III Conferencia Técnica sobre Huracanes y Meteorología Tropical
Technical Conference on Hurricanes and Tropical Meteorology

México, D. F., Jun. 6-12, 1963

5a. Sesión

5th Session

Desarrollo de Huracanes (I)
Hurricane Development (I)

SOBRE EL CRECIMIENTO DE LA DEPRESION HURACANADA, UN RESUMEN *

Jule G. Charney * * y Arnt Eliassen * * *

RESUMEN

Se demuestra que la corriente entrante friccional de aire húmedo en una atmósfera tropical condicionalmente inestable causa una perturbación de escala ciclónica de pequeña amplitud simétrica que se amplifica. El mecanismo de crecimiento comprende una interacción cooperativa entre las celdas de cumulus individuales y la perturbación a gran escala. Las celdas de cumulus en la región de la corriente entrante friccional proporcionan energía de calor latente a la perturbación y la perturbación proporciona humedad a las celdas de cumulus.

Un análisis a escala indica que es apropiado usar las ecuaciones de equilibrio para el macro-movimiento y en este caso el efecto de fricción sobre la capa de frontera de una perturbación a pequeña amplitud puede incorporarse como condición en la velocidad vertical en la cima de la capa de frontera friccional. Se argumenta que la humedad media en un sistema de nubes en cumulus convectivos en equilibrio estadístico con circulación a escala ciclónica es apreciablemente menor que su valor de saturación. Luego la atmósfera es gravitacionalmente estable para el proceso a macro-escala, aunque sea gravitacionalmente inestable para el proceso convectivo a micro-escala. La inestabilidad a macro-escala no es en consecuencia gravitacional, sino esencialmente dependiente de la fricción superficial, si bien recibe su energía del calor latente.

INTRODUCCION

Las observaciones demuestran que antes que pueda convertirse la depresión tropical asimétrica de núcleo frío normal en huracán debe de alguna manera transformarse en depresión de núcleo cálido con mayor grado de simetría circular. En esa etapa parece que un mecanismo dinámico puede explicar su amplificación. Demostraremos en el presente artículo que la convergencia de la capa de frontera friccional hará que la convección de cumulus se acople al movimiento a gran escala de tal modo que le proporcione energía en grado siempre creciente.

---

* *El artículo completo aparecerá en el* Journal of Atmospheric Sciences, *21(1), 1964. El trabajo fue auspiciado por la National Science Foundation bajo Subsidio G 18985.*

* * *Instituto Tecnológico de Massachusetts.*

* * * *Universidad de Oslo.*

ON THE GROWTH OF THE HURRICANE DEPRESSION, A SUMMARY *

Jule G. Charney * * and Arnt Eliassen * * *

ABSTRACT

It is shown that the frictional indraft of moist air in a conditionally unstable tropical atmosphere will cause a small-amplitude axially-symmetric disturbance of cyclone scale to amplify. The growth mechanism involves a cooperative interaction between the individual cumulus cells and the large-scale disturbance. The cumulus cells in the region of frictional indraft supply the disturbance with latent heat energy, and the disturbance supplies the cumulus cells with moisture.

A scale-analysis indicates that it is appropriate to use the balance equations for the macro-motion, and in this case the effect of friction in the boundary-layer of a small amplitude disturbance may be incorporated as a condition on the vertical velocity at the top of the frictional boundary layer. It is argued that the mean humidity in a system of convecting cumulus clouds in statistical equilibrium with the cyclone-scale circulation is appreciably less than its saturation value. The atmosphere is then gravitationally stable for the macro-scale process, even though it is gravitationally unstable for the micro-scale convective process. The macro-scale instability is therefore not a gravitational instability but is one that depends essentially on surface friction, although it receives its energy from latent heat.

INTRODUCTION

Observations show that before the normal cold-core, asymmetric tropical depression can grow into a hurricane it somehow must become transformed into a warm-core depression with a greater degree of circular symmetry. At that stage there appears to be a dynamical mechanism that can account for the amplification. We shall demonstrate in the present article that frictional boundary layer convergence will cause cumulus convection to be coupled to the large-scale motion in such a manner as to supply it with energy at an ever-increasing rate.

