

III CONFERENCIA TÉCNICA SOBRE HURACANES Y METEOROLOGÍA TROPICAL TECHNICAL CONFERENCE ON HURRICANES AND TROPICAL METEOROLOGY

México, D. F., Jun. 6-12, 1963

1A. SESIÓN

1ST. SESSION

CONFIGURACIONES A GRAN ESCALA DEL FLUJO EN LOS TRÓPICOS LARGE-SCALE FLOW PATTERNS IN THE TROPICS

UN MODELO DE CIRCULACION ECUATORIAL

A MODEL OF EQUATORIAL FLOW

JOHN C. FREEMAN, JR. *

JOHN C. FREEMAN, JR. *

RESUMEN

ABSTRACT

La distribución de presión resultante de perturbaciones en una banda ecuatorial de vorticidad absoluta constante se compara con los alisios tropicales.

The pressure distribution resulting from the disturbances in an equatorial band of constant absolute vorticity is compared with the tropical easterlies.

El movimiento de bandas de un fluido con vorticidad constante, como método de estudio de la circulación de fluidos, siempre ha quedado atrás de los movimientos de ondas en una circulación constante. La presente aplicación de aquella técnica a la circulación en los trópicos se encuentra en la misma circunstancia.

The motion of bands of fluid with constant vorticity has always lagged behind wave motions in a constant flow as a method of study of fluid flow. The present application of this technique to the flow in the tropics is in the same tradition.

Consideremos una banda de un fluido que llega de las latitudes medias al ecuador y todo con la misma vorticidad absoluta. Es decir, la de la Tierra en alguna "latitud" γ_0 con el parámetro de Coriolis f_0 y sin circulación a través de f_0 .

We consider a band of fluid that reaches from the horse latitudes to the equator and all with the same absolute vorticity. Namely, that of the Earth at some "latitude" γ_0 with Coriolis parameter f_0 and with no flow across f_0 .

El viento del este es 0 en $\gamma = a$ y $-\frac{\partial u}{\partial \gamma} + f_0 + \beta(\gamma - \gamma_0) = f_0$ expresa la conservación de vorticidad. Al integrar encontraremos

The east wind is 0 at $\gamma = a$ and $-\frac{\partial u}{\partial \gamma} + f_0 + \beta(\gamma - \gamma_0) = f_0$ expresses the conservation of vorticity. We integrate and find

$$u(a) - u(\gamma) = + \int_{\gamma}^a \beta(\gamma - \gamma_0) = + \frac{\beta(a - \gamma_0)^2}{2} - \frac{\beta(\gamma - \gamma_0)^2}{2}$$

Asumimos que $u(a) = 0$ y así tenemos

We are assuming $u(a) = 0$ so we have

$$u(\gamma) = -\frac{\beta(a - \gamma_0)^2}{2} + \frac{\beta(\gamma - \gamma_0)^2}{2}$$

La ecuación de continuidad para este movimiento es

The continuity equation for this motion is

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{\gamma_0}^a u \, d\gamma = -u(a) \frac{\partial u}{\partial x} - \int_{\gamma_0}^a \frac{\partial u}{\partial x} \, d\gamma$$

* National Engineering Science Company y Universidad de Sto. Tomás, Houston, Texas.

* National Engineering Science Company and the University of St. Thomas, Houston, Texas.

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\gamma_0}^a \beta(a - \gamma_0) \frac{\partial a}{\partial x} d\gamma \\
 &= + \beta(a - \gamma_0) (a - \gamma_0) \frac{\partial a}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Lo cual puede escribirse como

This can be written as

$$\frac{\partial a}{\partial t} - \beta (a - \gamma_0)^2 \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

La ecuación (1) nos dice que la frontera de los alisios, a , mantiene un valor constante a lo largo de una línea en movimiento desde el este con una velocidad. Si γ_0 es de unos 15° de latitud y $a = 25^\circ$ de latitud, lo que sería un caso de extensos alisios, usamos la aproximación $\beta = \frac{1/6 \text{ per day}}{\text{por grado de latitud}}$. Esta velocidad es de unos 16° por día o 40 millas por hora desde el este. Si mantenemos $\gamma_0 = 15^\circ$ y además, investigamos alisios más restringidos, encontramos que si $a = 20^\circ$ entonces $\beta (a - \gamma_0)^2 = 4 \frac{1}{4}^\circ$ de latitud por día, lo que es una velocidad muy común para ondas "normales" en los alisios.

