circulación en masa". Estimaron que el número de estas "torres calientes", dentro de un área de radio de 200 millas náuticas, es del orden de 100 a 200. Si se supone la escala de un elemento convectivo individual de 4 Km de diámetro, se verá que estas torres ocupan solamente $0.3 \sim 0.6\%$ del área (ver también Malkus, Ronne y Chaffee, 1961).

Describamos el agregado o población de elementos convectivos $F(r,\lambda,t)\ rdrd\lambda$ que yace dentro del elemento de área $rdrd\lambda$ centrado en (r,λ) en coordenadas cilíndricas, distancia radial r y ángulo polar λ, tomando el centro de coordenadas como de un ciclón tropical. La función de distribución F es una función de r; λ y t, tiempo. Con objeto de llevar a cabo el análisis, se suponen las siguientes propiedades simplificadas de un elemento convectivo. a) un elemento convectivo se extiende verticalmente de la superficie del suelo (indicada por la presión de superficie P_s) hasta un nivel en el cual la presión es P_T; b) el elemento convectivo tiene la misma sección transversal y la misma estructura vertical; c) el elemento convectivo individual se mueve con la velocidad macroscópica V circundante, la cual está a la escala de movi-

Ooyama (1962) made an attempt to bypass this difficulty by assuming that the amount of released latent heat is determined from the convergence of water vapor in the surface boundary layer.

AN ALTERNATIVE APPROACH

There seems to be no doubt that the presence of organized cumulonimbus-type convections in tropical cyclones is quite important as far as the hurricane dynamics is concerned. Yet when one looks at the horizontal *pressure* pattern of a tropical cyclone, say, at the mid-tropospheric level, one hardly notices the presence of small-scale motions. This is in contrast to the situation found in the tropospheric general circulation of the atmosphere, in which one can easily identify the presence of "high's" and "low's" in the horizontal *pressure* patterns. In other words, it seems unnecessary to predict or follow the individual motions of convective cells in a tropical cyclone with the same degree of accuracy as that required to predict the motions of high's and low's in the general circulation of the atmosphere. A similar analogie, though more fundamental in nature, may be found in the kinetic theory of gases. In the theory, the gas is considered as an assemblage of particles called molecules. Although our "naked" eyes can not detect the presence of individual particles, nevertheless the macroscopic behavior of gases is explained on the basis of assumptions concerning the nature of the molecules of which the gas is composed.

Riehl and Malkus (1961) found in Hurricane Daisy, 1958, that nearly all the mass reaching great heights in the core ascends rapidly in undiluted convective cumulus towers which are limited in number rather than by a uniform and gradual "mass circulation." They estimated the number of these "hot towers" within the 200 nautical miles radius area to be in the order of 100 to 200. If one assumes the scale of an individual convective element to be 4 Km in diameter, it is seen that these towers occupy only $0.3 \sim 0.6\%$ of the area (see also Malkus, Ronne and Chaffee, 1961).

Let us describe the aggregate or population of convective elements $F(r,\lambda,t)\,rdrd\lambda$ which lies within the area element $rdrd\lambda$ centered at (r,λ) in cylindrical coordinates, radial distance r and, polar angle λ, taking the center of the coordinates at that of a tropical cyclone. The distribution function F is a function of r, λ and t, time. In order to carry out the analysis, the following simplified properties of a convective element are assumed: (a) a convective element extends vertically from the ground surface (indicated by the surface pressure P_s) and the top reaches to a pressure level denoted by pressure P_T; (b) the convective element have an equal cross-section and the same vertical structure; c) the individual convective element moves with the surrounding macroscopic velocity V of hurricane scale mientos de huracanes; d) los índices de formación y disipación de elementos convectivos se expresan como funciones de las cantidades de campo macroscópicas. La combinación de supuestos a) y c) implica que los elementos convectivos se mueven con velocidad integrada verticalmente $\widetilde{\mathbb{V}}$ definida por

motions; (d) the rates of formation and dissipation of convective elements are expressed as functions of the macroscopic field quantities. Combining assumptions (a) and (c) implies that the convective elements move with the vertically integrated velocity $\widetilde{\mathbb{V}}$ defined by

$$\widetilde{\mathbb{V}} = \frac{1}{P_s - P_T} \int_{P_T}^{P} \mathbb{V} \, dp \tag{1}$$

