

III CONFERENCIA TÉCNICA SOBRE HURACANES Y METEOROLOGÍA TROPICAL
 TECHNICAL CONFERENCE ON HURRICANES AND TROPICAL METEOROLOGY

México, D. F., Jun. 6-12, 1963

5a. SESIÓN

5th SESSION

DESARROLLO DE HURACANES (I)
 HURRICANE DEVELOPMENT (I)

*SOBRE FORMACION E INTENSIFICACION
 DE CICLONES TROPICALES POR CONVECCION
 PROFUNDA DE CUMULUS*

*ON FORMATION AND INTENSIFICATION
 OF TROPICAL CYCLONES BY DEEP CUMULUS
 CONVECTION*

H. L. Kuo *

H. L. Kuo *

LIBERACION DE CALOR LATENTE POR
 CONVECCION PROFUNDA DE CUMULUS

RELEASE OF LATENT HEAT BY
 DEEP CUMULUS CONVECTION

Está bien establecido que la principal fuente de energía para desarrollo de ciclones tropicales es la liberación de calor latente de condensación. Hablando en general, el calor latente puede ser liberado por medio de dos mecanismos enteramente diferentes, a saber, (i) por movimiento vertical medio y (ii) por convección profunda de cumulus a menor escala.

El método de incluir el calor latente en el estudio de movimientos a gran escala adoptando el primer mecanismo es bien conocido; consiste simplemente en obtener Q_e de la fórmula usual

It is well established that the main energy source for the development of tropical cyclones is the release of latent heat of condensation. Broadly speaking, latent heat can be released through two entirely different mechanisms, namely (i) by mean vertical motion, and (ii) by small scale, deep cumulus convection.

The method of including the latent heat in the study of large scale motions on the assumption of the first mechanism is well known; it is simply to obtain Q_e from customary formula

$$Q_e = -L \frac{dq_s}{dt} = -L \omega \frac{\partial q_s}{\partial p} \quad (1)$$

$$\text{para } q > q_s \text{ and } \omega < 0$$

$$Q_e = 0 \text{ para } q < q_s \text{ or } \omega > 0$$

e incluirla como término de calentamiento en la ecuación termodinámica. Esta formulación sirve bien en regiones con estratificación absolutamente estable. Sin embargo, cuando se aplica a regiones con estratificación condicionalmente inestable, este tipo de liberación de calor latente desarrolla celdas de convección de banda estrecha y fuerte en la región ascendente saturada (véase Kuo, 1961).

Para vencer esta dificultad en nuestro modelo dinámico de huracán, suponemos en cambio que el calor latente es liberado por el segundo proceso, esto es, por convección profunda de cumulus, de acuerdo con los resultados de observación obtenidos por Malkus y Riehl (1960).

and include it as a heating term in the thermodynamic equation. This formulation works well in regions of absolutely stable stratification. However, when applied to regions of conditionally unstable stratification, this type of latent heat release results in the development of strong, narrow band convection cells in the saturated ascending region (see Kuo, 1961).

To overcome this difficulty in our dynamic hurricane model, we assume instead that the latent heat is released by the second process, that is, by deep cumulus convections, in accordance with the observational results obtained by Malkus and Riehl (1960).

* Universidad de Chicago.

* The University of Chicago.

Con objeto de calcular los cambios de las distribuciones de T y q resultantes de esa convección profunda de cumulus, se hacen las siguientes suposiciones respecto a tales convecciones:

- (i) La convección de cumulus ocurre siempre en regiones de capa profunda con estratificación condicionalmente inestable y convergencia de nivel bajo medio.
- (ii) Tales movimientos convectivos llevan aire de superficie a todos los niveles hasta gran altura, de modo que dentro de la nube, las distribuciones verticales de temperatura y coeficiente de mezcla son los de humedad adiabática a través del nivel de condensación.
- (iii) La base de la nube está al nivel de condensación del aire de la superficie y su cima se extiende hasta el nivel donde la humedad adiabática a través del nivel de condensación encuentra el perfil de temperatura circundante o algo más arriba.
- (iv) Hay una continua mezcla del aire de la nube y aire circundante en el mismo nivel de modo que el calor y la humedad transportados por el aire de la nube son impartidos al aire circundante.

