

GEOFISICA INTERNACIONAL

REVISTA DE LA UNIÓN GEOFÍSICA MEXICANA, AUSPICIADA POR EL INSTITUTO DE GEOFÍSICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

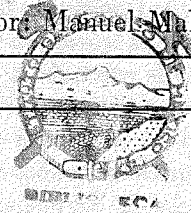
Director: Julián Adem

Subdirector: Manuel Maldonado-Koerdell

Vol. 2

México, D. F., 1o. de Julio de 1962

Núm. 3



*COMPORTAMIENTO TRANSITORIO DE LA INTERFASE DE DOS LIQUIDOS INMISCIBLES LIMITADOS AL ESPACIO POROSO ENTRE DOS ESFERAS CONCENTRICAS **

I. HERRERA ** y W. C. KNUDSEN ***

SUMARIO

Se deriva la solución para el movimiento de la interfase de dos líquidos no miscibles limitados al espacio poroso entre dos esferas concéntricas. El movimiento del fluido se produce por la acción de la gravedad y está gobernado por la Ley de Darcy. Para obtener la solución, el problema se simplificó en dos sentidos, por una parte el caso límite de una capa de espesor cero fue considerado y por otra las condiciones en la frontera se linealizaron. Sin embargo, se obtiene una solución que satisface las condiciones completas no-lineares en la frontera, cuando la interfase es plana inicialmente.

Se determinó el tiempo necesario para que la desviación máxima de la interfase desde la posición de equilibrio decrezca por el factor $1/e$.

Los resultados se compararon con los presentados previamente por Kidder (1956) en un problema similar.

Usando los resultados de este estudio, se discute el origen de la inclinación de los contactos petróleo-agua en campos petroleros.

INTRODUCCION

En este artículo presentamos una solución analítica para el movimiento de la interfase entre dos líquidos no miscibles restringidos a moverse en el espacio poroso entre dos esferas concéntricas. Se supone que los líquidos obedecen la Ley de Darcy y que el movimiento es producido por el campo gravitacional que actúa sobre los dos líquidos con distinta densidad. Se supone que la diferencia en radio de las dos

* Este trabajo fue hecho en el Laboratorio de La Habra de la California Research Corporation para la Standard Oil of California.

** Dirección actual: Institutos de Geofísica e Ingeniería, U.N.A.M.

*** California Research Corporation, La Habra, California.

*TRANSIENT BEHAVIOR OF THE INTERFACE OF TWO INMISCIBLE LIQUIDS CONSTRAINED TO THE POROUS SPACE BETWEEN TWO CONCENTRIC SPHERES **

I. HERRERA ** and W. C. KNUDSEN ***

ABSTRACT

The solution for the motion of the interface between two immiscible liquids constrained to a porous space between two concentric spherical surfaces is derived. The fluid motion is produced by the action of gravity and is governed by Darcy's Law. In order to obtain the solution, the problem is simplified in two respects, on the one hand the limiting case of a shell of zero thickness is considered, and on the other one the boundary conditions are linearized. However, a solution is obtained which satisfies the full non-linear boundary conditions when the interface is plane initially.

The time required for the maximum deviation of the interface from the equilibrium position to decrease by the factor $1/e$ is determined.

The results are compared with those presented previously by Kidder (1956) for a related problem.

The origin of tilted oil-water contacts in oil fields is discussed in relation to the results of this study.

INTRODUCTION

We present in this paper an analytical solution for the motion of the interface between two immiscible liquids constrained to move in the porous space between two concentric spheres. The fluids are assumed to obey Darcy's Law, and the motion is produced by the gravitational field acting on the two fluids of unequal density. The difference in radius of the two constraining spheres is assumed to be

* This work was done at the La Habra Laboratory of the California Research Corporation for the Standard Oil of California.

** Present address: Institutes of Geophysics and Engineering, U.N.A.M.

*** California Research Corporation, La Habra, California.

esferas limitantes es pequeña comparada con el radio de cualquiera de ellas, de tal manera que podemos abordar el problema considerando el caso límite de una capa de espesor cero. El problema se simplifica aún más por linealización de las condiciones de frontera. Una discusión del método de linealización de las condiciones de frontera en un problema similar ha sido presentada por Stoker (1957). Derivamos una solución que satisface las condiciones totales no-lineales de frontera para una interfase inicialmente plana cuando el espesor de la capa es cero. Como se conocen tan pocos ejemplos de soluciones exactas para problemas con condiciones flotantes de frontera, la solución que aquí se presenta no carece de interés teórico en sí misma. Sin embargo, el propósito principal de este trabajo, se refiere a una controversia concerniente al origen de interfases petróleo-agua inclinadas que se observan en algunos campos petroleros, para las cuales las aproximaciones usadas en este trabajo son muy adecuadas, pues la relación del espesor al radio de curvatura en la mayoría de los depósitos de petróleo, así como la inclinación del contacto petróleo-agua son muy pequeñas. La solución podría aplicarse también al movimiento de ajuste de una lente de agua salada contenida en un sinclinal. Previamente, Kidder (1956) investigó el movimiento de la interfase entre dos fluidos no miscibles forzados a moverse en una región rectangular bidimensional. La investigación que se presenta aquí es una extensión de la investigación anterior a una geometría más realista tridimensional.