---

* *The complete article will appear in the* Journal of Atmospheric Sciences, *21(1), 1964. The work was supported by the National Science Foundation under Grant G 18985.*

* * *Massachusetts Institute of Technology.*

* * * *University of Oslo.*

Yanai (1961) ha dado pruebas en apoyo de la hipótesis de que la formación de la depresión de núcleo frío se debe a inestabilidad de la deformación horizontal en los estes tropicales. Se puede especular que para amplitudes suficientemente grandes, la convergencia friccional de humedad con sus efectos cuadráticos sobre los vientos de superficie superarán al mecanismo de inducción de energía y causarán tanto la creciente simetría como el continuo crecimiento. Nuestra presente demostración no se ocupa de dicho proceso para nada. Su propósito es meramente indicar la importancia probable de la fricción de superficie y la convección de cumulus acoplados en el mecanismo de amplificación de la depresión huracanada. También hemos estudiado el sistema de amplitud finita en colaboración con el Dr. Y. Ogura, pero en este caso uno de los problemas no resueltos es encontrar el mecanismo de la interacción friccional de superficie con grandes números de Rossby.

1. INESTABILIDAD DE LA DEPRESIÓN TROPICAL. LA DEPRESIÓN Y LA CONVECCIÓN DE CUMULUS COMO FENÓMENOS COOPERATIVOS. En analogía con la teoría de los ciclones extratropicales, es tentador atribuir la formación del huracán a alguna forma de inestabilidad hidrodinámica y de hecho se han propuesto varios mecanismos. El crecimiento de la perturbación se ha atribuido diversamente a la inestabilidad de discontinuidades de temperatura (inestabilidad frontal), de gradientes de temperatura horizontal (inestabilidad baroclínica), del momento angular decreciente radialmente a lo largo de superficies isentrópicas en un vórtice circular (inestabilidad rotacional) o a deformación horizontal con un extremo en el perfil de vorticidad abosluta (inestabilidad de Rayleigh). La última puede ser causa de la onda del este de núcleo frío, pero no ciertamente del huracán. En opinión de los autores no hay buenas pruebas citadas que indiquen que existen otras inestabilidades o si las hay, que puedan originar los movimientos observados. Sin embargo, hay una quinta clase de inestabilidad que indudablemente existe. Es la inestabilidad gravitacional asociada a un decremento en la entropia de aire saturado con la altura (inestabilidad condicional). Pero, la depresión puede no ser simplemente una mezcla convectiva a gran escala, ya que J. Bjerknes (1938) y E. Höiland (1939) han demostrado que la inestabilidad condicional favorece la menor convección de cumulus a pequeña escala. Por ello, consideramos la depresión prehuracanada y la celda de cumulus no en competencia para la misma energía, pues si la hubiera ganaría la celda de cumulus, sino ayudándose una a otra, proporcionando la celda de cumulus energía calórica para empujar la depresión y produciendo la depresión convergencia de humedad a bajo nivel en las celdas de cumulus. El propósito primario del presente trabajo es ciertamente demostrar que este tipo de interacción lleva a una autoamplificación a gran escala, que llamaremos *inestabilidad condicional de la segunda clase* en contraste con la inestabilidad condicional responsable de la convección de cumulus a pequeña escala.

2. EQUILIBRIO EN LA DEPRESIÓN PRE-HURACANADA. De acuerdo con la opinión actual, el huracán incipiente es una

Yanai (1961) has given evidence in support of the hypothesis that the formation of the cold-core depression is due to horizontal shear instability in the tropical easterlies. One may speculate that for sufficiently large amplitudes, the frictional convergence of moisture, whose effect quadratically on the surface winds, will take over the energy supply mechanism and cause both the increasing symmetry and the continued growth. Our present demonstration does not treat this process at all. Its purpose is merely to indicate the probable importance of surface friction and the coupled cumulus convection in the amplification mechanism of the hurricane depression. We have also studied finite-amplitude systems in collaboration with Dr. Y. Ogura, but here one of the yet unsolved problems is to find the mechanism of the surface frictional interaction at large Rossby numbers.