Se mostrará que con estas suposiciones los cambios de T y de q del campo medio en cada punto pueden ser determinados a partir de la temperatura (T_s) y el coeficiente de mezcla (q_s) de la nube, el del aire circundante y la acesión total de humedad a una columna unitaria de aire por medio de advección y evaporación.

De la ecuación de transporte para el coeficiente de mezcla, obtenemos la siguiente acesión total de vapor de agua en una columna unitaria de aire por medio de advección y difusión.

$$\frac{p_0}{g} \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = \frac{p_0}{g} \int_0^1 \frac{\partial q}{\partial t} d\zeta = \frac{p_0}{g} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \int_0^1 vq d\zeta + \frac{gC_d V_0}{RT_0} (q_e - q_0) \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(Ar \frac{\partial \bar{q}}{\partial r} \right) \right\} \quad (2)$$

donde $\zeta = p/p_0$.

Nuestro siguiente problema es determinar cuánta acesión de humedad es precipitada y cuánta queda almacenada en la atmósfera para aumentar su humedad. Ya que dentro de la nube-cumulus la temperatura es T_s y el coeficiente de mezcla es q_s , los incrementos de temperatura y de coeficiente de mezcla del aire de la nube relativo al aire circundante, son dados respectivamente por (ver Fig. 1).

$$\delta_p T = T_s - T \quad (3a)$$

$$\delta_c q = q_s(T_s) - q \quad (3b)$$

In order to be able to compute the changes of the distributions of T and q resulting from such deep cumulus convection, the following assumptions concerning such convections are made:

- (i) Cumulus convections always occur in regions of deep layer of conditionally unstable stratification and mean low level convergence.
- (ii) Such convective motions bring surface air to all levels up to a great height, so that inside the cloud the vertical distributions of temperature and mixing ratio are that of the moist adiabat through the condensation level.
- (iii) The base of the cloud is at the condensation level of the surface air and the top extends to the level where the moist adiabat through the condensation level meets the environmental temperature profile, or somewhat higher.
- (iv) There is a continuous mixing of the cloud air and the environmental air at the same level, so that the heat and moisture carried up by the cloud air are imparted to the environmental air.

It will be shown that, with these assumptions, the changes of T and q of the mean field at every point can be determined from the temperature (T_s) and the mixing ratio (q_s) of the cloud, that of the environmental air and the total accession of moisture to a unit column of air through advection and evaporation.

From the transport equation for the mixing ratio we obtain the following total accession of water vapor into a unit column of air through advection and diffusion:

where $\zeta = p/p_0$.

Our next problem is to determine how much of this accession of moisture is precipitated out and how much is stored up in the atmosphere to increase its humidity. Since inside the cumulus cloud the temperature is T_s and the mixing ratio is q_s , the increases of temperature and mixing ratio of the cloud air relative to the environmental air are respectively given by (see Fig. 1).