1. APLICACIÓN DE LOS RESULTADOS A LAS INTERFACES INCLINADAS PETRÓLEO-AGUA.

Hubbert demostró en 1940 que la interfase de separación de dos fluidos distintos contenidos en un medio poroso se inclinaría con respecto al horizonte cuando cualquiera de los fluidos o ambos estuviesen en movimiento estacionario. Un ejemplo es la inclinación de la interfase entre agua dulce y agua salada en los acuíferos costeros de agua dulce. Posteriormente, Hubbert (1953) propuso que la inclinación de la interfase petróleo-agua, observada en muchos campos petroleros, era causada por el movimiento del agua freática asociada.

La sugestión de que algunas interfases petróleo-agua están inclinadas como resultado del movimiento del agua freática no ha sido universalmente aceptada (Weeks, 1958). La inclinación de la interfase petróleo-agua podría deberse a otras causas, pero el resultado del presente estudio demuestra que la inclinación de la interfase petróleo-agua puede atribuirse a causa tectónica post-acumulación —una explicación popular— solamente cuando prevalezcan condiciones muy poco comunes en los reservorios petroleros.

Considérese un campo petrolero anticlinal limitado a la región porosa entre dos margas (Fig. 1). La permeabilidad de la roca del reservorio es habitualmente del orden de algunas decenas de milidarcy, mientras que la permeabilidad de la marga es menos de un microdarcy (Goudouin y Scala,

small compared with the radius of either, so that we can approximate the problem by considering the limiting case of a shell of zero thickness. We further simplify the problem by linearizing the boundary conditions. A discussion of the method of linearization of the boundary conditions in a similar problem is presented by Stoker (1957). For an interface which is initially plane, and —for zero shell thickness, we derive a solution which satisfies the full non-linear boundary conditions. Since so few examples of exact solutions for problems with floating boundary conditions are known, the solution here presented does not lack theoretical interest in itself. However, the main purpose of this work bears on a controversy concerning the origin of tilted oil-water interfaces observed in some oil fields, for which the approximations used in this work are rather suitable, because the ratio of the thickness of most oil reservoirs to its radius of curvature as well as the tilt of the oil-water contact are usually very small. The solution should also be applicable to the transient adjustment of a salt water lens contained in a syncline. Kidder (1956) previously investigated the motion of the interface between two immiscible fluids constrained to move in a two dimensional, rectangular region. The investigation presented here is an extension of this previous investigation to a more realistic, three dimensional geometry.

1. APPLICATION OF RESULTS TO TILTED OIL-WATER INTERFACES.

Hubbert in 1940 showed that the interface separating two distinct fluids contained in a porous medium would be tilted with respect to the horizon when either or both of the fluids was in steady-state motion. An example is the tilt of the fresh-water, salt-water interface in coastal fresh-water aquifers. Later, Hubbert (1953) proposed that the tilt of the oil-water interface observed in many oil fields was caused by the movement of the associated ground-water.

The suggestion that some oil-water interfaces are tilted as the result of ground-water motion has not been universally accepted (Weeks, 1958). Oil-water interface tilts may result from other causes, but the results of this study demonstrate that oil-water interface tilts may be attributed to post-accumulation tectonic tilting —a popular explanation— only when rather unusual oil reservoir conditions prevail.

Consider an anticlinal oil field constrained to the porous region between two shales (Fig. 1). Reservoir rock permeability is usually of the order of a few tens of millidarcy, whereas, the shale permeability is probably less than a microdarcy (Goudouin and Scala, 1958). We neglect the

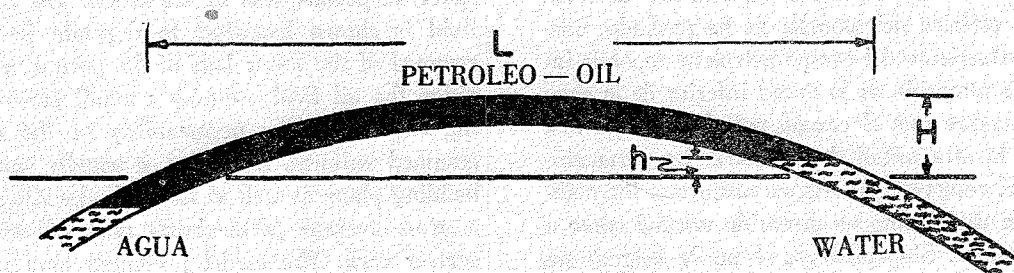


Fig. 1

Campo petrolero anticlinal limitado a la región porosa entre dos margas.

Anticlinal oil field constrained to the porous region between two shales.