1. INSTABILITY OF THE TROPICAL DEPRESSION. THE DEPRESSION AND CUMULUS CONVECTION AS COOPERATIVE PHENOMENA. In analogy with the theory of extratropical cyclones, it is tempting to ascribe the formation of the hurricane to some form of hydrodynamic instability, and in fact a number of such mechanisms have been proposed. The growth of disturbances has been variously attributed to the instability of temperature discontinuities (frontal instability), of horizontal temperature gradients (baroclinic instability), of radiallly decreasing angular momentum along isentropic surfaces in a circular vortex (rotational instability), or of horizontal shear with an extremum in the absolute vorticity profile (Rayleigh instability). The last may be responsible for the cold-core easterly wave but almost certainly not for the hurricane. In the opinion of the authors, no good evidence has been cited to indicate that the other instabilities exist, or if they did that they would give rise to the observed motions. There is, however, a fifth kind of instability that undoubtedly does exist. It is the gravitational instability associated with a decrease in the entropy of saturated air with height (conditional instability). Yet, the depression cannot be simply a large-scale convective overturning; for J. Bjerknes (1938) and E. Höiland (1939) have shown that conditional instability favors the smallest possible scale of cumulus convection. We should look therefore upon the pre-hurricane depression and the cumulus cell, not as competing for the same energy, for in this competition the cumulus cell must win, but as supporting one another, the cumulus cell by supplying the heat energy for driving the depression, and the depression by producing the low-level convergence of moisture into the cumulus cells. Indeed, it is the primary purpose of the present paper to show that this type of interaction does lead to a large-scale self-amplification, which we may call *conditional instability of the second kind* to contrast it with the conditional instability responsible for small-scale cumulus convection.

2. BALANCE IN THE PRE-HURRICANE DEPRESSION. According to the present view, the incipient hurricane is a

circulación *forzada* empujada por el calor liberado por convección organizada de cumulus y no una circulación *libre* producida por fuerzas boyantes en desequilibrio. Así, se puede pensar que el flujo a gran escala es casi-hidrostático y eliminar las fuerzas centrífugas y de Coriolis en desequilibrio, de modo que las fuerzas horizontales puedan considerarse aproximadamente en estado de gradiente o si el caso lo requiere, en equilibrio geostrófico.

Las ecuaciones apropiadas para el flujo casi-equilibrado han sido derivadas por Charney (1948) y Eliassen (1949) para el caso en que las velocidades horizontales relativas sean pequeñas en comparación con velocidades de rotación de la Tierra (caso casi-geostrófico). Otras consideraciones más generales de ecuaciones de equilibrio se dan en trabajos de Bolin (1955), Charney (1955 a, b; 1962) y Thompson (1956). En el siguiente análisis suponemos que el flujo es un vórtice circular axialmente simétrico. Esos flujos fueron estudiados primero por Eliassen (1952).

Para los propósitos presentes, las condiciones de equilibrio gradiente e hidrostático pueden escribirse más simplemente

forced circulation driven by the heat released in organized cumulus convection, not a *free* circulation driven by unbalanced buoyancy forces. One may therefore assume that the large-scale flow is quasi-hydrostatic and discount unbalanced Coriolis and centrifugal forces, so that the horizontal forces may be considered approximately in a state of gradient or, as the case may be, geostrophic balance.

The appropriate equations for quasi-balanced flow have been derived by Charney (1948) and Eliassen (1949) for the case where the relative horizontal velocities are small compared to the velocities of the Earth's rotation (quasi-geostrophic case). More general statements of the balance equations are given in papers by Bolin (1955), Charney (1955 a, b; 1962) and Thompson (1956). In the following analysis we assume that the flow is an axially-symmetric circular vortex. These flows were first studied by Eliassen (1952).

For the present purposes the conditions of hydrostatic and gradient balance may be written most simply

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = g\,(\ln\theta - \ln\overline{\theta})$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = \frac{m^2}{r^2}$$

donde r es la coordenada radial, z es la coordenada vertical, θ es la temperatura potencial y

where r is the radial coordinate, z is the vertical coordinate, θ is the potential temperature, and

$$\chi = \frac{p - \overline{p}}{\overline{\rho}} + \frac{f^2 r^2}{8}$$

$$m = rv + \frac{fr^2}{2}$$

Las barras denotan espacio horizontal y promedios de tiempo; f es el parámetro de Coriolis y v es velocidad tangencial.

Agregando las ecuaciones aproximadas para conservación de θ y m, el momento angular

The bars denote horizontal space and time averages; f is the Coriolis parameter and v is the tangential velocity.

We add the approximate equations for conservation of θ and m, the angular momentum,

$$\frac{d\ln\theta}{dt} = \frac{Q}{c_p\overline{T}}$$

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

donde Q es el índice de entrada de calor por masa unitaria que asegura que la fricción actúa solamente en la capa de frontera de la superficie. La correspondiente ecuación de continuidad de masa simplificada es

where Q is the rate of heat accession per unit mass, and it is assumed that friction act only in a surface boundary layer. The corresponding simplified mass continuity equation is

$$\frac{\partial}{\partial r}(\overline{\rho}ru) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}rw) = 0$$

o

$$\overline{\rho} ru = -\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \overline{\rho} rw = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

donde u y w son las velocidades vertical y radial respectivamente y ψ es la fricción de corriente para el flujo en el plano r − z.