Estas ondas pueden ser "modificadas" tomando en cuenta la curvatura de frontera para poder encontrar una onda de estado estacionario. No lo haremos así en este trabajo, pero investigaremos el problema más interesante del salto o barrera en la circulación de los alisios.

La ecuación (1) da por resultado que una extensión más al norte de los alisios se mueve al oeste más aprisa que débiles alisios que no se extienden más al norte. Todo ello se ilustra en la Figura 1.

En una situación como lo ilustra la Fig. 1, la verdadera circulación debe contener un salto o barrera de los vientos del este muy similar a una rompiente en una playa (La "rompiente" ocurre horizontalmente más que verticalmente como en la comparación).

Se produce la barrera cuando los alisios rápidos alcanzan a los lentos y tratan de pasarlos. El resultado es un cambio abrupto en la velocidad del viento y en la extensión al norte de los alisios.

La barrera idealizada se indica en la Fig. 2.

Podemos calcular la velocidad de tal barrera si asumimos que se mueve a velocidad constante y que tenemos continuidad de masa. Al asumir que la barrera se mueve a la velocidad constante V , encontramos que

Equation (1) tells us that the boundary of the easterlies, a , keeps a constant value along a line that moves from the east at a speed. If γ_0 is about 15° latitude and $a = 25^\circ$ latitude, which would be a case of extensive easterlies, we use the approximation $\beta = \frac{1/6 \text{ per day}}{\text{per degree of latitude}}$. This speed is about 16° per day or 40 miles per hour from the east. If we keep $\gamma_0 = 15^\circ$ and further investigate more restricted easterlies, we find that if $a = 20^\circ$ then $\beta (a - \gamma_0)^2 = 4 \frac{1}{4}^\circ$ latitude per day which is a very common speed for "normal" waves in the easterlies.

These waves can be "modified" by taking the curvature of the boundary into account and a steady state wave can be found. We will not do that in this paper but will investigate the more interesting problem of the jump or block in the easterly flow.

Equation (1) gives the result that a far north extension of the easterlies moves westward faster than weak easterlies that do not extend far northward. This is illustrated in Figure 1.

In a situation as illustrated in Fig. 1, the ultimate flow must contain a jump of a block in the easterlies very similar to a breaker on a beach (The "breaker" occurs in the horizontal rather than the vertical frame of reference).

The block results when the fast easterlies catch up with the slow easterlies and try to pass them. The result is an abrupt change in the wind speed and the northward extension of the easterlies.

The idealized block is shown in Fig. 2.

We can compute the speed of such a block if we assume that it is moving at a constant speed and that we have continuity of mass. We assume the block moves at a constant speed V and we find that

$$\int_{\gamma_0}^{a_1} (u - V) d\gamma = \int_{\gamma_0}^{a_2} (u - V) d\gamma.$$

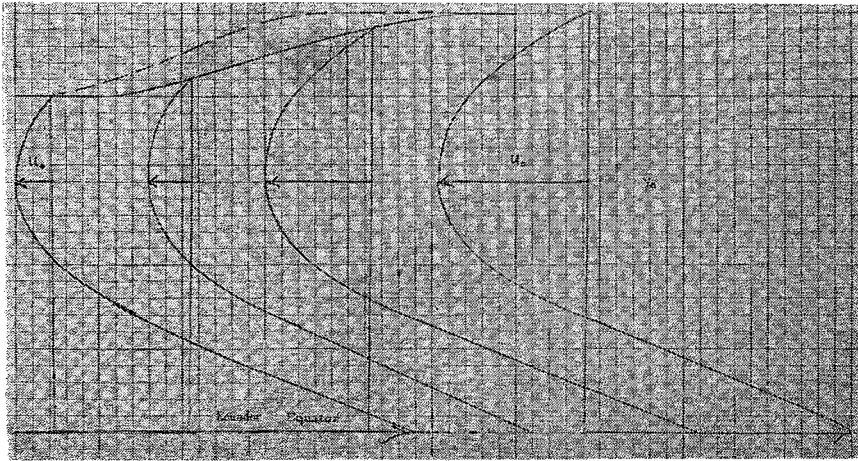


Fig. 1. Los fuertes alisios con grandes valores de a se mueven de este a oeste más rápidamente que los débiles. (Los alisios débiles producen vientos del oeste cerca del ecuador.)

Fig. 1. The strong easterlies with large values of a move from east to west faster than the weak easterlies. (Weak easterlies lead to west winds near the equator.)