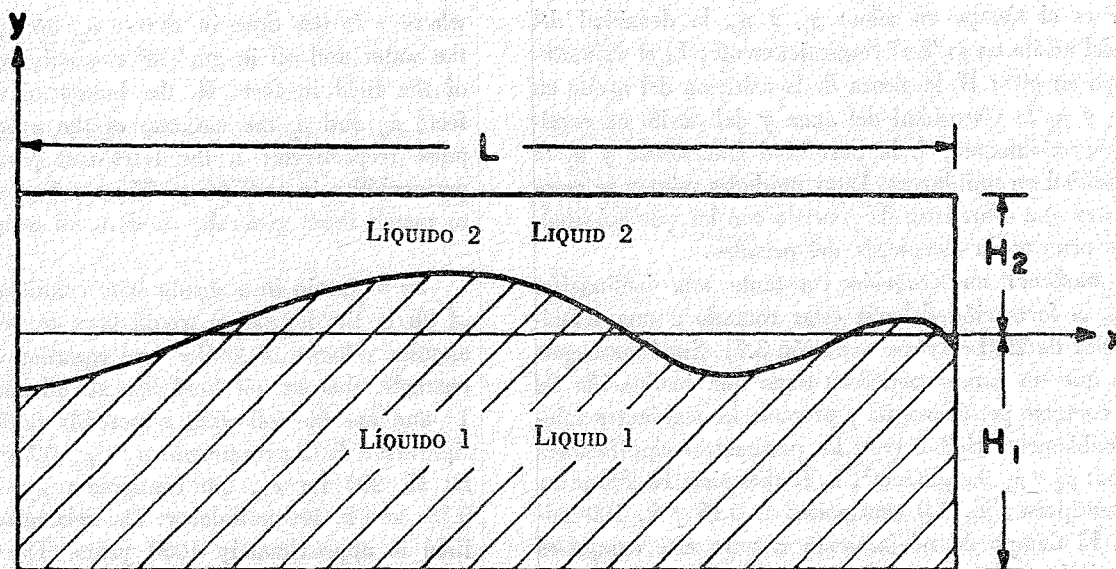


Fig. 2

Región bidimensional y parámetros para el modelo de Kidder.

Two dimensional region and parameters for Kidder's model.

1958). Por lo mismo, hemos despreciado la permeabilidad de la marga. Las formaciones de los reservorios no son esféricas en su naturaleza; sin embargo, los anticlinales se aproximan a una porción de esfera y podríamos considerar la formación más allá del anticlinal equivalente al resto de la capa porosa esférica del modelo. Se ha probado, además, que el comportamiento del campo petrolero depende insensiblemente de la remoción de la mitad inferior de la capa esférica porosa, siempre que el campo petrolero ocupe una parte pequeña de la otra mitad de la esfera. La permeabilidad de la roca del reservorio se supone uniforme. En realidad, habitualmente varía tanto en dirección normal como a lo largo de los estratos. Sin embargo, se puede asignar un promedio burdo de permeabilidad a la roca del reservorio. El modelo que aquí se presenta no podría aplicarse a un campo disectado por zonas impermeables de fallas.

Suponemos que inicialmente la interfase petróleo-agua es un plano inclinado en un ángulo pequeño con respecto al horizonte. Demostramos, después, que el desplazamiento máximo, h , de la interfase desde la posición de equilibrio decrece exponencialmente con el tiempo.

El tiempo, τ , requerido por h para disminuir a $1/e$ de su valor inicial está dado aproximadamente por la ecuación,

$$\tau \simeq 0.12 \frac{f L^2 (\mu_w + \mu_o)}{k H (\rho_w - \rho_o)} \quad (1.1)$$

donde τ es el tiempo en años; ρ_w y ρ_o , la densidad del agua y del aceite en gr/cm^3 respectivamente; L , el diámetro del campo en pies; H , la altura de la columna del aceite en pies; μ_w y μ_o la viscosidad del agua y del aceite en centipoises respectivamente; f , la porosidad fraccional; y k , la permeabilidad en millidarcys. Estas unidades mixtas se escogieron para que estuvieran de acuerdo con las que habitualmente se usan en la tecnología del petróleo.

Para mantener en situación constante una inclinación de $2h/L$, la formación debería estar rotando a una velocidad angular de $2h/L\tau$ (véase ecuación 3.7). Supóngase, por ejemplo, que un campo petrolero tiene una inclinación de 1° en el contacto petróleo-agua y presenta los siguientes valores razonablemente típicos para los parámetros significantes del campo: $\rho_w - \rho_o$, 0.3 gm/cm^3 ; L , 16,000 pies; H , 200 pies; μ_w , 0.6 centipoise; μ_o , 1.0 centipoise; f , 0.15 y k , 100 millidarcys. El tiempo de relajamiento τ , para este campo es aproximadamente 1,000 años. La formación tendría que estar rotando con una rapidez de 1° por 1,000 años para mantener la inclinación presente del contacto petróleo-agua. Esta velocidad de rotación de la formación es de un orden 100 veces mayor que la velocidad geológica típica.

El valor de τ puede aproximarse a tiempos geológicos—digamos 10^7 años—suponiendo valores extremos para los parámetros. Si L , H y μ_o aumentan cada uno por un factor de diez, y k y $\rho_w - \rho_o$, son divididos ambos por un factor de diez, entonces se obtiene para τ , 10^7 años.