El índice de tiempo local de cambio del número de elementos convectivos en un área unitaria está determinado por la diferencia entre la corriente saliente y la entrante de elementos convectivos más la formación y disipación de elementos convectivos en el área. Así, podemos afirmar que

The local time rate of change in the number of convective elements in a unit area is determined by the difference between the influx and efflux of convective elements plus the formation and dissipation of convective elements in the area. Thus we may state that

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{r\partial\lambda}(\widetilde{u}\,F) + \frac{\partial}{r\partial r}(r\,\widetilde{v}\,F) = S - D \tag{2}$$

donde $\widetilde{u}$ y $\widetilde{v}$ denotan los componentes tangencial y radial de la velocidad promediada verticalmente. Aquí S y D representan los índices de producción y disipación de elementos convectivos en un punto fijo en espacio y tiempo. Si se conocen formas funcionales de S y D, entonces podemos predecir el estado futuro de distribución (Función F) a partir de su condición inicial prescrita, resolviendo (2). Una gran cantidad de investigación se debe hacer para construir formas funcionales de S y D. Aquí mencionamos solamente algunos factores importantes para la formación de convecciones de cumulus. Ya que el calor latente liberado es la principal fuente de energía para la formación de nubes cumulus, una estratificación termal condicionalmente inestable de la atmósfera y un alto contenido de vapor de agua del aire, son también factores contribuyentes. Sin embargo, para iniciar la convección se necesita una fuente de energía diferente y un mecanismo dinámico. El calor sensible transportado desde la superficie del océano puede servir como fuente de energía. El ascenso mecánico causado por la convergencia de aire cerca de la superficie del suelo es un factor que estimula la iniciación de convecciones. Basados en estas observaciones, se puede escribir una forma simple de S:

where $\widetilde{u}$ and $\widetilde{v}$ denote the tangential and radial components of the vertically averaged velocity. Here, S and D represent the rates of production and dissipation of convective elements at a fixed point in space and time. If functional forms of S and D are known, then we are able to predict the future state of distribution (Function F) from its prescribed initial condition by solving (2). A great deal of research must be made to construct functional forms of S and D. Here we only mention some of the important factors for the formation of cumulus convections. Since released latent heat is the main energy source for building cumulus clouds, a conditionally unstable thermal stratification of the atmosphere and high water vapor content of the air are both contributing factors. However, for the initiation of convection, a different kind of energy source and a dynamical mechanism are needed. The sensible heat transported from the ocean surface may serve for the energy source. The mechanical lifting caused by the convergence of air near the ground surface is an encouraging factor for the initiation of convections. Based upon these observations, a simple form of S may be written as

$$S = -\alpha q \left\{ \widetilde{\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial z} - \gamma_w\right)} \right\}^2 \left[\frac{\partial (rv)}{r\partial r} + \frac{\partial u}{r\partial\lambda} \right]_E \tag{3}$$

con tal que el aire esté saturado ($q > q_s$; índice de mezcla q, índice de mezcla saturado q_s) y la estabilidad termal verticalmente promediada sea negativa $\left(\widetilde{\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial z} - \gamma_w\right)}\right) < 0$, γ_w : índice de lapso adiabático húmedo) y una divergencia de masa media en la capa planetaria de fricción (Ekman) (la

provided that air is saturated ($q > q_s$; mixing ratio q, saturated mixing ratio q_s) and the vertically averaged thermal stability is negative $\left(\widetilde{\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial z} - \gamma_w\right)}\right) < 0$, γ_w : moist adiabatic lapse rate) and a mean mass divergence in the planetary frictional (Ekman) layer (the quantity in the cantidad entre corchetes en (3) es negativa. Una cantidad positiva no dimensional α ajusta la magnitud de S. Aquellos factores que son desfavorables a la formación de convecciones actúan como factores favorables para la disipación de convecciones.