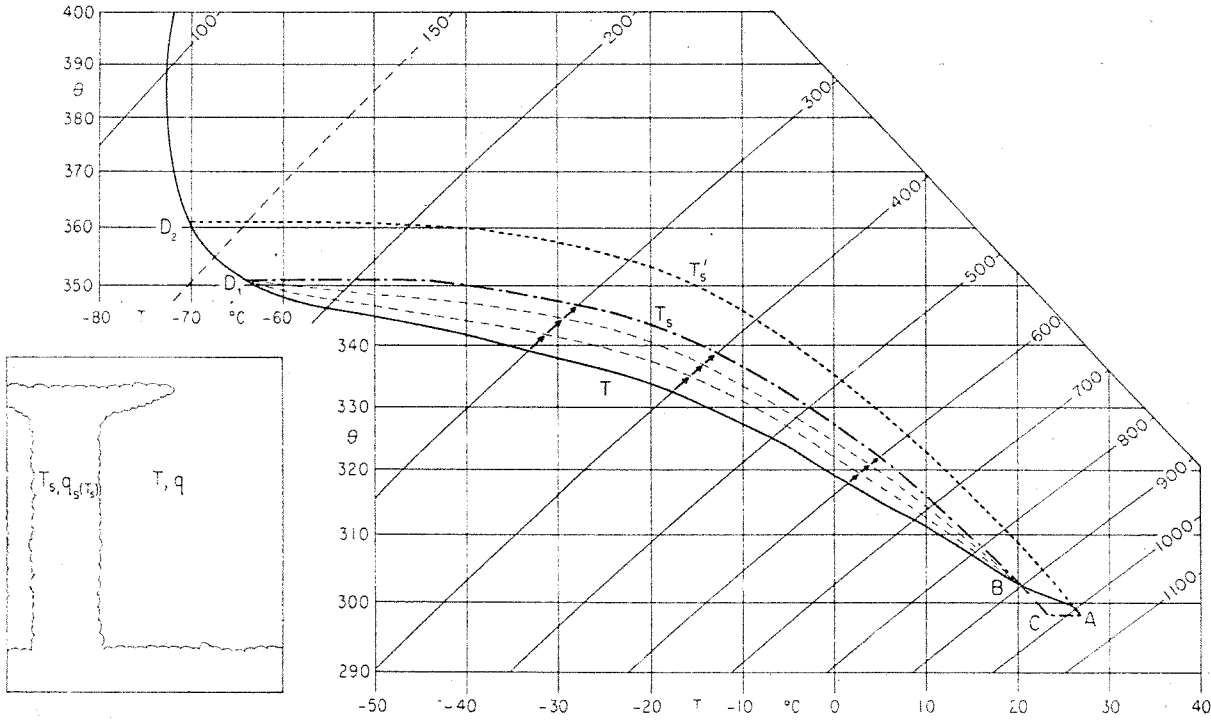


Fig. 1.—Distribuciones verticales de T , q y T_s y $q_s(T_s)$ y calentamiento por liberación de calor latente.

Fig. 1.—Vertical distributions of T , q and T_s and $q_s(T_s)$ and the heating by latent heat release.

Suponiendo que la subida de la temperatura $\delta_p T$ es producida por liberación de calor latente *in situ*, entonces una cantidad de vapor de agua $\delta_p q$ debió condensarse como agua líquida y precipitarse del aire, lo cual es dado por

$$\delta_p q = \frac{c_p (T_s - T)}{L} \tag{3c}$$

Assuming that the rise of temperature $\delta_p T$ is brought about by the release of latent heat *in situ*, then an amount of water vapor $\delta_p q$ must have been condensed into liquid water and precipitated out of the air, which is given by

Luego, para cambiar una masa unitaria del aire circundante en un aire de nube-cumulus, se necesita la siguiente acesión de vapor de agua

Thus, to change a unit mass of the environmental air into the cumulus cloud air the following accession of water vapor is needed

$$\delta q = \delta_c q + \delta_p q = q_s(T_s) - q + \frac{c_p}{L} (T_s - T) \tag{4}$$

Integrando esta expresión sobre la masa total de la nube sobre un área unitaria obtenemos la acesión total de humedad necesaria para lograr las distribuciones de temperatura y humedad de la nube cumulus, lo que es dado por

Integrating this expression over the total mass of the cloud over a unit area we obtain the total accession of moisture needed to bring about the temperature and moisture distributions of the cumulus cloud, which is given by

$$\begin{aligned} \frac{P_o}{g} \delta \bar{q}_2 &= \frac{P_o}{g} (\delta_p \bar{q} + \delta_c \bar{q}) \\ &= \frac{P_o}{g} \int_{\zeta_t}^{\zeta_c} \left\{ \frac{c_p}{L} (T_s - T) + q_s(T_s) - q \right\} d\zeta \end{aligned} \tag{5}$$

donde ζ_t y ζ_c son valores de ζ en la cima y fondo de la nube, respectivamente.

where ζ_t and ζ_c are the values of ζ at the top and bottom of the cloud, respectively.

Por otro lado, la verdadera accesión de humedad a la columna de aire durante un intervalo de tiempo Δt por advección y evaporación de la difusión inferior y horizontal, es

$$\frac{p_0}{g} \delta \overline{q_1} = \frac{p_0}{g} \frac{\partial \overline{q_1}}{\partial t} \Delta t \quad (6)$$

donde $\frac{\partial \overline{q_1}}{\partial t}$ está dado por la ecuación (2).