Que el valor de τ dado por la ecuación (1.1) no es muy sensitivo a los detalles de la geometría del campo petrolero

permeability of the shale. Reservoir formations are not spherical in nature; however, anticlines do approximate a portion of a sphere, and we may consider the formation beyond the anticline equivalent to the remainder of the spherical porous shell of the model. The behavior of the oil field is shown hereafter to depend insensitively on the removal of the lower half of the porous spherical shell provided the oil field occupies a small portion of the remaining hemishell. The permeability of the reservoir rock is assumed uniform. In reality, it usually varies normal to the bedding plane as well as along the bedding plane. However, a gross average permeability may be assigned to the reservoir rock. The model presented here would not be applicable to a field dissected by impermeable fault zones.

We assume that initially the oil-water interface is a plane and is tilted through a small angle from the horizon. We show hereafter that the maximum displacement, h , of the interface from the equilibrium interface decreases exponentially with time.

The time, τ , required for h to decrease to $1/e$ of its initial value is given approximately by the equation,

where τ is the time in years; ρ_w and ρ_o , the density of the water and oil in gm/cm^3 respectively; L , the diameter of the field in feet; H , the height of the oil column in feet; μ_w and μ_o the viscosity of the water and oil in centipoise respectively; f , the fractional porosity; and k , the permeability in millidarcy. These mixed units were chosen to match those generally used in oil technology.

To maintain in a steady state condition an oil-water tilt of $2h/L$, the formation would have to be rotating with an angular velocity of $2h/L\tau$ (see equation 3.7). Assume, for example, that an oil field has an oil-water contact tilt of 1° and has the following reasonably typical values for the significant field parameters: $\rho_w - \rho_o$, 0.3 gm/cm^3 ; L , 16,000 ft; H , 200 ft; μ_w , 0.6 centipoise; μ_o , 1.0 centipoise; f , 0.15; and k , 100 millidarcy. The relaxation time, τ , for this field is approximately 1000 years. The formation would have to be rotating at the rate of 1° per 1000 years to maintain the present oil-water contact tilt. This rate of formation rotation is of the order of 100 times, a typical geological rate.

The value of τ can approach geologic times—say, 10^7 years—by assuming rather extreme values for the parameters. If L , H , and μ_o are each increased a factor of ten, and k and $\rho_w - \rho_o$ both decreased by a factor of ten, τ becomes 10^7 years.

That the value of τ given by equation (1.1) is not very sensitive to the details of the oil field geometry can be seen

puede verse comparando la ecuación (1.1) con una ecuación derivable de los resultados de Kidder (1956). La región bidimensional y los parámetros para el modelo de Kidder se muestran en la Fig. 2. El valor de τ ($= 1/\sigma_1$) cuando $H_1/L \ll 1$ y $H_2/L \ll 1$ está dado aproximadamente por

$$\tau = \frac{f L^2}{\pi^2 k g (\rho_w - \rho_a)} \left(\frac{\mu_1}{H_1} + \frac{\mu_2}{H_2} \right) \quad (1.2)$$

el cual, si H_1 y H_2 se igualan con H , es idéntica a la ecuación (1.1), excepto por una diferencia del veinte por ciento en el factor de proporcionalidad.

2. EL MOVIMIENTO DE LA INTERFASE

Dos líquidos no miscibles, designados como líquidos 1 y 2, siendo el líquido 1 el más denso, se supone que ocupan un medio poroso, homogéneo e isotrópico que consiste en una capa limitada por paredes impermeables que son dos esferas concéntricas de radios a y b ($a < b$) y un cono con vértice en el centro de las esferas. Más precisamente, si r, φ, θ , son coordenadas esféricas, la región ocupada por los líquidos está dada por $a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \gamma$, donde $0 < \gamma \leq \pi$. Se supone que el eje $\theta = 0$ está dirigido verticalmente hacia arriba y que la superficie de separación de los dos líquidos está dada por

$$\theta = \delta(r) - \varepsilon(r, \varphi, t)$$

donde ε es la perturbación angular de la interfase desde la posición de equilibrio, es decir, en el estado no perturbado se tiene $\varepsilon = 0$. El problema que debe resolverse es encontrar $\varepsilon(r, \varphi, t)$ para t mayor que cero, cuando se da la perturbación inicial $\varepsilon(r, \varphi, 0)$.

La Ley de Darcy, junto con la hipótesis de incompresibilidad, implica la existencia de potenciales de velocidad ϕ^1 y ϕ^2 para los líquidos 1 y 2, respectivamente. Cuando $b - a \ll a$, es posible obtener una aproximación al movimiento real de los líquidos analizando el caso límite para el cual $a = b$. En este caso, la velocidad radial necesariamente se anula, de manera que ϕ^1 y ϕ^2 son independientes de r y pueden definirse por

$$\phi^i(\varphi, \theta, t) = \frac{k}{f\mu_i} [p_i + \rho_i g a (\cos \theta - \cos \delta)], \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

Satisfacen la ecuación de Laplace, que se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \phi^i}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.2)$$

Los símbolos usados antes y en lo que sigue se definen por:

by comparing equation (1.1) to an equation derivable from Kidder's result (1956). The two-dimensional region and parameters for Kidder's model is shown in Fig. 2. The value of τ ($= 1/\sigma_1$) when $H_1/L \ll 1$ and $H_2/L \ll 1$ is given approximately by

which, if H_1 and H_2 are set equal to H , becomes identical to equation (1.1) except for a twenty per cent difference in the factor of proportionality.