Puesto que tratamos de circulaciones axialmente simétricas del sistema, tomemos el promedio circular de (2) por medio de la aplicación del operador de barra definido por

brackets in (3)) is negative. A positive nondimensional quantity α adjusts the magnitude of S. Those factors which are unfavorable to the formation of convections act as favorable factors for the dissipation of convections.

Since we are concerned with axially symmetric circulations of the system, let us take the circular average of (2) by applying bar operator defined by

$$\overline{(\;)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\;)\, d\lambda \tag{4}$$

El resultado es

The result becomes

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial t} + \frac{\partial}{r\partial r}(r\,\overline{\tilde{v}\,F}) = \overline{S} - \overline{D} \tag{5}$$

Usando el símbolo primo para representar divergencias del promedio circular, podemos escribir

Using the prime symbol to represent departures from the circular average, we may write

$$\overline{\tilde{v}\,F} = \overline{\tilde{v}}\,\overline{F} + \overline{\tilde{v}'\,F'} \tag{6}$$

La ecuación de continuidad del sistema es

The continuity equation of the system is

$$\frac{\partial (rv)}{r\partial r} + \frac{\partial u}{r\partial \lambda} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \tag{7}$$

en la cual $\omega = \frac{dP}{dt}$. Aplicando la operación de promedio vertical definida en (1) a la ecuación anterior y después la promediación circular definida en (4) a la ecuación resultante, tenemos

in which $\omega = \frac{dP}{dt}$. Applying the vertical averaging operation defined by (1) to the above equation and then the circular averaging defined by (4) to the resulting equation, we obtain

$$\frac{\partial (r\,\overline{\tilde{v}})}{r\partial r} + \frac{[\omega]_{p_T}^{p_s}}{p_s - p_T} = 0 \tag{8}$$

donde los corchetes denotan la diferencia entre los valores de ω evaluados en p_s y p_T.

La ecuación (5) puede expresarse como sigue con ayuda de (6) y (8)

where the brackets denote the difference between the values of ω evaluated at p_s and p_T.

Equation (5) may be expressed as follows with the aid of (6) and (8),

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial t} + \overline{\tilde{v}}\frac{\partial \overline{F}}{\partial r} - \frac{\overline{F}[\omega]_{p_T}^{p_s}}{p_s - p_T} + \frac{\partial}{r\partial r}(r\,\overline{\tilde{v}'\,F'}) = \overline{S} - \overline{D} \tag{9}$$

El último término del lado izquierdo (9) representa la convergencia radial (o divergencia) del flujo de elementos convectivos en un área unitaria debido a movimientos asimétricos. Siguiendo un procedimiento habitual para expresar el efecto de movimientos asimétricos en un sistema simétrico, introducimos una longitud de mezcla l definida por $F' = -\frac{\partial \overline{F}}{\partial r}$ y el coeficiente de intercambio $K = \overline{\tilde{v}'\,l}$. Así obtenemos

The last term on the left hand side of (9) represents the radial convergence (or divergence) of the flux of convective elements in a unit area due to asymmetric motions. Following a customary expedient to express the effect of asymmetric motions in a symmetric system, we introduce a mixing length l defined by $F' = -l\,\frac{\partial \overline{F}}{\partial r}$ and the exchange coefficient $K = \overline{\tilde{v}'\,l}$. Thus we obtain.

$$\frac{\partial}{\partial r}(\overline{r\tilde{v}'F'}) = -\frac{\partial}{\partial r}(rK\frac{\partial \overline{F}}{\partial r}) \tag{10}$$

