

# III CONFERENCIA TÉCNICA SOBRE HURACANES Y METEOROLOGÍA TROPICAL TECHNICAL CONFERENCE ON HURRICANES AND TROPICAL METEOROLOGY

México, D. F., Jun. 6-12, 1963

5a. SESIÓN

5th SESSION

## DESARROLLO DE HURACANES (I) HURRICANE DEVELOPMENT (I)

### *UN MODELO DINAMICO PARA ESTUDIAR EL DESARROLLO DE CICLONES TROPICALES \**

KATSUYUKI OoyAMA \* \*

#### RESUMEN

Se considera el desarrollo de un ciclón tropical como un proceso cooperativo entre la convección a escala de nubes como fuente de energía y el movimiento a escala de ciclón como mecanismo para organizar la convección de nubes. Para formular el acoplamiento entre ambas escalas de fenómenos diferentes solo en términos de campos a gran escala se elabora la hipótesis de que la distribución estadística y la intensidad media de la convección de nubes están gobernadas por la convergencia a gran escala del aire caliente y húmedo en una capa de superficie mientras la transferencia vertical de calor y masa debida a nubes se determina por un modelo hipotético de la misma convección de nubes. Tales hipótesis se incorporan en un sistema fluido que consiste en dos capas de fluido homogéneo incompresible de diferentes densidades y una capa de frontera que representa separadamente el efecto de fricción superficial. La circulación a gran escala de un ciclón tropical se representa por un vórtice simétrico casi equilibrado y circular y la circulación transversa en el vórtice es inducida por fricción interna y superficial y por efecto de la hipotética convección de nubes. Los resultados del análisis lineal de la perturbación en el modelo son bastante razonables. Sin embargo, los resultados de integración numérica indican la necesidad de mejorar algunas partes del modelo si va a reproducir un ciclón tropical completamente desarrollado.

#### INTRODUCCION

Uno de los problemas de mayor interés en la dinámica de los ciclones tropicales es entender el proceso hidrodinámico a través del cual se desarrolla el movimiento a escala de ciclón utilizando la energía de calor latente liberado por nubes convectivas. Ya que la aceleración boyante en ascenso húmedo inestable sólo origina la convección a escala de nubes, no puede considerarse a la circulación a gran escala impulsada directamente por la fuerza boyante. La estabilidad estática a gran escala no es realmente inestable de manera necesaria en una capa profunda. Además, las condiciones para una posible inestabilidad dinámica quedan satisfechas en todo caso para una región bastante limitada dentro del ci-

\* Contribución Núm. 15 del Laboratorio de Ciencias Geofísicas, Departamento de Meteorología y Oceanografía, Universidad de Nueva York, Nueva York 53, Nueva York.

\* \* Universidad de Nueva York.

### *A DYNAMICAL MODEL FOR THE STUDY OF TROPICAL CYCLONE DEVELOPMENT \**

KATSUYUKI OoyAMA \* \*

#### ABSTRACT

The development of a tropical cyclone is viewed as a cooperative process between the cloud-scale convection as the energy source and the cyclone-scale motion as the mechanism of organizing the cloud convection. In order to formulate the coupling between the two different scales of phenomena in terms of the large scale fields alone, it is hypothesized that the statistical distribution and mean intensity of the cloud convection are controlled by the large scale convergence of the warm and moist air in a surface layer, while the vertical transfer of heat and mass due to the clouds are determined from a hypothetical model of cloud convection itself. These hypotheses are incorporated into a fluid system which consists of two layers of incompressible homogeneous fluid of different densities and a boundary layer to represent the effect of surface friction separately. The large scale circulation of a tropical cyclone is represented by a quasi-balanced and circular symmetric vortex, and the transverse circulation in the vortex is induced by internal and surface friction and by the effect of hypothesized cloud convection. The results of linearized perturbation analysis of the model are quite reasonable. However, the results of numerical integration indicate need of improvement in some part of the model, if a fully developed tropical cyclone is to be reproduced by the model.

#### INTRODUCTION

One of the major problems of interest in the dynamics of tropical cyclones is to understand the hydrodynamical processes through which the cyclone-scale motion develops utilizing the latent heat energy released by convective clouds. Since the buoyant acceleration in unstable moist ascent is responsible only for cloud-scale convection, the large scale circulation cannot be considered driven directly by the buoyant force. The large scale static stability is, in fact, not necessary unstable in a deep layer. Furthermore, the conditions for possible dynamic instability are satisfied in, if any, a rather limited region within the cyclone. Therefore, it appears unlikely that tropical cyclone development can

\* Contribution No. 15 of the Geophysical Sciences Laboratory, Department of Meteorology and Oceanography, New York University, New York 53, New York.

\* \* New York, University.

clón. Por ello, no parece probable que el desarrollo del ciclón tropical pueda explicarse por completo a base de inestabilidad hidrodinámica. Más bien parece que la circulación ciclónica en su totalidad es un vórtice casi equilibrado e inducido por calentamiento diferencial debido a la distribución organizada de nubes convectivas.

Si este punto de vista es correcto el mecanismo básico para desarrollo de un ciclón tropical, excepto su estado incipiente como perturbación en alisios tropicales, depende de su propia habilidad para organizar la convección de nubes y para perpetuar el calentamiento diferencial manteniendo una fuente constante de humedad. Este mecanismo abarca varios tipos de procesos físicos, especialmente en dinámica de nubes y en interacción de frontera entre atmósfera y mar. Aunque ambos campos se estudian ahora de manera intensiva, lo que se sabe no parece requerir un experimento numérico total. No obstante, podemos comenzar investigando la dinámica de ciclones tropicales a lo menos en términos de rasgos a gran escala y simplificando o haciendo hipótesis sobre dichos procesos físicos.

Hasta hace poco los estudios dinámicos sobre ciclones tropicales se apoyaban en su mayoría en el común supuesto de que la liberación de calor latente valorado de manera directa en el movimiento a escala de ciclón podía substituir al papel energético de nubes convectivas. A la luz de frustrados experimentos en tales estudios parece ahora esencial en cualquier modelo dinámico que se incorpore el hecho observado de que el mecanismo primario para liberar calor latente es la libre convección en forma de nubes en cumulus, aunque el modelo no se refiera explícitamente a nubes individuales. Además de ese difícil problema de convección de nubes existe el viejo problema de transferencia turbulenta que también requiere formulación hipotética. Un modelo dinámico que debe construirse con varias hipótesis respecto a procesos insuficientemente conocidos es ciertamente menos preciso que lo deseado. Aunque cada hipótesis debe mejorarse con el progreso en campos específicos, los experimentos numéricos con tal modelo también permiten orientarse a otros desarrollos comprobando las consecuencias dinámicas de cualquier grupo particular de hipótesis seleccionadas.

#### SUPUESTOS BASICOS DEL MODELO

Para comprobar de manera específica nuestras opiniones básicas sobre desarrollo de ciclones especiales se ha construido un modelo simple. Consiste en dos capas principales de fluido homogéneo incompresible con diferentes densidades y una capa de frontera en el fondo, que se ha introducido para formular los efectos de fricción en la superficie del mar en forma sencilla. El movimiento de las capas principales se supone casi equilibrado y simétrico circularmente. La circulación transversa en el vórtice equilibrado es inducida por efectos simulados de nubes convectivas y fricción interna y superficial. El uso de fluido incompresible es una selección arbitraria para individualizar el modelo físicamente más que por cálculo. El modelo es muy similar hidrodinámicamente al modelo de Eliassen (1952) para la circulación general. Los

be explained entirely on the basis of hydrodynamic instability. It seems more likely that the cyclone circulation as a whole is a quasi-balanced vortex induced by the differential heating due to the organized distribution of convective clouds.