2. MOTION OF THE INTERFACE

Two immiscible liquids, designated as liquid 1 and 2, liquid 1 being the denser one, are assumed to occupy a homogeneous, isotropic, porous medium which is a shell bounded by impermeable walls which are two concentric spheres of radius a and b ($a < b$) and a cone with vertex at the center of the spheres. More precisely, if r, φ, θ , are spherical coordinates, the region occupied by the liquids is given by $a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \gamma$, where $0 < \gamma \leq \pi$. It is assumed that the axis $\theta = 0$ is directed vertically upward and that the interface separating the two liquids is given by

where ε is the angular perturbation of the interface from the equilibrium position, i.e., $\varepsilon = 0$ at the undisturbed state. The problem to be solved is that of finding $\varepsilon(r, \varphi, t)$ for t greater than zero, when the initial perturbation $\varepsilon(r, \varphi, 0)$ is given.

Darcy's Law, together with the assumption of incompressibility, implies the existence of velocity potentials ϕ^1 and ϕ^2 for liquids 1 and 2, respectively. When $b - a \ll a$, an approximation to the actual motion of the liquids may be obtained by analyzing the limiting case for which $a = b$. In this case the radial velocity necessarily vanishes, so that ϕ^1 and ϕ^2 are independent of r and may be defined by

They satisfy Laplace's equation, which reduces to

The symbols used above and in what follows are defined by:

f, k: porosidad y permeabilidad del medio poroso, respectivamente.

ρ, μ : densidad y viscosidad de los líquidos, respectivamente.

g : aceleración de la gravedad.

p : presión.

p_c : diferencia de presiones a través de la interfase debida a las fuerzas capilares (la cual se supone constante).

V, W: componentes de la velocidad en las direcciones φ y θ . Que están dadas por

f, k: porosity and permeability of the porous medium, respectively.

ρ, μ : density and viscosity of the liquids, respectively.

g : acceleration of gravity.

p : pressure.

p_c : difference in pressure across the interface due to capillary forces (assumed constant).

V, W: velocity components in the φ and θ directions. They are given by

$$V^i = - \frac{1}{a \frac{\text{sen } \theta}{\sin \theta}} \frac{\partial \phi^i}{\partial \varphi} \quad (2.3.a)$$

$$W^i = - \frac{1}{a} \frac{\partial \phi^i}{\partial \theta} \quad (2.3.b)$$

Los subíndices y superíndices 1 y 2 se usan para manifestar el líquido al cual se refieren.

La condición de frontera en la pared $\theta = \gamma$ es

$$[W^i]_{\theta = \gamma} = 0.$$

La condición dinámica que se debe satisfacer en la interfase, expresa el hecho de que la diferencia en la presión entre los dos líquidos debe ser compensada por las fuerzas capilares, es decir

$$p_c + [p_1 - p_2]_{\theta = \delta - \varepsilon} = 0.$$

La condición cinemática que se debe satisfacer en la interfase expresa el hecho de que cualquier partícula que se encuentra en la interfase, debe mantenerse en ella durante el movimiento, es decir

$$\frac{1}{a} [W^i]_{\theta = \delta - \varepsilon} = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{[V^i]_{\theta = \delta - \varepsilon}}{a \frac{\text{sen } (\delta - \varepsilon)}{\sin (\delta - \varepsilon)}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi}$$

Estas condiciones en términos de los potenciales son

$$\alpha a [\cos (\delta - \varepsilon) - \cos \delta] = \beta + [\mu_1 \phi^1 - \mu_2 \phi^2]_{\theta = \delta - \varepsilon} \quad (2.4.a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial \phi^i}{\partial \theta} \right]_{\theta = \delta - \varepsilon} + \frac{1}{a^2 \frac{\text{sen}^2 (\delta - \varepsilon)}{\sin^2 (\delta - \varepsilon)}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial \phi^i}{\partial \varphi} \right]_{\theta = \delta - \varepsilon} \quad (2.4.b)$$

$$\left[\frac{\partial \phi^i}{\partial \theta} \right]_{\theta = \gamma} = 0. \quad (2.4.c)$$

The subscripts and superscripts 1 and 2 are used to denote the liquid being referred to.