En el experimento numérico, suponemos $\omega = 0$ en el más bajo nivel del sistema (tomando $p_s \approx 1000$ mb). Más aún, si la cima de los elementos convectivos llega hasta el nivel de presión p_T donde $\omega = 0$, entonces se ve por (8) que $\overline{\tilde{v}}$ desaparece. En este caso, con el uso de (10) la ecuación (9) se reduce a

In the numerical experiment, we assume $\omega = 0$ at the lowest level of the system (chosen to be $p_s \approx 1000$ mb). Moreover if the top of the convective elements reaches to the pressure level p_T where $\omega = 0$, then it is seen from (8) that $\overline{\tilde{v}}$ vanishes. In this case, with the use of (10), equation (9) reduces to

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}(Kr\frac{\partial \overline{F}}{\partial r}) + \overline{S} - \overline{D} \tag{11}$$

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

La ecuación de energía termodinámica usada en el experimento anterior (Kasahara, 1961) es

EXPERIMENTAL PROCEDURE

The thermodynamic energy equation used in the previous experiment (Kasahara, 1961) is

$$\frac{d\overline{\theta}}{dt} = \left(\overline{\frac{\theta}{TC_p}}\right)(\overline{Q_d} + \overline{Q_a} + \overline{Q_c}) \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \overline{V}\frac{\partial}{\partial r} + \overline{\omega}\frac{\partial}{\partial p}$$

después de tomar el promedio azimutal de la ecuación original. En (12), θ denota temperatura potencial; T, temperatura; C_p, calor específico del aire seco a presión constante. Los términos $\overline{Q_d}$, $\overline{Q_a}$ y $\overline{Q_c}$ denotan, respectivamente, el promedio de calentamiento (o enfriamiento) no adiabático por masa unitaria producido por procesos de difusión turbulenta, por procesos de radiación y por calor latente de condensación liberado que se puede expresar por

after taking azimuthal average of the original equation. In (12), θ denotes potential temperature; T, temperature; C_p, specific heat of dry air at constant pressure. The terms $\overline{Q_d}$, $\overline{Q_a}$ and $\overline{Q_c}$ denote, respectively, the rate of non-adiabatic heating (or cooling) per unit mass produced by eddy diffusion processes, by radiation processes, and by the released latent heat of condensation which may be expressed by

$$\overline{Q_c} = -L\Gamma^* \overline{\delta\omega} \tag{13}$$

donde $\delta = 1$ para $q \geqslant q_s$ y $\omega < 0$ y $\delta = 0$, de otra forma L es el calor latente de evaporación y $\Gamma^* = dq_s/dp$ (evaluado usando datos de la atmósfera tropical media).

De acuerdo con la hipótesis de "torre caliente", la condición para $\delta = 1$ sólo se encuentra en los elementos convectivos discutidos anteriormente. Luego entonces, afirmamos que

where $\delta = 1$ for $q \geqslant q_s$ and $\omega < 0$, and $\delta = 0$ otherwise, L is the latent heat of evaporation, and $\Gamma^* = dq_s/dp$ (evaluated using mean tropical atmosphere data).

According to "hot tower" hypothesis, the condition for $\delta = 1$ can be met only in the convective elements discussed previously. Thus, we assert that

$$\overline{\delta\omega} = \overline{\omega_c}\,(r, p, t) \tag{14}$$

donde $\overline{\omega_c}$ es el promedio azimutal de velocidad-p tomado sobre todos los elementos convectivos que yacen en un círculo de radio r. Sea σ la sección transversal de un elemento convectivo constante suponiendo (b) como antes, y sea $\omega_f(p)$

where $\overline{w_c}$ is the azimuthal average of p-velocity taken over all the convective elements lying on a circle of radius r. Let σ be the cross section of a convective element which is constant by assumption (b) as before, and let $\omega_f(p)$

como dp/dt en el elemento que tiene una estructura vertical prescrita. Entonces $\omega_c(r, p, t)$ se puede expresar

be dp/dt in the element which has a prescribed vertical structure. Then, $\overline{\omega_c}(r, p, t)$ may be expressed

$$\overline{\omega_c}\,(r, p, t) = \sigma \overline{F}(r, t)\omega_f\,(p) \tag{15}$$