If this point of view is correct, the crucial mechanism for growth of a tropical cyclone, except for the incipient stage as a disturbance in the tropical easterlies, must lie in its own ability to organize the cloud convection and to perpetuate the differential heating by maintaining a continuous supply of moisture. This mechanism involves various types of physical processes, especially those in cloud dynamics and in the boundary interaction between the atmosphere and the sea. Although both fields are currently under intensive study, the amount of available knowledge does not seem to warrant an all-inclusive numerical experiment at present. Nevertheless, we may start investigating the dynamics of tropical cyclones, at least in terms of large scale features, by simplifying or hypothesizing the involved physical processes.

Until recently, most of the dynamical studies of tropical cyclones were based on a common assumption that the release of latent heat evaluated directly from the cyclone-scale motion could be substituted for the energetical role of convective clouds. In the light of the frustrating experiences in these studies, it now appears to be essential for any dynamical model to incorporate the observed fact that the primary mechanism of releasing the latent heat is the free convection in the form of cumulus clouds, even though the model may not explicitly refer to individual clouds. Besides this difficult problem of cloud convection, there is the long standing problem of turbulent transfer which also requires hypothetical formulation. A dynamical model which has to be constructed on a number of hypotheses concerning insufficiently known processes is certainly less precise than is desired. While each hypothesis should be improved with progress in specific fields, numerical experiments with such a model can also provide us with clues to further improvements by testing the dynamical consequences of any particular set of hypotheses chosen.

#### BASIC ASSUMPTIONS OF THE MODEL

In order to test our basic views on the development of tropical cyclones more specifically, a simple model has been constructed. It consists of two main layers of incompressible homogeneous fluid with different densities and a boundary layer at the bottom. The latter is introduced in order to formulate the effects of friction at the sea surface in a simplified way. The motion in the main layers are assumed to be quasibalanced and circularly symmetric. The transverse circulation in the balanced vortex is induced by simulated effects of convective clouds and by internal and surface friction. The use of incompressible fluid is an arbitrary choice to discretize the model physically rather than computationally. The model is hydrodynamically very similar to Eliassen's (1952) model of the general circulation.

rasgos principales que caracterizan al presente modelo como apropiado para ciclones tropicales son el tratamiento hipotético de la convección a escala de nube como fuente de energía para movimiento a gran escala y la naturaleza del acoplamiento entre ambos.

Una gran parte de la circulación de masa que entra en un ciclón tropical tiene lugar en una capa relativamente somera sobre la superficie del mar, como resultado de fricción superficial. Existiendo una alta temperatura de potencial equivalente en dicha capa se desarrollarán altas nubes convectivas en la región en que converge la circulación entrante a escala de superficie. Sin embargo, el flujo vertical de calor y masa debido a nubes convectivas no puede ser determinado por las propiedades del campo a gran escala, a menos de suponer propiamente algún modelo de nube de convección y en tal periodo preliminar de nuestro estudio es preferible un modelo sencillo a otro complicado.

Cuando se levanta cierta porción de aire desde la capa de superficie y se inicia la condensación se acelerará el movimiento ascendente en la más baja tropósfera, donde el coeficiente de lapso tiene mayor pendiente que el correspondiente al lapso adiabático húmedo del aire. Sin embargo, la temperatura interior de la nube no es mucho más alta que en sus cercanías, como se esperaría de ese clásico método ya que la aceleración produce arrastre dinámico del aire ambiental que no está saturado y requiere calor para continuar en la corriente ascendente. Por ello, la energía de calor latente liberada en la parte inferior de la nube no puede calentar el aire ambiental en los mismos niveles, pues el calor es llevado hacia arriba por la mayor corriente de masa dentro de la nube. Al decelerarse la corriente ascendente en la parte superior de la nube, el aire que viene de abajo se convierte en aire ambiental a esos niveles.

Aplicando este simple cuadro de convección de nubes al presente modelo de ciclón debe asociarse la capa más baja con niveles de arrastre hacia nubes y la capa más alta con niveles de desprendimiento. Aunque ni la temperatura ni la humedad se consideran explícitamente en el modelo, el efecto energético de nubes convectivas puede introducirse por medio de circulación de masa a través de la interfase de ambas capas. Más específicamente, para cada masa unitaria de fluido desprendida desde la capa de superficie a la inferior, se suponen  $\eta$  unidades de masa que cambian de densidad y entran en las capas superiores. Puesto que el volumen específico de un fluido incompresible es en tales circunstancias análogo a la temperatura potencial de la atmósfera, la reducción en densidad del fluido corresponde al calentamiento diabático. El factor de arrastre  $\eta$  puede determinarse por el anterior modelo de nubes por analogía si los campos de temperatura y humedad a gran escala se suponen conocidos. Digamos la temperatura potencial equivalente en promedio del aire superficial es  $(\theta_e)_0$ , el de la capa más baja es  $(\theta_e)_1$  y el de la capa más alta  $(\theta_e)_2$ , el factor de arrastre puede expresarse por

The principal features which characterize the present model as an appropriate one for tropical cyclones are the hypothesized treatment of the cloud-scale convection as the energy source for the large scale motion and the nature of the coupling between them.

A large proportion of the inward mass flux in a tropical cyclone occurs in a relatively shallow layer above the sea surface as the result of surface friction. Because of the high equivalent potential temperature in this layer, tall convective clouds will develop in the region where the large scale surface inflow converges. However, the vertical flux of heat and mass due to the convective clouds cannot be determined from the large scale field properties, unless some model of cloud convection itself is assumed. At this preliminary stage of our study, a simple model is preferred to an elaborate one.

When a parcel of air is lifted from the surface layer and condensation starts, the upwards motion will be accelerated in the lower troposphere where the lapse rate is steeper than the moist adiabatic lapse rate of the parcel. However, the temperature inside the cloud is not so much higher than the surroundings as expected from the classical parcel method, because the acceleration results in dynamical entrainment of environmental air which is not saturated and requires heat to remain in the updraft. Therefore, the latent heat energy released in the lower part of the cloud is not considered to warm up environmental air at the same levels. Instead, the heat is carried upward by the increased mass flux inside the cloud. As the updraft is decelerated in the upper part of the cloud, the air pumped up from below is turned into environmental air at those levels.

In applying this simple picture of cloud convection to the present cyclone model, the lower layer is to be associated with the levels of entrainment into clouds and the upper layer with the levels of detrainment. Although neither temperature nor humidity is explicitly carried in the model, the energetical effect of convective clouds can be introduced by means of the mass flux across the interface of the two layers. More specifically, for each unit mass of fluid lifted into lower layer from the surface layer,  $\eta$  units of mass are assumed to change density and to enter the upper layer. Since the specific volume of an incompressible fluid is, in these circumstances, analogous to potential temperature of the atmosphere, reduction in density of the fluid corresponds to diabatic heating. The entrainment factor,  $\eta$ , can be determined through the above cloud model by analogy, if the large scale fields of temperature and humidity are assumed known. Namely, if the average equivalent potential temperature of the surface air is  $(\theta_e)_0$ , that of the lower layer  $(\theta_e)_1$ , and that of the upper layer  $(\theta_e)_2$ , the entrainment factor may be given by

$$\eta = \frac{(\theta_e)_0 - (\theta_e)_1}{(\theta_e)_2 - (\theta_e)_1} \quad (1)$$

Una estimación aproximada que se basa en los datos medios de verano sobre las Indias Occidentales (Jordan, 1958) da  $\eta$ , a un valor entre tres y cuatro.