3. CALENTAMIENTO POR CONVECCIÓN DE CUMULUS. La tarea más difícil en el análisis es describir las propiedades del transporte turbulento del campo de convección de cumulus en equilibrio estadístico por el movimiento de campo a gran escala. Ya que una teoría auto-consistente de convección de cumulus turbulentos en un campo medio anisotrópico no existe, es necesario usar parámetros en el proceso. Se hace especificando un simple parámetro empírico μ, que expresa el grado medio de saturación del aire en la región de convección activa. Si se conoce este parámetro y se considera la columna de aire cilíndrica vertical que se extiende a través de la atmósfera, cuya sección transversa horizontal sea bastante grande para contener varias celdas de cumulus, pero suficientemente pequeñas para considerarse como infinitesimales respecto a la depresión a gran escala, resulta posible calcular la convergencia de humedad a gran escala dentro de la columna y también el índice de precipitación y de cantidad de calor latente. Se supone que el calor latente se distribuye verticalmente en proporción al calor liberado de una porción de aire ascendente adiabáticamente húmedo y saturado.

En la zona de convección de cumulus activa de una depresión tropical el transporte vertical de humedad es $\overline{\rho}\,\overline{w}\,\overline{q}$, donde q es la humedad específica y la barra denota un promedio horizontal sobre una sección transversal de la micro-columna. Dicha cantidad no puede fácilmente relacionarse con $\overline{w}$ y $\overline{q}$, ya que tanto w como q son cantidades altamente fluctuantes cuya covariancia es desconocida. Por otra parte, el flujo radial de humedad es dado casi por $\overline{\rho}\,\overline{u}$ y $\overline{q}$ para que el débil gradiente horizontal de $\overline{q}$ y la pequeña extensión horizontal de las celdas de cumulus que causan las fluctuaciones de u y q no sean correlacionadas. Así, podemos expresar la convergencia horizontal de humedad como columna de unidad vertical por $-\int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\overline{\rho}\,\overline{u}\,\overline{q})\,dz$. Entonces, suponemos que los micro-movimientos están en estado de equilibrio estadístico con relación al macro-movimiento de modo que la humedad específica $\overline{q}$ sea una fracción conocide μ, de sus valores de saturación medios $\overline{q_s}$. Por falta de mejor conocimiento suponemos que μ es una constante menor que la unidad en la zona de convección.

4. LA FRICCIÓN DE SUPERFICIE COMO FUERZA CAUSAL INDIRECTA. Puede demostrarse que los cambios en un flujo casi-equilibrado con el tiempo son producidos solamente por fuentes de calor independientes, fuerzas friccionales o en el caso de flujo asimétrico por el transporte de masa y vortici-

or

where u and w are the radial and vertical velocities respectively, and ψ is the stream friction for the flow in the r − z plane.

3. HEATING BY CUMULUS CONVECTION. The most difficult task in the analysis is to describe the turbulent transport properties of the cumulus convection field in statistical equilibrium with the large-scale field of motion. Since a self-consistent theory of turbulent cumulus convection in an anisotropic mean field does not exist, one is forced to parametrize the process. This is done by specifying a single empirical parameter, μ, expressing the mean degree of saturation of the air in the region of active convection. If this parameter is known, and if one considers a vertical cylindrical column of air extending through the atmosphere whose horizontal cross-section is large enough to contain several cumulus cells and yet small enough to be regarded as infinitesimal with respect to the large-scale depression, it becomes possible to calculate the large-scale convergence of moisture into the column and hence the rate of precipitation and latent heat supply. The latent heat is assumed to be distributed in the vertical in proportion to the heat released from a parcel of saturated air ascending moist-adiabatically.

In the active cumulus convection zone of a tropical depression the vertical transport of moisture is $\overline{\rho}\,\overline{w}\,\overline{q}$, where q is the specific humidity, and the bar denotes a horizontal average over a cross-section of the micro-column. This quantity cannot easily be related to $\overline{w}$ and $\overline{q}$, since both w and q are highly fluctuating quantities whose covariance is unknown. On the other hand, the radial flux of moisture is closely given by $\overline{\rho}\,\overline{u}\,\overline{q}$, for the weak horizontal gradients of $\overline{q}$ and the small horizontal extent of the cumulus cells cause the fluctuations of u and q to be uncorrelated. Thus, we may express the horizontal convergence of moisture by $-\int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\overline{\rho}\,\overline{u}\,\overline{q})\,dz$. into a vertical unit column. We then suppose that the micro-motions are in a state of statistical equilibrium with respect to the macro-motion such that the specific humidity $\overline{q}$ is a known fraction, μ, of its mean saturation values $\overline{q_s}$. For lack of better knowledge we assume that μ is a constant less than unity in the convection zone.