Antes de que haya tenido lugar la completa saturación, podemos tomar Δt suficientemente pequeño para que $\delta \overline{q_1}$ sea menor que $\delta \overline{q_2}$; bajo tales condiciones, el abastecimiento de humedad $\delta \overline{q_1}$ es insuficiente para producir nubes cumulus en toda la región y por lo tanto, sólo una fracción l del cielo estará cubierta por nubes cumulus, lo cual es dado por

$$l = \frac{\delta \overline{q_1}}{\delta \overline{q_2}} \quad (7)$$

Nótese que si tomamos la duración del cumulus individual como nuestro Δt en la ecuación (6), entonces el coeficiente l representará realmente el porcentaje medio de la cubierta de nubes cumulus del cielo en el tiempo que estamos considerando.

De acuerdo con nuestra suposición (iv), la convección de cumulus va acompañada por fuerte turbulencia que ocasionará una completa mezcla del aire de la nube con el aire circundante. Suponiendo que en el tiempo $t + \Delta t$ la temperatura del aire circundante antes de mezclarse es T^* , entonces la temperatura media después de la mezcla es dada por

$$\begin{aligned} T_{t+\Delta t} &= l T_s + (1-l) T^* \\ &= T^* + (T_s + T^*) l \\ &= T^* + \Delta T_{Q_e} \end{aligned} \quad (8)$$

donde ΔT_{Q_e} es aumento de temperatura resultante de la liberación de calor latente *in situ*. Ya que T^* es la temperatura del aire en $t + \Delta t$ cuando no hay calor latente liberado, es dada por

$$T^* = T_t - \Delta t \left\{ \frac{\partial(vrT)}{r\partial r} + \frac{\partial(\omega T)}{\partial \zeta} - \frac{x\omega T}{\zeta} - \Delta t (K_j \Delta T) - \frac{Q_r}{c_p} \right\} \quad (9)$$

Similarmente, encontramos que el valor de q en el tiempo $t + \Delta t$ después de la mezcla es dado por

$$q_{t+\Delta t} = q^* + l [q_s(T_s) - q^*] \quad (10)$$

donde q^* es el coeficiente de mezcla del aire circundante.

Ya que el cambio de temperatura $\Delta T(Q_e)$ en la ecuación (8) resulta de la liberación de calor latente de condensación, el índice de accesión de calor latente Q_e al sistema de gran escala está dado por

On the other hand, the actual accession of moisture to the column of air during a time interval Δt by advection and evaporation from below and horizontal diffusion is

where $\frac{\partial \overline{q_1}}{\partial t} \Delta t$ is given by eq. (2).

Before complete saturation has taken place, we can always take Δt small enough so that $\delta \overline{q_1}$ is less than $\delta \overline{q_2}$; of moisture $\delta \overline{q_1}$ is insufficient to produce cumulus clouds in the whole region, and therefore only a fraction l of the sky will be covered by cumulus cloud, which is given by

Note that if we take the duration of the individual cumulus as our Δt in eq. (6), then the ratio l will actually represent the average percentage cumulus-cloud coverage of the sky at the time under consideration.

According to our assumption (iv), the cumulus convection is accompanied by strong turbulence which is to bring about a complete mixing of the cloud air with the surrounding air. Assuming that at time $t + \Delta t$ the temperature of the environment air before mixing is T^* , then the mean temperature after mixing is given by

where ΔT_{Q_e} is temperature increase resulting from the release of latent heat *in situ*. Since T^* is the temperature of the air at $t + \Delta t$ when no latent heat is released, it is given by

Similarly, we find the value of q at time $t + \Delta t$ after mixing is given by

where q^* is the mixing ratio of the environmental air.

Since the temperature change $\Delta T(Q_e)$ in eq. (8) results from the release of latent heat of condensation, the rate of accession of latent heat Q_e to the large-scale system is given by

$$\begin{aligned}
 Q_e &= c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{q_e} = c_p (T_s - T) \frac{l}{\Delta t} \\
 &= c_p (T_s - T) \frac{\partial q_1}{\partial t} / \delta q_2
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Así el cambio de distribución de temperatura del sistema a gran escala se puede obtener incluyendo Q_e como dado por (11) en la ecuación termodinámica.