Debe notarse que las nubes convectivas se suponen aquí similares en su totalidad y alcanzando altura predeterminada. Normalmente, en modelos dinámicos de convección de nubes, se considera su altura como algo que puede predecirse más que manifestarse y a pesar de ello, para pronosticar específicamente la altura de una nube debe suponerse su dimensión horizontal. Consecuentemente, la presente discusión es más práctica que profunda aunque las alturas de las nubes convectivas en un ciclón tropical no son ciertamente uniformes. En particular los pequeños cumuli pueden no ser importantes en términos del total de calor que producen, aunque pueden modificar gradualmente los campos ambientales afectando la conducta de nubes más altas a lo largo del proceso. En el presente modelo faltan ese y otros mecanismos que llevarían a la variación del factor de arrastre. Tan grande simplificación debe corregirse en el futuro.

#### FORMULACION MATEMATICA DEL MODELO

A menos que sea indicado específicamente, las cantidades con índice 1 se refieren en lo que sigue a la capa inferior (de las dos capas principales) y con el índice 2 se refieren a la capa superior. El índice simbólico  $j$  se usará suponiendo  $j = 1$  y  $2$ , cuando haya referencias por igual a las dos capas. El espesor de cada capa  $h_j$ , la componente tangencial de velocidad  $v_j$  y la componente radial  $u_j$  son función del tiempo  $t$  y del radio  $r$ . La densidad de la capa más baja se supone que sea la unidad y de la capa más alta  $\theta$ , ya que el valor absoluto de la densidad no es importante en este modelo. Al medir la estabilidad estática interna  $\sigma = 1 - \theta$  debe resultar positiva.

La circulación de masa "diabática" entre la capa inferior y la superior, que representa el efecto de calentamiento por nubes convectivas por área unitaria, queda indicado por  $Q_2$ . Para simular enfriamiento por otros procesos físicos puede introducirse la circulación de masa en dirección contraria  $Q_1$  en favor de la generalidad. La ecuación de continuidad para cada capa puede expresarse como sigue

$$\frac{\partial}{\partial t} h_1 = \frac{\partial}{r \partial r} \psi_1 - (Q_2 - Q_1) + \frac{\partial}{r \partial r} \psi_0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h_2 = \frac{\partial}{r \partial r} \psi_2 + \frac{1}{\theta} (Q_2 - Q_1)$$

donde  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son las circulaciones radiales en volumen (positivas hacia adentro) por unidades radianes en las dos capas principales que son definidas por

$$\psi_j = -h_j u_j r$$

y  $\psi_0$  es la circulación radial en la capa de superficie. Ya que el espesor de la última capa se supone constante, la velocidad

A rough estimate, based on the summer mean data over the West Indies (Jordan, 1958), gives  $\eta$  a value between three and four.

It should be noted that convective clouds, here, are assumed all alike and to reach a predetermined height. Normally, in dynamical models of cloud convection, the cloud height is regarded as something to be predicted rather than to be given. However, in order to predict the height of a cloud specifically, an assumption has to be made about the horizontal dimension of the cloud. Therefore, the present approach is more practical, if not profound. However, the heights of convective clouds in a tropical cyclone are certainly not uniform. In particular, small cumuli may not be important in terms of the amount of heat they produce, but they can gradually modify environmental fields so that behaviors of taller clouds will be affected in the long run. In the present model, this and other mechanisms which would lead to variation of the entrainment factor is lacking. This oversimplification should be corrected in the future.

#### MATHEMATICAL FORMULATION OF THE MODEL

In the following, unless otherwise specified, quantities with the subscript 1 refer to those in the lower layer (of the two main layers) and quantities with the subscript 2 refer to those in the upper layer. The symbolic subscript  $j$  will be used, implying  $j = 1$  and  $2$ , when references are equally made to both layers. The thickness of each layer,  $h_j$ , the tangential component of velocity,  $v_j$ , and the radial component,  $u_j$ , are functions of time,  $t$ , and radius  $r$ . The density of the lower layer is assumed to be unity and that of the upper layer,  $\theta$ , since the absolute value of density is not important in this model. A measure of internal static stability,  $\sigma = 1 - \theta$ , should be positive.

The "diabatic" mass flux from the lower layer to the upper, which represent the effect of heating by convective clouds per unit area, is denoted by  $Q_2$ . In order to simulate cooling by other physical processes, the mass flux in the reverse direction,  $Q_1$ , may be introduced for the sake of generality. The equation of continuity for each layer is, then, written as follows:

where  $\psi_1$  and  $\psi_2$  are the radial volume fluxes (positive inwards) per unit radian in the two main layers, which are defined by

and  $\psi_0$  is the radial flux in the surface layer. Since the thickness of the last layer is assumed to be a constant,

vertical  $w_0$  por encima de la capa de superficie se expresa simplemente por

the vertical velocity,  $w_0$ , at the top of the surface layer is simply given by

$$w_0 = \frac{\partial}{r\partial r} \psi_0 .$$

Si la velocidad vertical  $w_0$  es positiva puede suponerse que las nubes de convección crecen sobre tales áreas y que el calor y la masa son transportados por ellas a la capa superior. Por otra parte, si  $w_0$  es negativa, no puede suponerse que haya actividad apreciable de convección de nubes. Así, bajo tales supuestos que introdujeron el factor de arrastre  $\eta$ , la circulación de masa adiabática  $Q_2$  queda expresada por

If the vertical velocity,  $w_0$ , is positive, it is assumed that convective clouds grow over such areas and that heat and mass are transported by them to the upper layer. On the other hand, if  $w_0$  is negative, no significant activity of cloud convection is assumed to occur. Then, under the previous assumptions which introduced the entrainment factor,  $\eta$ , the diabatic mass flux,  $Q_2$ , is given by

$$Q_2 = \begin{cases} \eta w_0 & \text{if } w_0 > 0 \\ 0 & \text{if } w_0 \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Las ecuaciones de movimiento para la componente tangencial se expresan como sigue, al tomarse en cuenta variaciones en el espesor y supuesto cambio de masas entre ambas capas:

The equations of motion for the tangential component are written as follows, due account being taken of the variation in the thickness and the assumed exchange of mass between the two layers:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v_1 r &= \frac{f + \zeta_1}{h_1} \psi_1 + \frac{1}{h_1} \left( Z_1 + \frac{\partial}{r\partial r} L_1 \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} v_2 r &= \frac{f + \zeta_2}{h_2} \psi_2 + \frac{1}{\theta h_2} \left( -Z_2 + \frac{\partial}{r\partial r} L_2 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

donde la vorticidad  $\zeta_j$ , la transferencia vertical de inercia angular debida a deformación vertical y cambio de masa  $Z_j$  y transferencia radial debida a vórtices laterales  $L_j$  se definen como sigue

where the vorticity,  $\zeta_j$ , the vertical transfer of angular momentum due to the vertical shear and the mass exchange,  $Z_j$ , and the radial transfer due to the lateral eddies,  $L_j$ , are defined as follows:

$$\zeta_j = \frac{\partial}{r\partial r} (v_j r)$$

$$Z_j = r (v_2 - v_1) (\mu + Q_j)$$

$$L_j = \lambda_j h_j r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_j}{r} \right)$$

Se supone en la anterior que las fuerzas de fricción son lineales con coeficiente constante  $\mu$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . El esfuerzo tangencial debido a deformación vertical en la interfase es dado por  $\mu(v_2 - v_1)$  en tanto que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los coeficientes de viscosidad cinemática de vórtice en las capas respectivas que se deben a vórtices latentes.