4. SURFACE FRICTION AS THE INDIRECT DRIVING FORCE. It can be shown that time changes in a quasi-balanced flow are produced only by independent heat sources, frictional forces, or, in the case of asymmetric flow, by the transport of mass and vorticity in the balanced part of the flow.

dad en la parte equilibrada del flujo. Puesto que el flujo es aquí simétrico y que el calentamiento por condensación no es independiente del movimiento, deben considerarse los efectos de la fricción de superficie, encontrándose entonces que desempeña un doble papel: actuar para disipar energía cinética y por causa de la convergencia friccional en la capa de frontera superficial húmeda proporcionar también energía de calor latente al sistema. La disipación de energía es proporcional al índice de trabajo del esfuerzo de superficie en tanto que el aporte de energía es proporcional a la convergencia friccional, es decir, solamente al esfuerzo de superficie. Así, en las primeras etapas de la depresión tropical, cuando las velocidades tangenciales son pequeñas, la fricción actúa para aumentar la energía del sistema (Sin embargo, debe mencionarse que las velocidades tangenciales tendrán que ser suficientemente grandes para que sea importante la fricción).

Se ha demostrado por Charney y Eliassen (1949) que el efecto de la fricción de superficie en el flujo casi-geostrófico puede expresarse como condición de frontera sobre la velocidad vertical en la cima de la capa de frontera friccional. Ya que el flujo de perturbación es casi-geostrófico puede introducirse tal simplificación. Entonces, la velocidad vertical inducida friccionalmente encima de la capa de frontera es dada por

Since the flow here is symmetric, and the condensational heating is not independent of the motion, one is led to consider the effects of surface friction. It is then found that friction performs a dual role: it acts to dissipate kinetic energy, but because of the frictional convergence in the moist surface boundary layer, it also acts to supply latent heat energy to the system. The energy dissipation is proportional to the rate of working of the surface stress, whereas the energy supply is proportional to the frictional convergence, i.e., to the surface stress alone. Thus, in the early stages of the tropical depression, when the tangential velocities are small, friction acts to increase the energy of the system (It should be mentioned, however, that the tangential velocities must be large enough for friction to be important).

It has been shown by Charney and Eliassen (1949) that the effect of surface friction in quasi-geostrophic flow may be expressed as a boundary condition on the vertical velocity at the top of the frictional boundary layer. Since the perturbation flow is quasi-geostrophic this simplification can be introduced. The frictionally induced vertical velocity at the top of the boundary layer is then given by

$$w_4 = \frac{1}{2} D_E \zeta_4 \,{}^{\text{sen}}_{\text{sin}}\, 2\alpha$$

donde $D_E = \sqrt{2A/f}$ es una medida de la profundidad de dicha capa, A el coeficiente constante de viscosidad de turbulencia cinética, α el ángulo entre el viento geostrófico del superficie y las isobaras de superficie y ζ_4 la vorticidad del viento geostrófico de superficie. Si $A = 10\ m^2\ seg^{-1}$, un valor sugerido por Brunt (1939) y $f = 0.377 \times 10^{-4}\ seg^{-1}$, correspondiente a una latitud de 15°, entonces $D_E = 730$ m.

Puede derivarse una fórmula más general si se supone que la viscosidad de turbulencia es pequeña por encima de la capa de sub-frontera de esfuerzo constante. Así se obtiene para la función de corriente ψ_4 en la cima de la capa de frontera friccional (por integración de la ecuación horizontal de movimiento respecto a z),

where $D_E = \sqrt{2A/f}$ is measure of the depth of this layer, A is the (constant) kinematic eddy coefficient of viscosity, α the angle between the surface geostrophic wind and the surface isobars, and ζ_4 the vorticity of the surface geostrophic wind. If $A = 10\ m^2\ sec^{-1}$, a value suggested by Brunt (1939) and $f = 0.377 \times 10^{-4}\ sec^{-1}$, corresponding to a latitude of 15°, then $D_E = 730$ m.