The boundary condition on the wall $\theta = \gamma$ is

The dynamical condition to be satisfied at the interface expresses the fact that the difference in pressure between the two liquids must be compensated by the capillary forces, that is

The kinematical condition to be satisfied at the interface expresses the fact that any particle once at the interface must remain at the interface, that is

These conditions in terms of the potentials are

donde where

$$\alpha = \frac{kg}{f} (\rho_1 - \rho_2) > 0,$$

y and

$$\beta = \frac{k p_0}{f}.$$

Cuando la inclinación de la interfase es pequeña y su perturbación desde el equilibrio es también pequeña comparada con el radio inicial de curvatura de la interfase, es decir, si

When the tilt of the interface is small and the perturbation of the interface from the equilibrium is also small compared with the minimum initial radius of curvature of the interface, i.e., if

$$\left| \frac{1}{\frac{\text{sen } \delta}{\sin (\delta - \varepsilon)}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \right| \ll 1 \tag{2.5.a}$$

$$| K a \varepsilon | \ll 1 \tag{2.5.b}$$

en que K denota la curvatura inicial máxima de la interfase, las condiciones de frontera (2.4) pueden linealizarse reemplazándolas por

in which K denotes the maximum initial curvature of the interface, the boundary conditions (2.4) may be linearized replacing them by

$$\alpha a \varepsilon \frac{\text{sen } \delta}{\sin \delta} = [\mu_1 \phi^1 - \mu_2 \phi^2]_{\theta = \delta} \tag{2.6.a}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial \phi^i}{\partial \theta} \right]_{\theta = \delta} \tag{2.6.b}$$

que implican which imply

$$\frac{\alpha \text{sen } \delta}{a} \left[\frac{\partial \phi^i}{\partial \theta} \right]_{\theta = \delta} = \left[\mu_1 \frac{\partial \phi^1}{\partial t} - \mu_2 \frac{\partial \phi^2}{\partial t} \right]_{\theta = \delta} \tag{2.7}$$

La ecuación (2.4.c), por otra parte, no sufre cambio

Equation (2.4.c), on the other hand, remains unchanged

$$\left[\frac{\partial \phi^1}{\partial \theta} \right]_{\theta = \gamma} = 0 \tag{2.8}$$

Por lo mismo, para determinar $\varepsilon(\varphi, t)$ necesitamos

Therefore, to determine $\varepsilon(\varphi, t)$ we need

(a) encontrar dos funciones potenciales ϕ^1 y ϕ^2 que satisfagan (2.2), (2.7) y (2.8).

(a) to find two potential functions ϕ^1 and ϕ^2 satisfying (2.2), (2.7) and (2.8).

(b) obtener ε por medio de (2.6.a).

(b) to obtain ε by means of (2.6.a).

Sea ϕ^i de la forma

Let ϕ^i be of the form

$$\phi^1(\varphi, \theta, t) = \psi^1(\varphi, \theta) e^{-\sigma t} \tag{2.9.a}$$

$$\phi^2(\varphi, \theta, t) = \psi^2(\varphi, \theta) e^{-\sigma t} \tag{2.9.b}$$

de manera que so that

$$\left[\frac{\partial \psi^1}{\partial \theta} \right]_{\theta = \delta} = \left[\frac{\partial \psi^2}{\partial \theta} \right]_{\theta = \delta} \quad (2.10.a)$$

$$\left[\frac{\partial \psi^1}{\partial \theta} \right]_{\theta = \gamma} = 0 \quad (2.10.b)$$

$$\frac{\alpha \operatorname{sen} \delta}{a} \left[\frac{\partial \psi^2}{\partial \theta} \right]_{\theta = \delta} = -\sigma [\mu_1 \psi^1 - \mu_2 \psi^2]_{\theta = \delta} \quad (2.10.c)$$

según (2.7) y (2.8). Los potenciales adecuados que satisfacen (2.2), (2.10.a) y (2.10.b) son

$$\psi_n^1(\varphi, \theta) = - (A_n \frac{\operatorname{sen} n\varphi}{\sin} + B_n \cos n\varphi) (M_n \operatorname{tg}^n \theta/2 + L_n \cot^n \theta/2) \quad (2.11.a)$$

$$\psi_n^2(\varphi, \theta) = (A_n \frac{\operatorname{sen} n\varphi}{\sin} + B_n \cos n\varphi) \operatorname{tg}^n \theta/2 \quad (2.11.b)$$

donde where

$$L_n = \frac{\operatorname{tg}^{2n} \gamma/2 - \operatorname{tg}^{2n} \delta/2}{\operatorname{tg}^{2n} \gamma/2 + \operatorname{tg}^{2n} \delta/2} \quad (2.12.a)$$

$$M_n = \frac{\operatorname{tg}^{2n} \delta/2}{\operatorname{tg}^{2n} \gamma/2 - \operatorname{tg}^{2n} \delta/2} \quad (2.12.b)$$

y A_n, B_n son constantes arbitrarias. Los valores propios correspondientes de σ se deducen de (2.10.c). Ellos son

$$\sigma_n = \frac{n \alpha}{a (\mu_1 K_n + \mu_2)} \quad (2.13)$$

donde where

$$K_n = \frac{\operatorname{tg}^{2n} \gamma/2 + \operatorname{tg}^{2n} \delta/2}{\operatorname{tg}^{2n} \gamma/2 - \operatorname{tg}^{2n} \delta/2} \quad (2.14)$$

En vista de (2.6.a) y (2.9) la forma de la interfase en cualquier tiempo t , está dada por

$$\varepsilon(\varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (G_n \frac{\operatorname{sen} n\varphi}{\sin} + D_n \cos n\varphi) e^{-\sigma_n t} \quad (2.15)$$

donde G_n y D_n son los coeficientes de Fourier de la forma inicial de la interfase, es decir,

$$G_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon(\varphi, 0) \frac{\operatorname{sen} n\varphi}{\sin} d\varphi; D_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon(\varphi, 0) \cos n\varphi d\varphi. \quad (2.16)$$