In the above, frictional forces are assumed to be linear with constant coefficients,  $\mu$ ,  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ . The tangential stress due to vertical shear at the interface is given by  $\mu(v_2 - v_1)$ , while  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are the kinematic eddy viscosity coefficients due to the lateral eddies in the respective layers.

El papel más importante de las ondas de gravedad en un ciclón tropical lo tienen algunas internas inestables que pueden originar nubes convectivas libres. Puesto que sus efectos se toman en cuenta también en varias maneras, pueden eliminarse las ondas de gravedad en el modelo que pretende representar solamente los campos de cambios lentos, lográndose tal eliminación en lo general por el uso de la ecuación de

The most important role of gravity waves in a tropical cyclone is played by unstable internal gravity waves which give rise to the free convective clouds. Since their effects are taken into account otherwise, all the gravity waves may be eliminated in the model, which is intended to represent only the slowly changing fields. This elimination is achieved generally by the use of the balance equation and,

equilibrio y en el caso de simetría circular, por reducción de esa ecuación a otra de viento gradiente.

in the case of circular symmetry, the balance equation is reduced to the gradient wind equation

$$\left(f + \frac{v_j}{r}\right) v_j = \frac{\partial}{\partial r} \phi_j \quad (5)$$

donde  $f$  es el parámetro de Coriolis y los geopotenciales  $\phi_j$  se definen por

where  $f$  is the Coriolis parameter, and the geopotentials,  $\phi_j$ , are defined by

$$\begin{aligned} \phi_1 &= g (h_1 + \theta h_2) \\ \phi_2 &= g (h_1 + h_2) \end{aligned} \quad (6)$$

Ya que la condición de equilibrio (5) se supone constante para todo tiempo, las circulaciones radiales  $\psi_1$  y  $\psi_2$  deben determinarse de tal manera que la variación en tiempo de las velocidades tangenciales pronosticadas por (4) y de los campos de espesor por (2) sean consistentes con (5).

Since the balance condition (5) is assumed to hold for all time, the radial fluxes,  $\psi_1$  and  $\psi_2$ , should be determined in such a way that the time variation of the tangential velocities predicted by (4) and the time variation of the thickness fields predicted by (2) are consistent with (5).

Las condiciones de consistencia se obtienen en la siguiente forma:

The consistency conditions are obtained in the following form:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{\partial}{r \partial r} (\psi_1 + \theta \psi_2) \right) - A_1 \psi_1 &= B_1 \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{\partial}{r \partial r} (\psi_1 + \psi_2) \right) - A_2 \psi_2 &= B_2 \end{aligned} \quad (7)$$

donde where

$$A_j = \left( f + \frac{2v_j}{r} \right) (f + \zeta_j) (g h_j)^{-1},$$

y los términos del lado derecho  $B_1$  y  $B_2$ , representando combinaciones de los términos forzados térmico y friccional. Para resolver (7) para las circulaciones radiales pueden suponerse las siguientes condiciones de frontera:

and the right-hand side terms,  $B_1$  and  $B_2$ , do not contain  $\psi_1$  or  $\psi_2$ , and represent combinations of the thermal and the frictional forcing terms. In order to solve (7) for the radial fluxes, the following boundary conditions may be assumed:

$$\psi_j = 0 \quad \text{at } r = 0 \quad \text{and at } r = r_{\max},$$

donde  $r_{\max}$  es un radio suficientemente grande. Si tanto  $A_1$  como  $A_2$  son positivos, las partes homogéneas de (7) poseen una integral definida positiva que permite la comprobación de la única solución bajo las condiciones de frontera dadas. En los cálculos numéricos reales la vorticidad absoluta en la capa superior se hace negativa en un limitado intervalo de radios. Sin embargo, no ha introducido dificultad para resolver un análogo de diferencia finita de la ecuación (7). Debe notarse que la única solución analítica en ese complejo caso también puede demostrarse si la magnitud del  $A_2$  negativo es pequeña.

where  $r_{\max}$  is a sufficiently large radius. If both  $A_1$  and  $A_2$  are positive, the homogeneous parts of (7) possess a positive-definite integral, from which uniqueness of the solution under the given boundary conditions is easily proved. In actual numerical computations, the absolute vorticity in the upper layer has been found to become negative in a limited interval of radii. However, it has not caused any difficulty in solving a finite-difference analogue of the equations (7). It may be noted here that uniqueness of the analytical solution in such a mixed case also can be demonstrated if the magnitude of negative  $A_2$  is small.

Para una especificación completa del presente modelo se requiere otra ecuación que determina la circulación de entrada de la capa de superficie. Charney y Eliassen (1949) introdujeron un método apropiado para determinar el trans-

For a complete specification of the present model, one more equation is required in order to determine the surface layer inflow. Charney and Eliassen (1949) introduced an approximate method which determines the cross-isobaric

porte de masa trans-isobárica en la capa de frontera planetaria sin calcular detalladamente la estructura del viento y manteniendo aún la aproximación casi-geostrofica. El mismo método fue usado también por Eliassen (1959) en su estudio de frontogénesis. Si ese método aproximado se aplica al presente caso de una circulación casi-balanceada simétrica circular, la circulación radial friccional  $\psi_0$  debe determinarse por la ecuación

$$(f + \zeta_1) \psi_0 = C_D |v_1| v_1 r \quad (8)$$

donde la componente tangencial del esfuerzo de superficie se supone proporcional al cuadrado de viento gradiente y  $C_D$  es el coeficiente de arrastre.

Sin embargo, los resultados de integración numérica con el modelo han demostrado que por desgracia la validez de la aproximación (8) se hace dudosa cuando el desarrollo de la circulación llega a ser fuerte. Más adelante se comentará este aspecto en el trabajo.

#### ANÁLISIS LINEAL DE LA PERTURBACION EN EL MODELO

El presente modelo del desarrollo de ciclones tropicales supone una perturbación pre-existente de fuerza finita antes de que actúen los mecanismos considerados. Consecuentemente, el modelo no puede aplicarse a una etapa muy temprana de las perturbaciones tropicales, aunque todavía sea útil e interesante examinar algunas de sus características dinámicas por medio de un sistema lineal de ecuaciones sobre el supuesto que las amplitudes de campos de movimiento son infinitamente pequeñas. Para no borrar el efecto de fricción superficial de sistemas linealizados, el esfuerzo de superficie se supone proporcional a la velocidad del viento. En favor de la simplicidad, pero sin alterar el carácter básico del modelo linealizado, puede suponerse una simetría parcial sobre coordenadas cartesianas. Así, la ecuación (8) será reemplazada en esta sección por

$$f \psi_0 = k v_1,$$

donde  $k$  es el coeficiente lineal de fricción. Para facilitar el trabajo matemático, aunque no sea necesario, la fórmula condicional (3) se reemplaza por

$$Q_2 = \eta w_0$$

para cualquier signo de  $w_0$ . El enfriamiento  $Q_1$  es igual a cero.

Ya que el modelo de análisis lineal, incluyendo la forma sinusoidal de las soluciones es uniforme, no se reproducirán aquí los detalles. La ecuación característica del índice de desarrollo  $\gamma$  se obtiene en la forma

$$a \gamma^2 + b \gamma + c = 0$$

donde los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  dependen de las constantes físicas del modelo y de la escala horizontal de una pertur-

mass transport in the planetary boundary layer without computing detailed wind structure and still maintaining the quasi-geostrophic approximation. The same method was used again by Eliassen (1959) in his study of frontogenesis. If this approximate method is applied to the present case of a circular symmetric, quasi-balanced flow, the frictional radial flux,  $\psi_0$ , is to be determined from the equation

where the tangential component of the surface stress has been assumed to be proportional to the square of the gradient wind and  $C_D$  is the drag coefficient.

