

III CONFERENCIA TÉCNICA SOBRE HURACANES Y METEOROLOGÍA TROPICAL TECHNICAL CONFERENCE ON HURRICANES AND TROPICAL METEOROLOGY

México, D. F., Jun. 6-12, 1963

2A. SESIÓN

2ND. SESSION

ESTRUCTURA DE LOS HURACANES STRUCTURE OF HURRICANES

ALGUNOS ESTUDIOS NUMERICOS DE CICLONES TROPICALES

SOME NUMERICAL STUDIES OF TROPICAL CYCLONES

MARIANO A. ESTOQUE *

MARIANO A. ESTOQUE *

RESUMEN

Se investigan teóricamente las características de las circulaciones vertical y radial de un ciclón maduro, considerándose dos modelos, un modelo filtrado y un modelo de ecuación primitiva, ambos axialmente simétricos y dependientes del tiempo. La evolución de las circulaciones, desde una supuesta condición inicial balanceada se obtiene por integraciones numéricas, al comparar resultados para ambos modelos. Las circulaciones calculadas se asemejan a las observadas en un ciclón tropical maduro, especialmente cerca del núcleo central.

INTRODUCCION

Se sabe que un ciclón tropical exhibe alto grado de simetría y permanencia en estructura y energía durante su etapa de madurez. Observaciones previas en cantidad suficiente nos proporcionan un cuadro razonablemente preciso de distribuciones a gran escala de la componente de viento tangencial y de la temperatura. Siendo mucho más pequeños los movimientos radial y vertical que el tangencial, resultan más difíciles de medir. Por ello, parece conveniente deducir dichos movimientos y sus relativamente pequeños cambios durante la etapa de madurez a partir de consideraciones teóricas.

Dos caminos teóricos parecen posibles; en uno de ellos simplemente se integrarían las ecuaciones dominantes igualando a cero todas las derivadas de tiempo local y usando condiciones de frontera apropiadas. Desde luego, este camino no puede dar información sobre variaciones en tiempo de la etapa de madurez, siendo un ejemplo de ese tratamiento los cálculos que hizo Krishnamurti (1961). El otro camino comporta el uso de ecuaciones dependientes del tiempo que se integran numéricamente para obtener de una condición inicial arbitrariamente prescrita la evolución en tiempo. Después podemos asumir que se ha logrado una solución conveniente tan pronto como la integración numérica provea una solución que no cambia rápidamente con el tiempo. Es razonable esperar que el estado de madurez casi-estacionario se alcanzaría más pronto al satisfacerse los dos siguientes requerimientos por las integraciones:

* Departamento de Meteorología y Oceanografía, Universidad de Hawái, Contribución Núm. 55, Instituto de Geofísica de Hawái.

ABSTRACT

The characteristics of the vertical and radial circulations of a mature cyclone are investigated theoretically. Two models are considered, a filtered model and a primitive equation model; both of these are axially symmetric and time dependent. The evolution of the circulations from an assumed balanced initial condition is obtained by numerical integrations. The results for the two models are compared. The computed circulations resemble those observed in a mature tropical cyclone, especially near the central core.

INTRODUCTION

It is well known that the tropical cyclone exhibits a high degree of symmetry as well as permanence in structure and energy during its mature stage. A sufficient amount of past observations provides us with a reasonably accurate picture of the large scale distributions of the tangential wind component and temperature. The radial and vertical motions, being much smaller than the tangential are more difficult to measure. In view of this, it seems worthwhile to deduce these motions and their relatively small changes during the mature stage from theoretical considerations.

Two theoretical approaches appear to be possible. In one approach, one would simply integrate the governing equations with all the local time derivatives made equal to zero using appropriate boundary conditions. This approach, of course, cannot give any information about time variations during the mature stage. An example of this approach is the calculation made by Krishnamurti (1961). The other approach involves the use of the time dependent equations. These are integrated numerically to obtain the evolution in time of an arbitrarily prescribed initial condition. We then assume that a proper solution has been reached as soon as the numerical integration will have marched out a solution which is not changing rapidly in time. It is reasonable to expect that the quasi-steady mature state would be reached sooner if the following two requirements were satisfied by the integrations:

* Department of Meteorology and Oceanography, University of Hawái, Contribution No. 55, Hawaii Institute of Geophysics.

- (1) Las distribuciones que se prescriben inicialmente deberían asemejarse tanto como fuera posible a las condiciones observadas en un ciclón maduro.
- (2) Para integrar el modelo físico, debería construirse y aplicarse especialmente al ciclón maduro casi-estacionario.