Las ecuaciones (2.15) y (2.16) nos permiten calcular el movimiento de la interfase cuando se conoce su forma ini-

by (2.7) and (2.8). Suitable potentials satisfying (2.2), (2.10.a) and (2.10.b) are

and A_n, B_n are arbitrary constants. The corresponding eigen values for σ follow from (2.10.c). They are

In view of (2.6.a) and (2.9) the shape of the interface at any time t , is given by

where G_n and D_n are the Fourier coefficients of the initial shape of the interface, i.e.,

Equations (2.15) and (2.16) allow us to compute the motion of the interface when its initial shape is known.

cial. Cuando el medio poroso es la esfera completa ($\gamma = \pi$), (2.12), (2.13, y (2.14) se transforman en

$$L_n = tg^{2n} \delta / 2; M_n = 0; Kn = 1 \tag{2.17.a}$$

$$\sigma_n = \frac{n \alpha}{a (\mu_1 + \mu_2)} \tag{2.17.b}$$

La solución para el caso en que la interfase inicial es un plano y tiene una pendiente m_0 se puede obtener observando que con una selección adecuada del sistema de coordenadas tenemos

$$\varepsilon \approx m_0 \frac{\text{sen } \varphi}{\sin}$$

y por lo mismo en vista de (2.15) y (2.16)

$$\varepsilon (\varphi, t) \approx m_0 e^{-\sigma_1 t} \frac{\text{sen } \varphi}{\sin} \tag{2.18}$$

El tiempo característico es

$$\tau = \frac{1}{\sigma_1} = \frac{a (\mu_1 K_1 + \mu_2)}{\alpha} \tag{2.19}$$

por (2.13). Cuando el medio poroso es la esfera completa

$$\tau = \frac{a}{\alpha} (\mu_1 + \mu_2) \tag{2.20}$$

Usando (2.14 y (2.19) se puede ver que τ no es sensible a cambios de γ siempre que $(\gamma - \delta)/\gamma$ no sea pequeña. Podemos concluir, por lo mismo, que la geometría del estrato poroso a grandes distancias de la interfase no altera de una manera significativa el tiempo necesario para que los líquidos alcancen la posición de equilibrio.

3. UNA SOLUCIÓN EXACTA

En esta sección mantendremos la hipótesis simplificante de que el medio poroso es de espesor cero. Sin embargo, demostraremos que cuando el medio poroso es la esfera completa y la interfase es plana inicialmente, es posible obtener una solución que satisface las condiciones de frontera no-lineales completas (2.4).

Con este propósito demostramos que la interfase, se mantiene plana en el movimiento y que el ángulo η formado por la normal a este plano con la dirección vertical, satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{\alpha \frac{\text{sen } \eta}{\sin}}{a (\mu_1 + \mu_2)} = 0. \tag{3.1}$$

Si la interfase se mantiene plana durante el movimiento, dado un instante arbitrario, podemos rotar nuestro sistema

When the porous medium is the whole sphere ($\gamma = \pi$), (2.12), (2.13), and (2.14) become

The solution for the case, when the initial interface is a plane with slope m_0 , may be obtained by observing that by a proper choice of the coordinate system we have

and therefore by (2.15) and (2.16)

The characteristic time is

by (2.13). When the porous medium is the whole sphere

Using (2.14) and (2.19) it may be seen that τ is not sensitive to changes of γ as long as $(\gamma - \delta)/\gamma$ is not small. We may conclude, therefore, that the geometry of the porous bed at large distances from the interface does not significantly alter the time required for the liquids to attain the equilibrium position.

3. AN EXACT SOLUTION

In this section we keep our simplifying assumption that the porous medium is of zero thickness. However, we show that when the porous medium is the whole sphere and the interface is plane initially, it is possible to obtain a solution satisfying the whole non-linear boundary conditions (2.4).

To accomplish this purpose we show that the interface remains plane in the motion and that the angle η made by the normal to this plane with the vertical direction satisfies the ordinary differential equation

If the interface remains plane during the motion, given an arbitrary instant, we can rotate our system of coordinates

de coordenadas de tal manera que el eje $\theta = 0$ sea normal al plano de la interfase en ese instante. Tomemos el plano definido por la normal a la interfase y por la vertical como el plano, $\varphi = \pi/2$. En este sistema de coordenadas la ecuación de la interfase en ese instante es

$$\theta = \delta$$

y en cualquier instante posterior and at any later instant

$$\cos(\delta - \varepsilon) = \sec \xi \cos \delta + \operatorname{tg} \xi \frac{\operatorname{sen}(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sen} \varphi} \quad (3.2)$$

donde ξ es el ángulo que la normal a la interfase ha rotado desde el instante dado. Ya que $\xi = 0$ en el instante dado, tenemos