Unfortunately, however, results of numerical integration with the model has shown that validity of the approximation (8) becomes questionable as the computed circulation grows fairly strong. Further comments on this will be given later in the paper.

#### THE LINEAR PERTURBATION ANALYSIS OF THE MODEL

The present model for tropical cyclone development assumes a pre-existing disturbance of finite strength before the mechanisms considered in the model take over. Therefore, the model should not be applied to a very early stage of tropical disturbances. However, it is still useful and interesting to examine some dynamical characteristics of the model, by means of the linearized system of equations, under the assumption that amplitudes of motion fields are infinitesimally small. In order not to wash out the effect of surface friction of the linearized system, the surface stress is assumed to be proportional to the wind speed. For the sake of simplicity, but without altering the basic character of the linearized model, slab symmetry on cartesian coordinates may be assumed. Then, the equation (8) is replaced,

where  $k$  is the linear friction coefficient. For the sake of mathematical expediency, although it is not necessary, the conditional formula (3) is replaced by

for either sign of  $w^0$ . Cooling,  $Q_1$ , is taken to be zero.

Since the method of linear analysis, including the sinusoidal form of solutions, is standard, details will not be reproduced here. The characteristic equation for the growth rate,  $\gamma$ , is obtained in the form

where the coefficients  $a$ ,  $b$  and  $c$  depend on the physical constants of the model as well as on the horizontal scale of

bación. Se demuestra que ninguna raíz de la ecuación cuadrática puede ser positiva o tener una parte real positiva sin  $\eta \leq 1$ , pues los tres coeficientes son entonces positivos. Por ello,

$$\eta > 1$$

es una condición necesaria para que una perturbación se desarrolle. Por definición el factor de arrastre  $\eta$  cuando es menor que la unidad implica que el aire en la capa superficial no tiene una cantidad suficiente de calor latente para levantarse hasta la capa superior. Por tal razón, el anterior criterio implica la posible existencia de altas nubes convectivas libres, necesaria para el desarrollo de una perturbación a escala de ciclón.

Se obtiene una expresión simple del coeficiente de desarrollo al suponer que todas las fricciones internas equivalen a cero. A la escala de una perturbación, la anchura media de la región de movimiento ascendente  $l$  puede usarse si se asume que ambas capas son del mismo espesor constante  $H$  cuando no hay perturbación. Introdúzcase el radio de deformación *interna* de Rossby  $R$  definido por

$$R = \sigma g H / f^2$$

donde  $\sigma$  es la medida previamente definida de estabilidad estática interna. Si  $\sigma = 0.1$ ,  $g = 9.8 \text{ m seg}^{-2}$ ,  $H = 5 \text{ Km}$  y  $f = 5 \times 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$ , el radio de deformación  $R$  es de 1,400 Km. Introdúzcase también el parámetro escalar no-dimensional  $q$  definido por

$$q = (2/\pi) \cdot (l/R)$$

El índice de desarrollo se escribe, pues, como

$$\gamma = \frac{k}{H} \frac{(\eta - 1) - q^2}{1 + 2q^2 + \sigma q^4}$$

Es claro otra vez en este caso especial que ninguna perturbación se desarrollaría a menos que  $\eta > 1$ . Para perturbaciones de unos cuantos cientos de kilómetros (en que  $q^2 \ll 1$ ), los coeficientes de desarrollo son casi independientes de sus escalas. Para perturbaciones mayores la estabilidad inercial debida a la rotación terrestre se hace más efectiva y por ello, cuando  $\eta > 1$ , el coeficiente de desarrollo disminuye al aumentar la escala y puede hacerse negativo para perturbaciones muy grandes cuyas escalas son comparables a  $R$  o mayores.

Cuando las fricciones internas, especialmente la viscosidad de vórtices laterales se toman en cuenta, las perturbaciones muy pequeñas se hacen peculiares. En la Fig. 1 se muestran ejemplos numéricos del coeficiente de desarrollo en función de la escala horizontal para diversos valores de  $\eta$ . Los valores supuestos de constantes físicas, además de los ya mencionados, son: la viscosidad de vórtices laterales,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^3 \text{ m}^2 \text{ seg}^{-1}$ ; el coeficiente de fricción lineal para esfuerzos de superficie  $k = 1.5 \times 10^{-2} \text{ m seg}^{-1}$

a disturbance. It is shown that no root of the quadratic equation can be positive or have a positive real part if  $\eta \leq 1$ , because all three coefficients are, then, found positive. Therefore,

is a necessary condition for a disturbance to grow. From its definition, the entrainment factor,  $\eta$ , of less than unity implies that the air in the surface layer does not have a sufficient amount of latent heat to lift itself to the upper layer. Therefore, the above criterion implies that the possible existence of tall, free convective clouds is necessary for the growth of a cyclone-scale disturbance.

A simple expression of the growth rate is obtained if all internal frictions are assumed to be zero. For the scale of a disturbance, the half width of the region of ascending motion,  $l$ , may be used. Assume that the two layers are of the same constant thickness,  $H$ , when undisturbed. Introduce Rossby's radius of *internal* deformation,  $R$ , defined by

where  $\sigma$  is the previously defined measure of internal static stability. If  $\sigma = 0.1$ ,  $g = 9.8 \text{ m sec}^{-2}$ ,  $H = 5 \text{ Km}$  and  $f = 5 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ , the radius of deformation,  $R$ , is 1,400 Km. Introduce, also, the non-dimensional scale parameter,  $q$ , which is defined by

The growth rate is, then, written as

It is clear, again in this special case, that no disturbance would grow unless  $\eta > 1$ . For disturbances of a few hundred kilometers (for which  $q^2 \ll 1$ ), the growth rate is almost independent of their scales. For larger disturbances, the inertial stability due to the earth's rotation becomes more effective. Therefore, when  $\eta > 1$ , the growth rate decreases as the scale increases and eventually becomes negative for very large disturbances whose scales are comparable to  $R$  or greater.

When internal frictions, especially the lateral eddy viscosity, are taken into account, very small disturbances become damped. Numerical examples of the growth rate as a function of the horizontal scale are shown in Fig. 1 for various value of  $\eta$ . The assumed values of physical constants, besides those already mentioned, are: the lateral eddy viscosity,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^3 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-1}$ ; the linear friction coefficient for surface stress,  $k = 1.5 \times 10^{-2} \text{ m sec}^{-1}$  (corresponding to  $C_D = 1.5 \times 10^{-3}$  with wind speed of  $10 \text{ m sec}^{-1}$ );



(correspondiente a  $C_D = 1.5 \times 10^{-3}$  con velocidad de viento de  $10 \text{ m seg}^{-1}$ ) y el coeficiente para el esfuerzo en la interfase  $\mu = 10^{-3} \text{ m seg}^{-1}$ .

Los coeficientes de desarrollo máximo del orden de  $10^{-6}$  a  $10^{-5} \text{ seg}^{-1}$  (o el factor de multiplicación de uno a varios días) parece muy razonable para la etapa de desarrollo de ciclones tropicales. Sin embargo, ya que las curvas de coeficientes de desarrollo se aplanan mucho para la escala entre 50 y 500 Km, no tiene caso discutir cuál escala se prefiere. Para determinar el verdadero tamaño de un ciclón tropical, la no-linealidad del problema parece ser un factor importante.