Debe señalarse que T_s y $q_s(T_s)$ de la humedad adiabática representa por medio del nivel de condensación los valores límites de T y q que se pueden obtener por la liberación de calor latente, por lo tanto son indicadores de la intensidad máxima de las tormentas tropicales que se desarrollan por medio de este proceso.

MODELOS DINAMICOS

Se han construido dos modelos dinámicos para estudiar la formación de tormentas tropicales basados ambos en el mismo proceso físico discutido arriba, pero con aproximaciones distintas. En el primer modelo, sólo se supone equilibrio hidrostático. Los desarrollos del sistema son estudiados por integración de dos ecuaciones de movimiento y la ecuación termodinámica y la ecuación- q directamente.

En el segundo modelo, se supone un equilibrio permanente de viento-gradiente entre el gradiente de presión radial, la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga. El desarrollo del sistema en este modelo se lleva a cabo por la ecuación termodinámica y la ecuación- q junto con un pronóstico del viento tangencial en la capa de frontera de la superficie, en tanto que la función de corriente ψ para el flujo meridional se obtiene de la siguiente ecuación diagnóstica:

$$A \nabla_1^2 \psi + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + B \left\{ 2r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) - \frac{1-n}{r\zeta} \frac{\partial r \psi}{\partial r} \right\} + H = 0
 \tag{12}$$

$$A = -R \zeta^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}, \quad B = R \zeta^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad C = \left(f + \frac{2u}{r} \right) \left(f + \frac{\partial ru}{r \partial r} \right)$$

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{R}{C_{ps}} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \left(f + \frac{2u}{r} \right) \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(K_s \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + K_r \nabla_1^2 u \right] \right\} \\
 &+ \frac{R}{\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(B_s \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta \partial r} \right) + B_r \nabla_1^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right]
 \end{aligned}
 \tag{12a}$$

Tanto en la ec. (12a) como en la termodinámica, el índice de calor no-adiabático Q se supone dado por Q_e de la ec. (11). Una aproximación de dos capas en este modelo debe integrarse primero, lo que convierte a (12) en una ecuación monodimensional en r .

ANALISIS DE ESTABILIDAD DE LOS MODELOS DINAMICOS

Se ha llevado a cabo un análisis lineal de la estabilidad del sistema simétrico-circular y se encontró que el índice de

Thus the change of temperature distribution of the large-scale system can be obtained by including Q_e as given by (11) in the thermodynamic equation.

It may be pointed out that T_s and $q_s(T_s)$ of the moist adiabat through the condensation level represent the limiting values of T and q that can be attained by the release of latent heat, therefore they are indicators of the maximum intensity of the tropical storms developing through this process.

DYNAMIC MODELS

Two dynamical models have been constructed for the study of the formation of tropical storms, both are based on the same physical processes discussed above, but with different approximations. In the first model, only hydrostatic equilibrium is assumed. The developments of the system are studied by integrating the two equations of motion and the thermodynamic equation and the q -equation directly.

In the second model, permanent gradient-wind balance between the radial pressure gradient, the Coriolis force and the centrifugal force is assumed. The development of the system in this model is carried by the thermodynamic equation and the q -equation, together with a prediction of the tangential wind in the surface boundary layer, whereas the stream function ψ for the meridional flow is obtained from the following diagnostic equation:

Both in eq. (12a) and in the thermodynamic equation the non-adiabatic heating rate Q is assumed to be given by Q_e of eq. (11). A two layer approximation of this model is being integrated first, which simplifies (12) into a one-dimensional equation in r .