A more general formula may be derived if one assumes that the eddy viscosity is small above the constant stress sub-boundary layer. One then obtains for the stream function ψ_4 at the top of the frictional boundary layer (by integration of the horizontal equations of motion with respect to z),

$$\psi_4 = \frac{r\tau_s}{f + \zeta_4}$$

donde τ_s es el esfuerzo de superficie. Sin embargo, puede comprobarse que esta fórmula sólo sirve para números de Rosby relativamente pequeños, es decir, para flujo casi-geostrófico. En consecuencia, no hay sino el previamente obtenido.

where τ_s is the surface stress. However, this formula can be shown to hold only for relatively small Rossby numbers, i.e., for quasi-geostrophic flow. It therefore reduces to the one previously obtained.

5. LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE PERTURBACIÓN. Las ecuaciones de movimiento son formuladas para un modelo a dos niveles en que m y θ son determinadas a 250, 750 y 1,000 mb (la cima de la capa de fricción) y ψ es determinado a 500 y 1,000 mb. Si $\psi = \psi\ (r) e^{\sigma t}$ y los valores a

5. THE SOLUTION OF THE PERTURBATION EQUATIONS. The equations of motion are formulated for a two-level model in which m and θ are determined at 250, 750 and 1,000 mb (the top of the friction layer) and ψ is determined at 500 and 1,000 mb. If $\psi = \psi\ (r) e^{\sigma t}$ and the values

500 y 1,000 mb son denotados por los índices 2 y 4 respectivamente, las ecuaciones de perturbación para ψ_2 y ψ_4 son

at 500 and 1,000 mb are denoted by the subscripts 2 and 4 respectively the perturbation equations for ψ_2 and ψ_4 become

$$R\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{R}\frac{d\psi_2}{dR}\right) \pm \frac{\psi_2}{L^2} = 0$$

$$\psi_4 = (S + 1)\,\psi_2 \tag{1}$$

donde L es una longitud cuyo valor depende de la existencia o no-existencia de condensación, R es un radio no-dimensional, r/1 y S la frecuencia no-dimensional de vuelo σ/ω. La longitud $\underline{1}$ y la frecuencia ω son dados por

where L is a length whose value depends upon the occurrence or non-occurrence of condensation, R is a non-dimensional radius, r/1 and S the non-dimensional frequency of flight σ/ω. The length $\underline{1}$ and frequency ω are given by

$$1 = \left(\frac{gH^2}{4f^2}\frac{\partial \ln\theta}{\partial z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega = (D_E/H)\ {}^{\text{sen}}_{\text{sin}}\ 2\alpha$$

donde H es la altura de escala $R\overline{T}_z/g$.

Se supone que tanto $\overline{\theta}$ como $\overline{\theta}_E$, la temperatura potencial equivalente en saturación, son funciones lineales de $\overline{p}$.

En la región R < A de movimiento medio ascendente y condensación activa

where H is the scale-height $R\overline{T}_z/g$.

It is assumed that both $\overline{\theta}$ and $\overline{\theta}_E$, the equivalent potential temperature at saturation, are linear functions of $\overline{p}$.

In the region, R < A, of upward mean motion and active condensation,

$$L^2 = -1 + \kappa\mu\,(S + 3/2)\,/\,(S + 1) \equiv L_+^2$$

donde $\kappa = 1 - d\ln\overline{\theta}_E/d\ln\overline{\theta}$ y en la región R > A de movimiento medio descendente, donde el flujo es adiabático seco

where $\kappa = 1 - d\ln\overline{\theta}_E/d\ln\overline{\theta}$, and in the region, R > A, of downward mean motion, where the flow is dry adiabatic,

$$L^2 = (S + 1)\,/\,(S + \frac{1}{2}) \equiv L_-^2$$

La solución de (1) para R < A, sujeta a la condición de desvanecimiento ψ_2 en R = 0, es

The solution of (1) for R < A, subject to the condition of vanishing ψ_2 at R = 0, is

$$\psi_+ = A_+ R J_1 (R/L_+)$$

y su solución para R > A, sujeta a la condición de desvanecimiento ψ_2 en R = ∞, es

and its solution for R > A, subject to the condition of vanishing ψ_2 at R = ∞, is

$$\psi_- = A_- R H_1^{(1)} (i R/L_-)$$

La continuidad de u y p en r = A, da entonces la ecuación de valores eigen,

Continuity of u and p at r = A then gives the eigenvalue equation,

$$\frac{J_1 (A/L_+)}{J_0 (A/L_+)} = i\frac{L+}{L-}\frac{H_1^{(1)} (iA/L-)}{H_0^{(1)} (iA/L-)} \tag{2}$$

relacionando S a los parámetros A y μ para κ dados. Encontramos $\kappa = 1.1$ por las condiciones en la atmósfera tropical en la latitud 15° en la estación de huracanes.

relating S to the parameters A and μ for given κ. From conditions in the tropical atmosphere at latitude 15° in the hurricane season we find $\kappa = 1.1$.