ALGUNOS RESULTADOS DE INTEGRACION NUMERICA

La integración de tiempo en el modelo comienza con un débil vórtice dado. Las distribuciones de la velocidad tangencial o del espesor de cada capa pueden especificarse como condición inicial. La distribución concurrente del resto de los campos está determinada según la ecuación diagnóstica mencionada antes. Cada grupo de ecuaciones para previsión (2) o (4) puede aplicarse para pronosticar el nuevo espesor o los campos de velocidad para un pequeño período de tiempo, ya que los flujos radiales  $\psi_1$  y  $\psi_2$  se determinan de tal manera que ambos pronósticos sean mutuamente consistentes.

Se repiten en su totalidad los procedimientos para adelantar la integración en tiempo y se hacen cálculos reales con los análogos de diferencia finita de las ecuaciones diferenciales.

Se ha hecho la integración numérica para varios casos con diferentes grupos de valores de constantes físicas, especialmente del coeficiente de arrastre, la viscosidad de vórtices laterales y el factor de arrastre y también con algunas condiciones iniciales diversas. Durante el crecimiento inicial de un vórtice débil los resultados calculados generalmente concuerdan en cada caso con lo que puede

and the coefficient for stress at the interface,  $\mu = 10^{-3} \text{ m sec}^{-1}$ .

The maximum growth rates of the order of  $10^{-6}$  to  $10^{-5} \text{ sec}^{-1}$  (or the e-folding time of one to a few days) seem to be quite reasonable for the developing stage of tropical cyclones. However, since the growth rate curves are almost flat for the scale between 50 and 500 Km, it has little sense to argue about the most preferred scale. In determining the actual size of a tropical cyclone, non-linearity of the problem is likely to be an important factor.

SOME RESULTS OF NUMERICAL INTEGRATION

The time integration of the model begins with a given weak vortex. The distribution of either the tangential velocity or the thickness of each layer may be specified as the initial condition. The concurrent distributions of all the other fields are determined from the diagnostic equations previously given. Either set of prognostic equations (2) or (4) may be applied to predict the new thickness or velocity fields for a small time period, because the radial fluxes,  $\psi_1$  and  $\psi_2$ , are determined in such a way that both predictions are mutually consistent.

The whole procedures are repeated to advance the integration further in time. Actual computations are made with the finite-difference analogues of the differential equations.

Numerical integration has been performed for several cases with different sets of values of the physical constants, especially of the drag coefficient, the lateral eddy viscosity and the entrainment factor, and also with a few different initial conditions. During the initial growth from a weak vortex in each case, the computed results are generally in agreement with what may be expected from the results

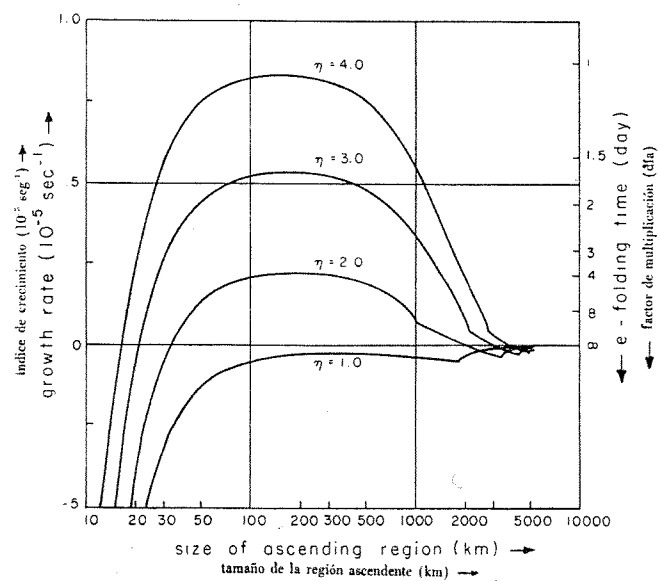


Fig. 1. Indice de crecimiento de una perturbación de pequeña amplitud en función del tamaño horizontal.

Fig. 1. The growth rate of a small amplitude disturbance as a function of the horizontal size.

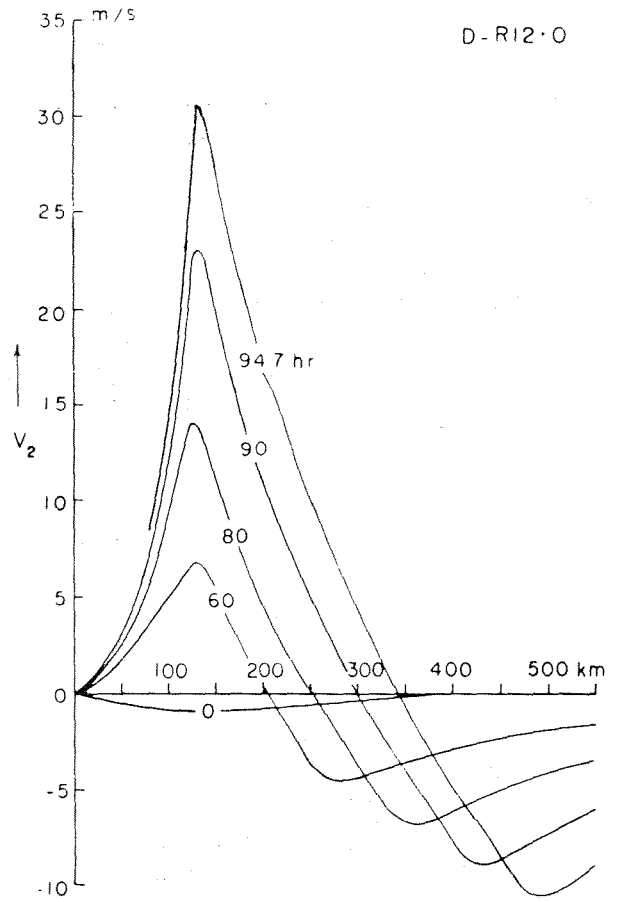
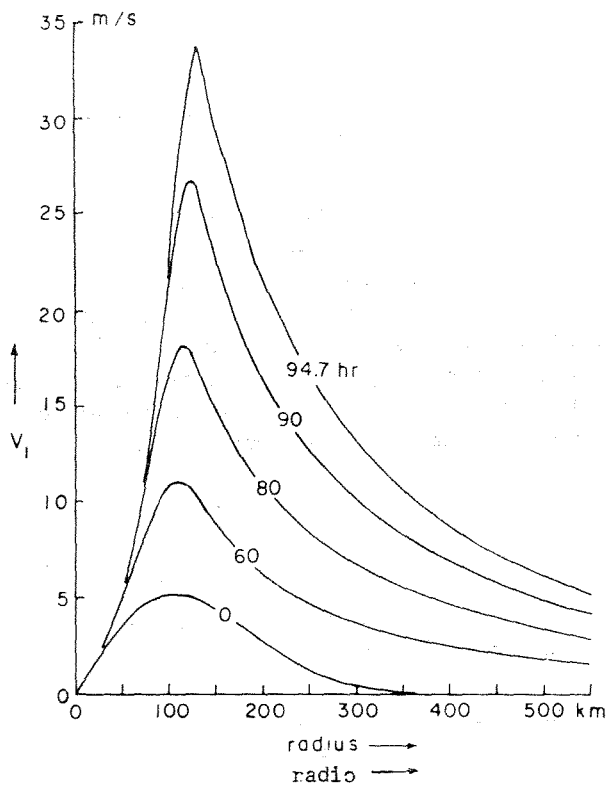


Fig. 2. Desarrollo de velocidades tangenciales de la capa inferior (izquierda) y de la capa superior (derecha).