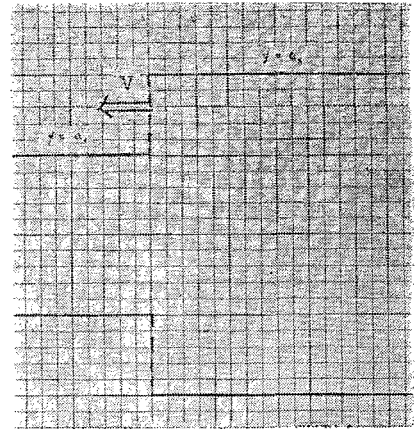


Fig. 2. La barrera idealizada de los alisios. La barrera se mueve con velocidad V .

Fig. 2. The idealized block in the easterlies. The block moves with speed V .

Substituyendo por u resulta

Substitution for u gives

$$\int_{\gamma_0}^{a_1} \left[-\beta \frac{(a_1 - \gamma_0)^2}{2} + \beta \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{2} - V \right] d\gamma = \int_{\gamma_0}^{a_2} \left[-\beta \frac{(a_2 - \gamma_0)^2}{2} + \beta \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{2} - V \right] d\gamma$$

$$-\beta \frac{(a_1 - \gamma_0)^3}{2} + \beta \frac{(a_1 - \gamma_0)^3}{6} - V (a_1 - \gamma_0) = -\beta \frac{(a_2 - \gamma_0)^3}{2} + \beta \frac{(a_2 - \gamma_0)^3}{6} - V (a_2 - \gamma_0)$$

$$-\frac{\beta (a_1 - \gamma_0)^3}{3} - V (a_1 - \gamma_0) = -\frac{\beta (a_2 - \gamma_0)^3}{3} - V (a_2 - \gamma_0)$$

$$V (a_2 - a_1) = \frac{-\beta}{3} \left[(a_2 - \gamma_0)^3 - (a_1 - \gamma_0)^3 \right]$$

$$V = \frac{-\beta}{3} \left[(a_2 - \gamma_0) + (a_2 - \gamma_0)(a_1 - \gamma_0) + (a_1 - \gamma_0)^2 \right] \tag{2}$$

La ecuación (2) expresa la velocidad de la barrera.

Equation (2) gives the speed of a block.

Un interesante ejemplo de V existe cuando se asume que los alisios van mezclándose con vientos del oeste. Es decir, que $a_1 = \gamma_0$. En ese caso, el alisio de máximo valor $u = -\frac{\beta (a_2 - \gamma_0)^2}{2}$ se metería en vientos del oeste a la velocidad

An interesting example of V is provided by assuming that easterlies are moving into westerlies. Namely, that $a_1 = \gamma_0$. In that case the east wind of maximum value $u = -\frac{\beta (a_2 - \gamma_0)^2}{2}$ would move into the westerlies at speed

$$V = -\frac{\beta (a_2 - \gamma_0)^2}{2}$$

O si $a_2 = 25^\circ$ y $\gamma_0 = 15^\circ$ tendríamos vientos de 20 millas por hora moviéndose al oeste a 13 millas por hora.

Or if $a_2 = 25^\circ$ and $\gamma_0 = 15^\circ$ we would have winds of 20 miles per hour moving westward at 13 miles per hour.

Desde luego, esta onda no puede tener completa discontinuidad en el viento como se ilustra en la Fig. 2. Deberíamos investigar una posible transición en los sistemas de viento que nos lleven desde a_1 hasta a_2 sobre una pequeña área y manteniendo vorticidad constante. Resulta obvio que $v \approx 0$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ deben abandonarse como aproximaciones en esta área. Puesto que tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial t} + V \frac{\partial a}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Conocemos por la incompresibilidad del fluido barotrópico que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ y sabemos por la ecuación de vorticidad que en la barrera

Of course, this wave cannot have a complete discontinuity in the wind as illustrated in Fig. 2. We should investigate a possible transition in the wind systems that will take us from a_1 to a_2 over a small area and maintaining constant vorticity. For one thing it is obvious that $v \approx 0$ and $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ must be dropped as approximations in this area. We do have that

We know from incompressibility of the barotropic fluid that $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. We know from the vorticity equation that in the block

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \zeta \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta_1^2}} + \frac{1}{\zeta_1^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_1 + \frac{2\beta}{V} \log \frac{\zeta}{\zeta_1}$$

debe ser verdad si $\zeta = a - \gamma_0$. * Si asumimos que cada barrera tiene forma tal que la circulación de vientos del este fuertes, sufra transición gradual, resulta que

must be true where $\zeta = a - \gamma_0$. * If we assume that every block has the shape such that the strong easterly flow performs a gradual transition then we have

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \zeta \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta_2^2}} + \frac{2\beta}{V} \log \frac{\zeta}{\zeta_2}$$

Supongamos $\zeta = K(x)\zeta_2$.