6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS. La Fig. 1 contiene gráficas calculadas con la ecuación (2) de σ/ω como función de A/l para diferentes valores de μ. Tomando f $= 0.377 \times 10^{-4}$ seg^{-1}, $\alpha = 15°$, $\overline{p_0} = 1{,}000$ mb y H $= 8.0$ Km, encontramos $D_E = \sqrt{2A/f} = 0.73$ Km y $\omega = \text{sen}\, 2\alpha\, (D_E/H) f = 1.72 \times 10^{-6}$ seg^{-1}. Dichos valores son usados para determinar las escalas de las cantidades dimensionales a y c.

En la figura puede verse que el valor máximo de σ queda en el rango $10^{-6} - 10^{-5}$ seg^{-1}, multiplicándose otras tantas veces en el rango de diez a un día para μ en el rango $0.7 - 0.8$. Los índices de crecimiento se hacen mucho más altos al aproximarse μ a 1 y de hecho se hacen infinitos para a finita cuando $\mu > 1/\kappa = 0.91$. Sin embargo, los valores de μ mayores que 0.8 parecen ser no realísticos.

Si se supone que μ es 0.8, se obtiene el índice de multiplicación $\sigma^{-1} = 2.5$ días y el radio a $= 100$ Km en que se nivelan los índices de crecimiento. Dichos valores están en el rango adecuado para la depresión pre-huracanada. A mucho más pequeños valores de a, la fricción ya no actúa para desestabilizar el sistema y σ debe disminuir en realidad como sucedería si K fuera a tender hacia cero con a. En consecuencia, podemos aceptar el orden de magnitud $a = 100$ Km como aproximándose a la dimensión de la región convectiva activa de la perturbación inestable.

El índice de crecimiento $\sigma = 4.6 \times 10^{-6}$ seg^{-1}, que corresponde a $\mu = 0.8$, está en marcado contraste con el valor $(-g\partial \ln\overline{\theta_E}/\partial z)^{1/2} \simeq 1.4 \times 10^{-3}$ seg^{-1} (indicado en la esquina superior izquierda de la figura por una barra horizontal) que se aproxima al valor de la celda de cumulus mientras el radio de corriente ascendente disminuye a cero. Por ello, se trata de dos fenómenos totalmente distintos, con inestabilidad gravitacional simple en un ambiente húmedo en un caso y con el sistema de cumulus en depresión cooperativa causados en el otro.

AGRADECIMIENTOS

Este artículo es una continuación del trabajo presentado por Charney en la Conferencia Técnica sobre Huracanes de la Sociedad Meteorológica Americana en Miami Beach, Florida, Noviembre 19-22, 1958 y elaborada en la 40ava. Reunión de Aniversario de la Sociedad Meteorológica Americana en Boston, Enero 19-22, 1960. En dicho trabajo se sugería que la depresión tropical y el sistema de nubes cumulus asociado pueden tratarse como fenómenos cooperativos con ayuda de las ecuaciones de equilibrio y que la fricción de superficie actúa como un mecanismo productor de energía. Se suponía que la humedad relativa media en la región de convergencia a bajo nivel era de 100%. Tal condición podría alcanzarse si no hubiese corrientes descendentes que rodean los paquetes ascendentes de aire saturado ni arrastre, aunque era una suposición físicamente no realística. Como resultado de una conversación con el Dr. K. Ooyama, los autores pusieron en consideración más cuidadosamente las propiedades de las celdas de cumulus en equilibrio estadístico con el macro-movimiento y por ello, llegaron a la conclusión de que la atmósfera puede permanecer gravitacionalmente

6. DISCUSSION OF RESULTS. Figure 1 contains graphs computed from equation (2) of σ/ω as a function of A/l for different values of μ. Taking f $= 0.377 \times 10^{-4}$ sec^{-1}, $\alpha = 15°$, $\overline{p_0} = 1{,}000$ mb, H $= 8.0$ Km we find $D_E = \sqrt{2A/f} = 0.73$ Km and $\omega = \sin 2\alpha\, (D_E/H) f = 1.72 \times 10^{-6}$ sec^{-1}. These values are used to determine the scales of the dimensional quantities a and σ.

It is seen from the figure that the maximun value of σ lies in the range $10^{-6} - 10^{-5}$ sec^{-1}, giving an e-folding time in the range ten days to one day for μ in the range $0.7 - 0.8$. The growth rates become much higher as μ approaches 1, and in fact become infinite for finite a when $\mu > 1/\kappa = 0.91$. However, values of μ larger than 0.8 appear to be unrealistic.