Fig. 2. Development of tangential velocities of the lower layer (left) and of the upper layer (right).

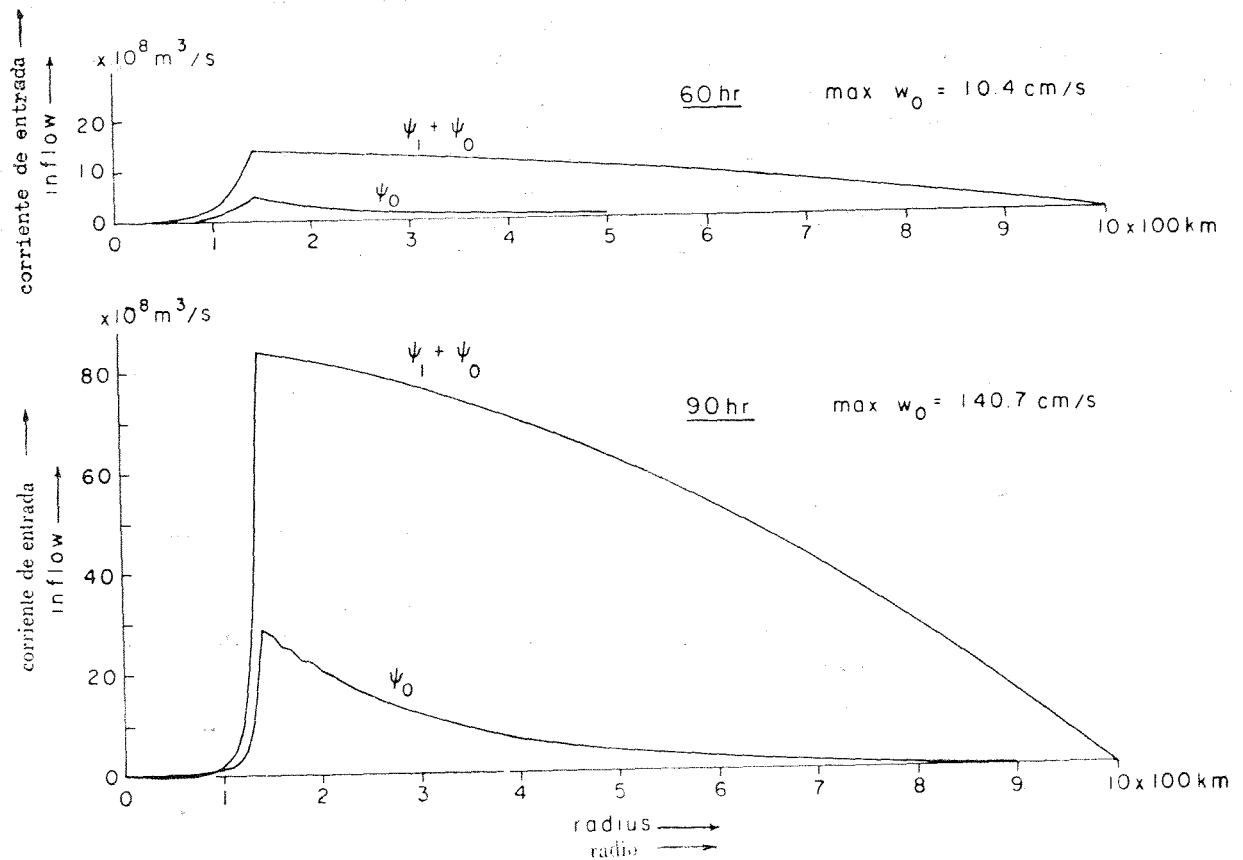


Fig. 3. Distribuciones de flujos radiales a 60 horas y a 90 horas. Esta figura se refiere al mismo caso de la Fig. 2.

Fig. 3. Distributions of the radial fluxes at 60 hours and at 90 hours. This figure refers to the same case as Fig. 2.

esperarse de los resultados del análisis linealizado. Sin embargo, al continuar el crecimiento, los campos de velocidad calculados para cada uno dan lugar a peculiares distribuciones radiales. En las Figuras 2 y 3 se muestran los resultados numéricos en un caso de ejemplo.

Los valores adoptados para algunas constantes físicas en dicho caso son:  $C_D = 1.5 \times 10^3$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^3 \text{ m}^2 \text{ seg}^{-1}$ ,  $\eta = 3.0$ . Las distribuciones iniciales de velocidades tangenciales,  $v_1$  y  $v_2$ , se muestran en las curvas marcadas con 0 (hora) en los diagramas derecho e izquierdo de la Fig. 2, respectivamente. El crecimiento de los movimientos circulares es muy lento al principio, pero se acelera de modo gradual al aumentar  $v_1$ , pues el esfuerzo de superficie es proporcional al cuadrado de  $v_1$ . Después de alcanzar el máximo  $v_1$ , a unos  $15 \text{ m seg}^{-1}$  o algo así, el crecimiento se acelera catastróficamente y el cálculo se detiene en 94.7 horas desde el principio.

La causa directa para la detención es el desarrollo de irregularidades del cálculo. Sin embargo, la verdadera causa de la dificultad claramente parece estar en la misma formulación del modelo. Como puede verse en la parte inferior de la Fig. 3, el casi discontinuo cambio en  $\psi_0$ .

of the linearized analysis. However, as further the growth continues, the computed velocity fields in every case develop into peculiar radial distributions. The numerical results of an exemplary case are shown in Figures 2 and 3.

The adopted values of some of the physical constants in this case are:  $C_D = 1.5 \times 10^3$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^3 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-1}$ ,  $\eta = 3.0$ . The initial distributions of the tangential velocities  $v_1$  and  $v_2$ , are shown by the curves marked with 0 (hour) on the left and right diagrams of Fig. 2, respectively. The growth of the circular motions is very slow initially, but gradually accelerated as  $v_1$  increases, because the surface stress is proportional to the square of  $v_1$ . After the maximum  $v_1$  reaches about  $15 \text{ m sec}^{-1}$  or so, the growth is catastrophically accelerated and the computation is brought to a halt at 94.7 hours after the start.

The direct cause for the halt is development of computational irregularities. However, the real cause for the trouble clearly seems to lie in the formulation of the model itself. As seen from the lower part of Fig. 3, the almost discontinuous change in  $\psi_0$  at about 130 Km from the center