STABILITY ANALYSIS OF THE DYNAMIC MODELS

A linear analysis of the stability of the circular-symmetric system has been carried out and it is found that

crecimiento ν es dado por

the growth rate ν is given by

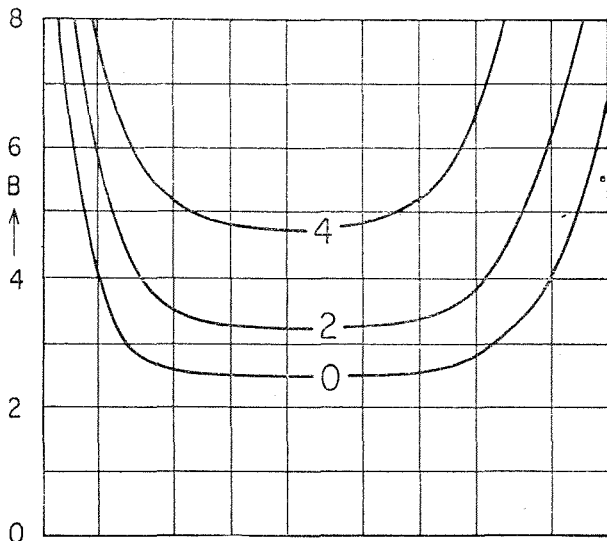
$$\nu = \left\{ -C \pm \frac{A}{2a^2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2aB}{A}\right)^2 \mp 1} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{K\pi^2}{a^2}$$

donde A, B, C son dados por (11a), K es la viscosidad de vórtice horizontal y a es la longitud horizontal de semi-onda.

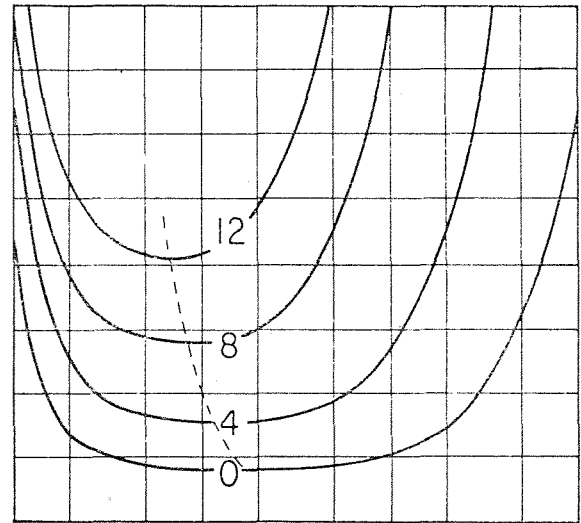
Esta ecuación muestra que la inestabilidad se puede producir cuando ya sea que A o C o ambas son negativas o cuando B está sobre un cierto valor crítico, correspondiente a inesta-

where A, B, C are given by (11a), K is the horizontal eddy viscosity and a is the horizontal half-wave length.

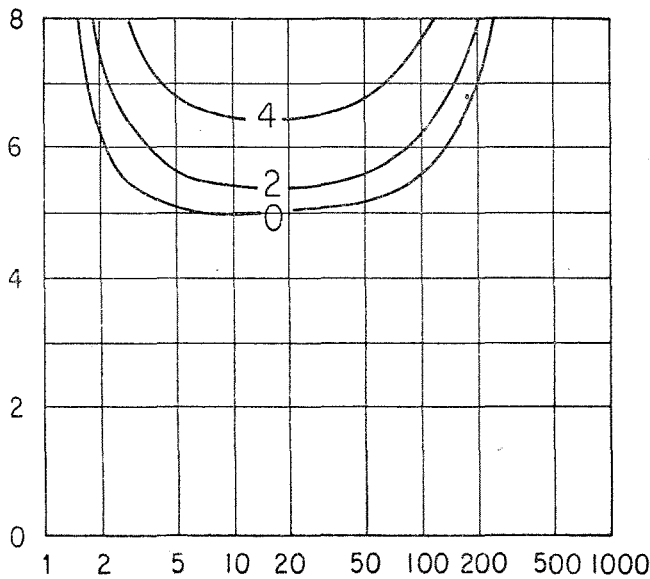
This equation shows that instability may arise when either A or C or both are negative, or when B is above a certain critical value, corresponding to dynamic, static