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{d\xi}{dt} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} \quad (3.3)$$

nuevamente en el instante dado. Ya que el Laplaciano es invariante bajo rotación, los potenciales ϕ^i todavía satisfacen (2.2) en el nuevo sistema de coordenadas. En el instante dado las ecuaciones (2.4) pueden reemplazarse por

so that the axis $\theta = 0$ is normal to plane of the interface at that instant. We take the plane defined by the normal to the interface and the vertical to be the plane, $\varphi = \pi/2$. In this system of coordinates the equation of the interface at that instant is

where ξ is the angle through which the normal to the interface has rotated since the given instant. Since $\xi = 0$ at the given instant, we have

again at that instant. Since the Laplacian is invariant under rotation, the potentials ϕ^i still satisfy (2.2) in the new system of coordinates. At the given instant equations (2.4) may be replaced by

$$\alpha a [\cos \delta (\cos \eta - 1) \frac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \eta} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}] = \beta + [\mu_1 \phi^1 - \mu_2 \phi^2]_{\theta = \delta} \quad (3.4.a)$$

$$\left[\frac{\partial \phi^1}{\partial \theta} \right]_{\theta = \delta} = \left[\frac{\partial \phi^2}{\partial \theta} \right]_{\theta = \delta} \quad (3.4.b)$$

y and

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial \phi^1}{\partial \theta} \right]_{\theta = \delta} \quad (3.4.c)$$

Dos potenciales que satisfacen (3.4.a) y (3.4.b) son

Two potentials which satisfy (3.4.a) and (3.4.b) are

$$\Phi^1(\varphi, \theta) = \frac{2 \alpha a \frac{\operatorname{sen} \eta}{\operatorname{sen} \eta} \frac{\operatorname{sen}^2 \delta / 2}{\operatorname{sen}^2 \delta / 2}}{\mu_1 + \mu_2} \cot \theta / \mu_2 \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} \quad (3.5.a)$$

$$\Phi^2(\varphi, \theta) = \frac{2 \alpha a \frac{\operatorname{sen} \eta}{\operatorname{sen} \eta} \cos^2 \delta / 2}{\mu_1 + \mu_2} \operatorname{tg} \theta / 2 \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} + \beta / \mu_2 + \frac{\alpha a \cos(1 - \cos \eta)}{\mu_2} \quad (3.5.b)$$

Por la ecuación (3.4.c) se obtiene

By (3.4.c) they lead to

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\alpha \frac{\operatorname{sen} \eta}{\operatorname{sen} \eta}}{a (\mu_1 + \mu_2)} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}$$

y así por (3.3)

and therefore by (3.3)

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\alpha \frac{\text{sen } \eta}{\sin \eta}}{a (\mu_1 + \mu_2)}$$

que implica (3.1), porque which yields (3.1) because

$$\frac{d\xi}{dt} = - \frac{d\eta}{dt}$$

Suponiendo que la interfase se mueve como un plano hemos logrado satisfacer (2.2) y (2.4), por lo mismo la interfase se mantiene plana en el movimiento.

Under the assumption that the interface moves like a plane we have succeeded in satisfying (2.2) and (2.4), therefore the interface remains plane in the motion.

La solución exacta de (3.1) es

The exact solution of (3.1) is

$$t = \frac{a (\mu_1 + \mu_2)}{2 \alpha} \log \left[\frac{1 - \cos \eta_0}{1 + \cos \eta_0} \frac{1 + \cos \eta}{1 - \cos \eta} \right] \tag{3.6}$$

donde η_0 es la inclinación inicial de la interfase. Cuando η_0 es pequeña

where η_0 is the initial tilt of the interface. When η_0 is small

$$\eta \approx \eta_0 e^{-\frac{\alpha}{a (\mu_1 + \mu_2)} t} \tag{3.7}$$

y and

$$\varepsilon \approx \eta_0 e^{-\frac{\alpha t}{a (\mu_1 + \mu_2)}} \frac{\text{sen } \varphi}{\sin \varphi}$$

que está en concordancia con (2.18) en vista de (2.20), porque $\eta_0 \approx m_0$ cuando η_0 es pequeña.

in agreement with (2.18) in view of (2.20), because $\eta_0 \approx m_0$ when η_0 is small.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAPHY

GOUDOUIN, G. S. & C. SCALA. 1958. Streaming Potential and the SP Log. *Trans. American Inst. Mechan. Eng.* 213:170-179.

KIDDER, R. E. 1956. Motion of the Interface between two Immiscible Liquids of Unequal Density in a Porous Solid. *Jour. Applied Phys.*, 27:1546-1548.

HUBBERT, M. K. 1953. Entrapment of Petroleum under Hydrodynamic Conditions. *Bull. American Assoc. Petrol. Geol.*, 37:1954-2026.

— 1940. The Theory of Ground Water Motion. *Jour Geology*, 48:785-944.

STOKER, J. J. 1957. *Water Waves*. New York. (Interscience Publishers, Inc.), pp. 19-22.

WEEKS, L. G. 1958. Habitat of Oil and Some Factors that Control it. *Habitat of Oil*, L. G. Weeks (Editor), Tulsa (American Assoc. Petrol. Geol.), pp. 53-55.