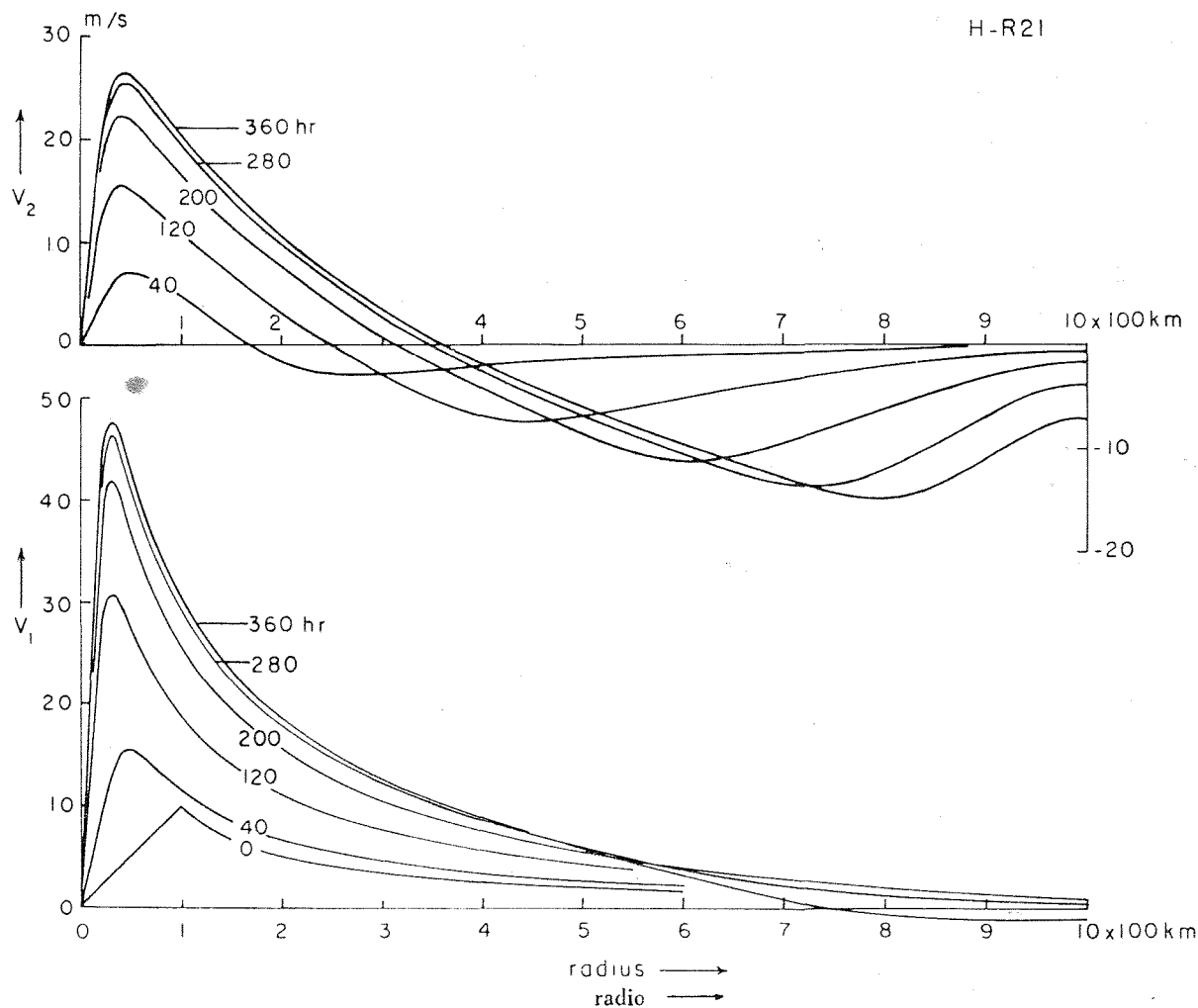


Fig. 4. Desarrollo de velocidades tangenciales (Resultados tentativos de un modelo modificado).

Fig. 4. Development of tangential velocities. (Tentative results of a modified model).

cerca de 130 Km desde el centro, indica que el área de  $w_0$  positivo y en consecuencia, el área de convección activa de nubes están confinadas en una región anular muy angosta. La tendencia hacia la estrecha región de convección de nubes ya es aparente en la distribución de  $\psi_2$  en 60 horas, mucho antes de desarrollarse las irregularidades del cálculo.

En tanto que el efecto de estrechamiento es un resultado de todas las hipótesis interrelativas en el modelo formulado, el eslabón más débil del modelo parece ser la formulación de la corriente de entrada de la capa de superficie. La fórmula aproximada (8) se basa en el supuesto de que el momento angular disipado por el esfuerzo de superficie se compensa localmente por la clara advección del momento angular absoluto debido al flujo radial. En otras palabras, no se toman en consideración el balance de momento angular del flujo de masa vertical o del esfuerzo de vórtice arriba de la capa de superficie. Una estimación burda muestra que si el primero contribuye algo en el caso de una divergencia o convergencia de  $\psi_0$  tan grande como la Fig. 3, resulta despreciable.

Han sido ensayados unos cuantos tipos de modificaciones en la fórmula (8). Las distribuciones resultantes de campos de velocidad demuestran ser muy sensibles a dichas modificaciones, indicándose algunos resultados interesantes en la Fig. 4 con el uso de una fórmula alterna

$$\left(f + \frac{v_1}{r}\right) \psi_0 = C_D |v_1| v_1 r$$

En lugar de (8) y además, con un débil supuesto para introducir una variación de espacio-tiempo del factor de arrastre dependiente de los campos de espesor calculados. Sin embargo, queda una dificultad teórica para considerar consistentes tanto la integral del momento angular como la integral de energía en este caso y los resultados en la Fig. 4 deben considerarse provisionales.

El presente modelo, si va a considerarse como propuesto específicamente para un ciclón tropical, resulta defectuoso. Pero es el principio de un nuevo encaramiento para entender mejor los ciclones tropicales desde el punto de vista dinámico. Debe hacerse más trabajo siguiendo este tratamiento.

#### AGRADECIMIENTO

Este estudio fue posible por el apoyo de la National Science Foundation bajo el Subsidio MSF-G16837.

#### BIBLIOGRAFIA

- CHARNEY, J. G. & A. ELIASSEN. 1949. A Numerical Method for Predicting the Perturbations of the Middle Latitude Westerlies. *Tellus*, 2:38-54.
- ELIASSEN, A. 1952. Slow Thermally or Frictionally Controlled Meridional Circulation in a Circular Vortex. *Astrophysica Norvegica*, 5:19-60.
- 1959. On the Formation of Fronts in the Atmosphere. In *The Atmosphere and the Sea in Motion*, New York (Rockefeller Institute Press), 277-287.
- JORDAN, C. L. 1958. Mean Soundings for the West Indies Area. *Jour. Meteorology*, 15:91-97.

indicates that the area of positive  $w_0$  and, therefore, the area of active cloud convection are confined in a very narrow annular region. The tendency toward the pinched region of cloud convection is already apparent in the distribution of  $\psi_0$  at 60 hours, long before the computational irregularities develop.

While this pinch effect is a result of all the interlocking hypotheses which have been formulated into the model, the weakest link of the model seems to be the formulation of the surface layer inflow. The approximate formula (8) is based on the assumption that the angular momentum dissipated by the surface stress is locally compensated by the net advection of the absolute angular momentum due to the radial flux. In other words, no contribution to the angular momentum budget from the vertical mass flux or from the eddy stress at the top of the surface layer is taken into account. A rough estimate shows that the contribution from the former alone is anything but negligible if the divergence or convergence of  $\psi_0$  is as large as shown in Fig. 3.

A few types of modifications of formula (8) have been tried. The resulting distributions of velocity fields have proved to be quite sensitive to such modifications. Some interesting results such as shown in Fig. 4 have been obtained with the use of an alternative formula

in lieu of (8) and, in addition, with a crude assumption to introduce space-time variation of the entrainment factor depending on the computed thickness fields. However, there remains a theoretical difficulty in making both the angular momentum integral and the energy integral consistent in this case. The results shown in Fig. 4 should be considered tentative.

The present model, if it is regarded as a specifically proposed model of a tropical cyclone, has proved to be defective. However, this is the beginning of a new approach toward a better understanding of tropical cyclones from the dynamical side. More work has to be done on this general line of approach.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

This study was made possible through the support of the National Science Foundation under Grant NSF-G 16837.

#### BIBLIOGRAPHY