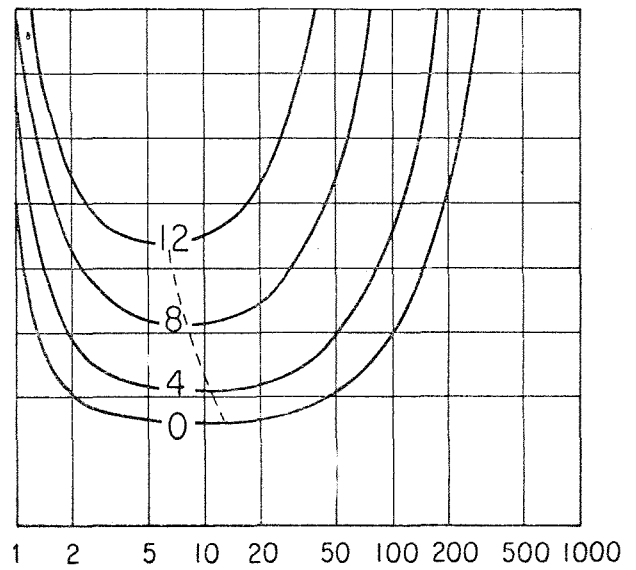
(a) $\longrightarrow a/h$



(b) $\longrightarrow a/h$



(c) $\longrightarrow a/h$



(d) $\longrightarrow a/h$

Fig. 2.—Valores del coeficiente de crecimiento en 10^{-5} seg^{-1} .

- a $A = 10^{-4} \text{ seg}^{-2}$ $C = 6.25 \times 10^{10} \text{ seg}^{-2}$
- b $A = 10^{-5} \text{ seg}^{-2}$ $C = 6.25 \times 10^{10} \text{ seg}^{-2}$
- c $A = 10^{-4} \text{ seg}^{-2}$ $C = 2.5 \times 10^9 \text{ seg}^{-2}$
- d $A = 10^{-5} \text{ seg}^{-2}$ $C = 2.5 \times 10^9 \text{ seg}^{-2}$

Fig. 2.—Values of the growth rate in 10^{-5} sec^{-1} .

- a $A = 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$ $C = 6.25 \times 10^{10} \text{ sec}^{-2}$
- b $A = 10^{-5} \text{ sec}^{-2}$ $C = 6.25 \times 10^{10} \text{ sec}^{-2}$
- c $A = 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$ $C = 2.5 \times 10^9 \text{ sec}^{-2}$
- d $A = 10^{-5} \text{ sec}^{-2}$ $C = 2.5 \times 10^9 \text{ sec}^{-2}$

bilidades dinámicas, estáticas y baroclínicas respectivamente. De particular interés es la inestabilidad asociada con el gradiente de temperatura radial, representado por B . El índice de crecimiento que corresponde a varios valores B está representado en la Fig. 2. Se ve que el coeficiente de crecimiento máximo está asociado con perturbaciones cuya longitud de semi-onda es casi 10-30 veces la profundidad d , que es como el radio de la región ascendente de las tormentas tropicales.

Otro resultado significativo de este análisis de estabilidad es que la liberación de calor latente representado por (11) induce inestabilidad en modo similar al efecto de B , por lo tanto la convergencia a bajo nivel tiene una tendencia auto-excitante si se puede liberar suficiente calor latente. Así, el gradiente de temperatura radial puede ser generado una vez que el proceso de liberación de calor latente haya sido puesto en acción

and baroclinic instabilities, respectively. Of particular interest is the instability associated with the radial temperature gradient represented by B . The growth rate corresponding to various B -values are represented in Fig. 2. It is seen that the maximum growth rate is associated with perturbations whose half-wave length is about 10-30 times the depth d , which is about the radius of the ascending region of the tropical storms.

Another significant result of this stability analysis is that the release of latent heat represented by (11) induces instability in a way similar to the effect of B , therefore the low level convergence has a self-exciting tendency if enough latent heat can be released. Thus the large radial temperature gradient can be generated once the latent heat releasing process has been set in action.

BIBLIOGRAFIA

- KUO, H. L. 1961. Convection in Conditionally Unstable Atmosphere. *Tellus*, 13:441-459.
- MALKUS, J. S. & H. RIEHL. 1960. On the Dynamics and Energy Transformations in Steady-State Hurricanes. *Tellus*, 12:1-20.

BIBLIOGRAPHY