Estrictamente hablando, la expresión anterior es válida sólo para $r \geqslant \sqrt{\sigma/\pi}$, pero este radio crítico de validez está en el orden de unos cuantos kilómetros que es demasiado pequeño para ser significativo. También por la definición de $\overline{F}$ existe una condición en que $\sigma \overline{F} \leqslant 1$. La igualdad es válida cuando los elementos convectivos están agrupados lado con lado, sin dejar aberturas a lo largo de un círculo de radio r. Eliminando $\overline{\delta\omega}$ y $\overline{\omega_c}$ de (13), (14) y (15), obtenemos

Strictly speakig, the above expression is valid only for $r \geqslant \sqrt{\sigma/\pi}$, but this critical radius of validity is in the order of a few kilometers which is too small to be significant. Also by the definition of $\overline{F}$, there is a condition that $\sigma \overline{F} \leqslant 1$. The equality holds when convective elements are packed side by side without leaving gaps along a circle of radius r. By eliminating $\overline{\delta\omega}$ and $\overline{\omega_c}$ between (13), (14) and (15), we obtain

$$\overline{Q_c} = -\gamma \overline{F}(r, t)\omega_f\,(p) \quad , \tag{16}$$

$$\gamma \equiv L\Gamma^* \sigma \quad .$$

La ecuación (16) junto con la (9) determinan completamente la distribución de la cantidad de calor latente liberado en el sistema. El campo de temperatura es predicho por (12) junto con las ecuaciones de movimiento

Equation (16) together with (9) completely determines the distribution of the amount of released latent heat in the system. The temperature field is predicted by (12) together with the equations of motion

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{u}}{dt} + \left(\frac{\overline{u}}{r} + f\right)\overline{v} &= \overline{E}_\lambda \\ \frac{d\overline{v}}{dt} - \left(\frac{\overline{u}}{r} + f\right)\overline{u} &= -\frac{\partial \overline{\phi}}{dr} + \overline{E}_r \end{aligned} \tag{17}$$

y la ecuación de continuidad

and the equation of continuity

$$\frac{\partial(r\overline{v})}{r\partial r} + \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial p} = 0 \tag{18}$$

donde $\overline{E}$ y $\overline{E}_r$ son términos de intercambio turbulento y ϕ denota el geopotencial definido por la ecuación hidrostática

where $\overline{E}$ and $\overline{E}_r$ are eddy exchange terms and ϕ denotes geopotential which is defined by the hydrostatic equation

$$\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial p} = -\frac{R\overline{T}}{p} \tag{19}$$

donde R denota la constante específica de gas del aire.

El método de diferencia finita descrito en el trabajo anterior (Kasahara, 1961) se aplica para resolver el sistema de ecuaciones (9), (12), (16), (17), 18) y (19) con las condiciones a la frontera apropiadas. Las condiciones iniciales son que $\overline{u}$, $\overline{v}$ sean ambas cero; $\overline{\theta}$ una función de p basada solamente sobre datos de atmósfera tropical media y la función inicial $\overline{F}(r, 0)$ tiene una forma prescrita.

Como prueba de la programación integramos numéricamente el sistema de ecuaciones en el cual la ecuación (9) es sustituida por (11). Más aún, para mayor sencillez, despre-

where R denotes the specific gas constant for air.

The finite-difference method described in the previous paper (Kasahara, 1961) is applied for solving the system of equations (9), (12), (16), (17), (18) and (19) with appropriate boundary conditions. The initial conditions are that $\overline{u}$, $\overline{v}$ are both zero; $\overline{\theta}$ is a function of p only based upon mean tropical atmosphere data the initial distribution function $\overline{F}(r, 0)$ has a prescribed form.