If it is assumed that μ is 0.8, one obtain the e-folding time, $\sigma^{-1} = 2.5$ days and the radius, a $= 100$ Km at which the growth rate levels off. These values are in the right range for the pre-hurricane depression. At very much smaller values of a friction no longer acts to destabilize the system, and σ should in reality decrease, as it would if K were to tend toward zero with a. We may therefore accept the order of magnitude $a = 100$ Km as approximating the size of the active convective region of the unstable disturbance.

The growth rate $\sigma = 4.6 \times 10^{-6}$ sec^{-1}, corresponding to $\mu = 0.8$, is in marked contrast to the value $(-g\partial \ln\overline{\theta_E}/\partial z)^{1/2} \simeq 1.4 \times 10^{-3}$ sec^{-1} (indicated in the upper left corner of the figure by a horizontal bar) which is approached by that of the cumulus cell as the updraft radius diminishes to zero. One is dealing with two physically distinct phenomena, with simple gravitational instability in a moist environment on the one hand, and with the frictionally driven, cooperative depression-cumulus system on the other.

ACKNOWLEDGEMENTS

This article is a continuation of work presented by Charney at the Technical Conference on Hurricanes of the American Meteorological Society in Miami Beach, Florida, November 19-22, 1958, and elaborated at the 40th Anniversary Meeting of the American Meteorology Society in Boston, January 19-22, 1960. In this work it was suggested that the tropical depression and the associated cumulus cloud system can be treated as cooperative phenomena with the aid of the balance equations, and that surface friction acts as an energy producing mechanism. It was assumed that the mean relative humidity in the region of low-level convergence was 100%. Such a condition could be attained if there were no downdrafts surrounding the rising parcels of saturated air and no entrainment, but this was a physically unrealistic assumption. As a result of a conversation with Dr. K. Ooyama the authors were led to consider more carefully the properties of the cumulus cells in statistical equilibrium with the macro-motion, and thereby came to the conclusion that the atmosphere can remain gravitationally

estable para el macro-movimiento aun cuando sea gravitacionalmente inestable para los movimientos de micro-cumulus.

stable for the macro-motion even while it is gravitationally unstable for the micro-(cumulus) motions.

BIBLIOGRAFIA *BIBLIOGRAPHY*

BJERKNES, J. 1938. Saturated-adiabatic Ascent of Air through Dry-adiabatically Descending Environment. *Quart. Jour. Royal Meteor. Soc.*, 64:325-330.

BOLIN, B. 1955. Numerical Forecasting with the Barotropic Model. *Tellus,* 7:27-49.

BRUNT, D. 1939. *Physical and Dynamical Meteorology.* Cambridge Univ. Press, 1 vol.

CHARNEY, J. G. 1948. On the Scale of Atmospheric Motions. *Geof. Publ.* (Oslo), 17(2):17 pp.

— 1955a. The Generation of Ocean Currents by Wind. *Jour. Marine Res.*, 14:477-498.

— 1955b. The Use of the Primitive Equations of Motion in Numerical Prediction. *Tellus,* 7:22-26.

— 1962. Integration of the Primitive and Balance Equations. In *Proc. Inter. Symp. Numerical Weather Prediction, Tokyo (Nov. 8-13, 1960)*, pp. 131-152.

— 1963. A Note on Large-Scale Motions in the Tropics. *Jour. Atmosph. Sci.*, 20(6):

CHARNEY, J. G. & A. ELIASSEN. 1949. A Numerical Method for Predicting the Perturbations of the Middle-Latitude Westerlies. *Tellus,* 1(2):38-54.

ELIASSEN, A. 1949. The Quasi-Static Equations of Motion with Pressure as Independent Variable. *Geof. Publ.* (Oslo), 17(3):44 pp.

— 1952. Slow Thermally or Frictionally Controlled Meridional Circulations in a Circular Vortex. *Astro. Norvegica,* 5(2):19-60.

HÖILAND, E. 1939. On the Interpretation and Application of the Circulation Theorems of V. Bjerknes. *Arch. Math. og. Naturv.*, 42(5):25-27.

THOMPSON, P. D. 1956. A Theory of Large-Scale Disturbances in Non-Geostrophic Flow. *Jour. Meteor.*, 13:251-261.

YANAI, M. 1961. Dynamical Aspects of Typhoon Formation. *Jour. Meteor. Soc. Japan,* Series II, 59(5):282-309.