Suppose $\zeta = K(x)\zeta_2$.

$$\zeta_2 \frac{\partial K}{\partial x} = K \zeta_2 \sqrt{\frac{1}{K^2 \zeta_2^2} - \frac{1}{\zeta_2^2}} + \frac{2\beta}{V} \log K$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{K}{\zeta_2} \sqrt{\frac{1}{K^2} - 1} + \frac{2\beta \zeta_2^2}{V} \log K$$

$$0 \leq K \leq 1$$

$\beta = 1/6$ por día por grado de latitud.

$\beta = 1/6$ per day degree of latitude.

Haciendo $\zeta = K \zeta_2$, $\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \leq K \leq 1$

We set $\zeta = K \zeta_2$, $\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \leq K \leq 1$

y anotando $V = -\frac{\beta}{3} (\zeta_1^2 + \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2^2)$

and note $V = -\frac{\beta}{3} (\zeta_1^2 + \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2^2)$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{G(K, \alpha)}{\zeta_2}$$

* Que se deriva en un apéndice que puede proporcionar NESCO al pedirse.

* This is derived in an appendix available from NESCO upon request.

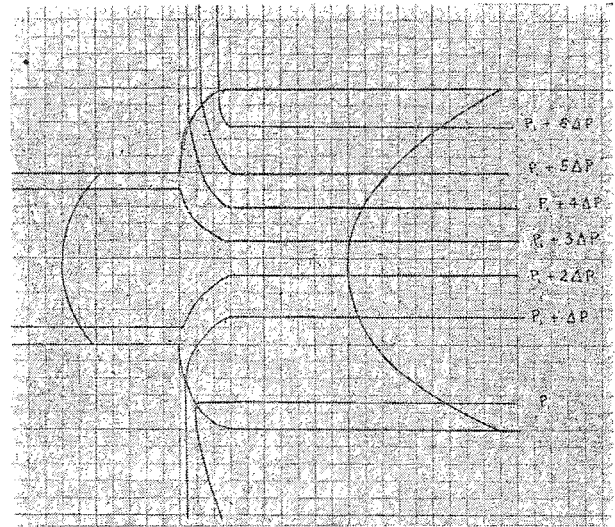
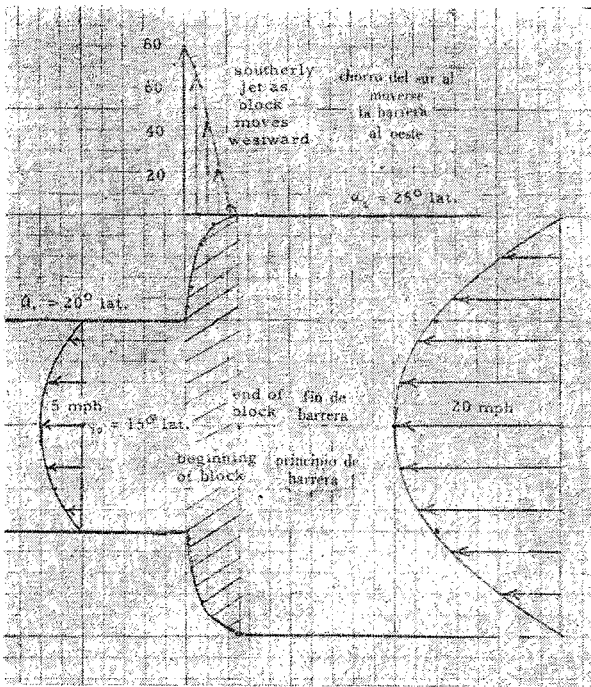


Fig. 3. Una barrera entre $a_2 = 25^\circ$ y $a_1 = 20^\circ$ mostrando la transición y la corriente de chorro del sur al moverse el aire "estacionario de afuera" hacia el norte.

Fig. 4. Isobars with spacing equivalent to 2° latitude for 20 miles per hour at 15° for the flow in Fig. 3.

Fig. 3. A block from $a_2 = 25^\circ$ to $a_1 = 20^\circ$ showing the transition and the southerly jet as the "stationary outside" air moves northward.

Fig. 4. Isobars con espacios equivalentes a 2° de latitud por 20 millas por hora a 15° para la corriente de la Fig. 3.