As a test of the program, we integrate numerically the system of equations in which equation (9) is replaced by (11). Furthermore, for the sake of simplicity, we neglected ciamos los términos del lado derecho de (9), de modo que en efecto la función de distribución F es invariante. Tomando el nivel de 100 mb como frontera superior y el nivel 1000 mb como inferior, la cuadrícula de diferencias finitas queda dispuesta en una red de 19 (dirección-p) x 81 (dirección r) intervalos con espacios $\triangle p = 50$ mb y $\triangle r = 10$ millas náuticas. El cálculo se ha llevado a cabo con éxito en el período de 14 días con un intervalo de tiempo de un minuto. Los resultados del cálculo muestran el desarrollo de las circulaciones a escala de huracanes y parecen ser útiles para explicar muchos rasgos observados en ciclones tropicales. Las discusiones detalladas se mostrarán en otra parte

the terms on the right hand side of (9), so that in effect the distribution function F is invariant. By choosing the 100-mb level to be the top boundary and the 1000-mb level as the bottom, the finite-difference lattice is arranged in a 19 (p-direction) x 81 (r-direction) grid array with grid intervals of $\triangle p = 50$ mb and $\triangle r = 10$ n miles. The computation has been carried out successfully over the period of 14 days with one minute time step. The results of calculation show the development of hurricane scale circulations and they seem to be useful in explaining many observed features of tropical cyclones. The detailed discussions will be shown elsewhere.

BIBLIOGRAFIA *BIBLIOGRAPHY*

ELIASSEN, A. 1952. Slow Thermally or Frictionally Controlled Meridional Circulations in a Circular Vortex. *Astrophysica Norvegica,* 5(2):19-60.

— 1959. On the Formation of Fronts in the Atmospher. In *The Atmosphere and the Sea in Motion.* New York (The Rockefeller Institute Press), pp. 227-287.

KASAHARA, A. 1961. A Numerical Experiment on the Development of a Tropical Cyclone. *Jour. Meteorology,* 18:259-282.

— 1962. The Development of Forced Convection caused by the Released Latent Heat of Condensation in a Hydrostatic Atmosphere. *Proc. International Sympos. Numer. Weather Prediction Tokyo (Nov. 7-13, 1960),* pp. 387-403.

KUO, H. L. 1960. On Initiation of Tropical Depressions and Convection in a Conditionally Unstable Atmosphere. National Hurricane Research Project No. 40, U. S. Weather Bureau.

— 1962. On the Controlling Influences of Eddy Diffusion on Thermal Convection. *Jour. Atmospher. Sciences,* 19:236-243.

LILLY, D. K. 1960. On the Theory of Disturbances in a Conditionally Unstable Atmosphere. *Mo. Weather Rev.,* 88:1-17.

MALKUS, J. C., C. RONNE, & M. CHAFFE. 1961. Cloud Patterns in Hurricane Daisy 1958. *Tellus,* 13:8-30.

OGURA, Y. & J. G. CHARNEY. 1952. A Numerical Model of Thermal Convection in the Atmosphere. *Proc. International Sympos. Numer. Weather Prediction, Tokyo, (Nov. 7-13, 1960),* pp. 387-403.

OOYAMA, K. 1963. A Dynamic Model for the Study of Tropical Cyclone Development. Department of Meteorology and Oceanography, New York University.

RIEHL, H. & J. MALKUS. 1961. Some Aspects of Hurricane Daisy, 1958. *Tellus,* 13:181-213.

SPIEGEL, E. A. 1962. A Generalization of the Mixing-Length Theory of Turbulent Convection.

SYONO, S. 1962. A Numerical Experiment of the Formation of Tropical Cyclones. *Proc. International Sympos. Numer. Weather Preditcion, Tokyo (Nov. 7-13, 1960),* pp. 405-418.