Integrando desde $K = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ hasta $K = 1$. Para encontrar x para varios K y la forma de la barrera

Integrate from $K = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ to $K = 1$. To find x for various K and the shape of the block:

$$G(K, \alpha) = K \sqrt{\frac{1}{K^2} - 1 + \alpha \log K} = \sqrt{1 - K^2 + \alpha K^2 \log K}$$

donde $\frac{2\beta\xi_2^2}{V}$
 where $\frac{2\beta\xi_2^2}{V}$

Incluimos una tabla de $G(K, \alpha)$ para estimar las formas de barreras.

We include a table of $G(K, \alpha)$ for estimating shapes of jumps.

TABLA DE G(K, α)
 TABLE OF G(K, α)

$\alpha \setminus K$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0
-4	1	1.103	1.194	1.173	.965	.728	0
-8	1	1.214	1.419	1.453	1.225	.933	0
-20	1	1.499	1.942	2.078	1.793	1.375	0
-40	1	1.880	2.589	2.828	2.463	1.895	0
-80	1	2.472	3.545	3.918	3.432	2.645	0
-160	1	3.355	4.928	5.484	4.816	3.715	0
-320	1	4.643	6.909	7.714	6.785	5.235	0
-640	1	6.492	9.728	10.880	9.576	7.391	0
-1280	1	9.129	13.727	15.366	13.529	10.443	0

Si tomamos K_0 donde $a_1 = K_0 a_2 = 0.49$ y $a_2 = 10^\circ$ tenemos $\alpha = 80$. Bajo tales condiciones, usando $\beta = 1/6$,

$$V = \frac{100}{18} (K_0^2 + K_0 + 1) = .24 + .49 + 1 = \frac{1.63}{18} 100$$

$V = 9.05^\circ$ por día.

Usando $\gamma_0 = 15^\circ$, la barrera de estado estacionario debería ir desde 19.9° N hasta 25° N y moviéndose del este al oeste a 9.05° por día. La pendiente sería de unos 4° de latitud por grado de longitud de manera que la barrera tuviese efecto más o menos en un grado y medio o dos grados.

La velocidad norte sur v es dada por $v = -\gamma \frac{\partial u_0}{\partial x}$. La naturaleza de la barrera de estado estacionario es tal que

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{V}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{V}{K\zeta_2} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

Así, podemos escribir

$$v = -\gamma \frac{V}{K\zeta_2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\gamma V}{\zeta_2} \frac{G(\alpha, K)}{K}$$

En nuestro caso $\frac{V}{\zeta_1} = \frac{9.05}{10} = .905$ y tenemos la siguiente tabla

If we take K_0 where $a_1 = K_0 a_2 = 0.49$ and $a_2 = 10^\circ$ we get $\alpha = 80$. Under these conditions, using $\beta = 1/6$,

$V = 9.05^\circ$ per day.

Using the $\gamma_0 = 15^\circ$, the steady state block would go from 19.9° N to 25° N and would be moving from east to west at 9.05° per day. The slope would be about 4° latitude per degree longitude so the block would take effect in about a degree and a half or two degrees.

The north-south speed v is given by $v = -\gamma \frac{\partial u_0}{\partial x}$. The nature of a steady state block is such that

Thus, we can write

In our case $\frac{V}{\zeta_2} = \frac{9.05}{10} = .905$ and we have the following table:

K	.5	.6	.8	.9
$\frac{G(\alpha, K)}{K}$	7.6	6.5	4.3	2.9

Así, para cada valor de K podemos configurar $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ y $v(\gamma)$. Ver Fig. 3. Ya que conocemos todos los vientos y la aceleración, es posible dibujar las isobaras para esta perturbación, las cuales se muestran en la Fig. 4.

AGRADECIMIENTO

Quedo a reconocer una deuda con los organizadores de la III Conferencia Técnica de Huracanes y Meteorología Tropical puesto que presionado para preparar un trabajo para dicha Conferencia, tuve que desarrollar la fórmula básica para el cálculo de la barrera.

BIBLIOGRAFIA

FREEMAN, JR. J. C. The Constant Vorticity Model of the Planetary Jet Stream (Chapter I of Barotropic Models of the Planetary Jet Stream). *Publication 56-28T, Texas A. & M. Research Foundation.*

Thus, for each value of K we can plot $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ and $v(\gamma)$. See Fig. 3. Since we know all winds and acceleration it is possible to draw the isobars for this disturbance. They are shown in Fig. 4.

ACKNOWLEDGEMENT

I wish to acknowledge a debt to the organization of the III Technical Conference on Hurricanes and Tropical Meteorology since the pressure of preparation of a paper for this conference led to the basic development of the formula for the shape of a block.

BIBLIOGRAPHY