En este trabajo se describe un intento de uso del segundo camino mediante dos diferentes modelos. Esencialmente un modelo es el vórtice casi-gradiente presentado por Eliassen (1952) que consecuentemente satisface la segunda condición arriba mencionada. El otro es un modelo de ecuación primitiva previamente aplicado con algún éxito a la brisa del mar (Estoque, 1962a). En ambos modelos se incorporan los efectos de la interfase mar-aire como fuente de calor y momento al introducir una delgada capa superficial (50 metros de grueso) de flujo constante tal como se describe en otro lugar (Estoque, 1963). La presente contribución puede considerarse como ampliación de un estudio previo sobre los movimientos vertical y radial de un huracán (Estoque, 1962b) que consiste principalmente en la integración del tiempo del modelo casi-gradiente con la incorporación de una capa de frontera más realista cercana a la superficie de la Tierra.

CONSIDERACIONES TEORICAS

Las ecuaciones dominantes para los modelos de ecuación primitiva y casi-gradiente se refieren a un vórtice axialmente simétrico. Las ecuaciones para el modelo casi-gradiente son

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} + v \left(f + \frac{u}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{2}{2r} \left[K_H \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \right] \quad (1)$$

$$u \left(f + \frac{u}{r} \right) = \theta_s \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} = - \frac{g}{\theta} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \rho_s v) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho_s w) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial r} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + K_H \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \Gamma^* w \quad (5)$$

donde

where:

$$\Phi^* \equiv c_p \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p} \quad \Gamma^* \equiv \begin{cases} 0, & w \leq 0 \\ \frac{L}{\Phi^*} \frac{\partial q_m}{\partial z}, & w > 0 \end{cases}$$

$$p_0 \equiv 1000 \text{ mb}$$

El índice "s" sobre θ y ρ indica valores para la atmósfera tropical standard; q_m es el cociente de mezcla saturada co-

- (1) The distributions which are prescribed initially should resemble as closely as possible the observed conditions in a mature cyclone.
- (2) The physical model to be integrated should be constructed to apply especially to the quasi-steady mature cyclone.

This paper describes an attempt to use the second approach using two different models. One model is essentially the quasi-gradient vortex presented by Eliassen (1952); it, therefore, satisfies the second requirement just mentioned. The other is a primitive equation model previously applied with some success to the sea breeze (Estoque, 1962a). In both models, the effects of the sea-air interface as a source of momentum and heat are incorporated by introducing a thin surface layer (50 meters thick) of constant flux as described elsewhere (Estoque, 1963). The present work may be considered as an extension of an earlier study on the vertical and radial motions of a hurricane (Estoque, 1962b). The extension consists mainly of the time integration of the quasi-gradient model plus the incorporation of a more realistic boundary layer adjoining the Earth's surface.

THEORETICAL CONSIDERATIONS

The governing equations for both quasi-gradient and primitive equation models refer to an axially symmetric vortex. The equations for the quasi-gradient model are

The subscript "s" on θ and ρ indicate values for the standard tropical atmosphere; q_m is the corresponding saturated

respondiente. Para obtener una solución para u y θ de las condiciones iniciales prescritas deben resolverse v y w usando un procedimiento similar al descrito en un artículo previo (Estoque, 1962b).

Las ecuaciones para el modelo de ecuación primitiva comprenden las Ecs. (1), (3) y (5) más las siguientes

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} - u \left(\frac{u}{r} + f \right) = -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[K_H \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \right] \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (r \rho_s w) = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \rho_s v) \right] \tag{7}$$

Deberá notarse que no se incluye una ecuación de predicción para la humedad en ninguno de los modelos. Para explicar el calor latente de condensación suponemos que el aire ascendente siempre se acompaña de condensación; tampoco se introdujo enfriamiento para evaporación de aire descendente. Desde luego se comprende que esto es una suposición muy burda, aunque constituye una satisfactoria aproximación inicial. Pueden obtenerse más detalles sobre el modelo de ecuación primitiva en el trabajo previamente mencionado sobre la brisa del mar. En el apéndice hemos derivado el modelo casi-gradiente de las ecuaciones anelásticas de Ogura y Phillips (1962) para mostrar rigurosamente las condiciones en que son válidas las ecuaciones casi-gradientes. Además, se presentan algunas de sus más importantes propiedades.

mixing ratio. In order to march out a solution for u and θ from prescribed initial conditions, one has to solve for v and w using a procedure similar to that described in a previous article (Estoque, 1962b).

The equations for the primitive equation model consists of Eqs. (1), (3) and (5) together with the following:

It will be noticed that a prediction equation for moisture is not included in either model. In order to account for the latent heat of condensation, we assumed that ascending air is always associated with condensation; no evaporational cooling of descending air was allowed. It is, of course, realized that this is a very crude assumption but, nevertheless, a satisfactory first approximation. More details about the primitive equation model may be obtained from the previously mentioned paper on the sea breeze. In the appendix, we have derived the quasi-gradient model from the anelastic equations of Ogura and Phillips (1962) in order to show rigorously the conditions under which the quasi-gradient equations are valid. In addition, some of its more important properties are presented.

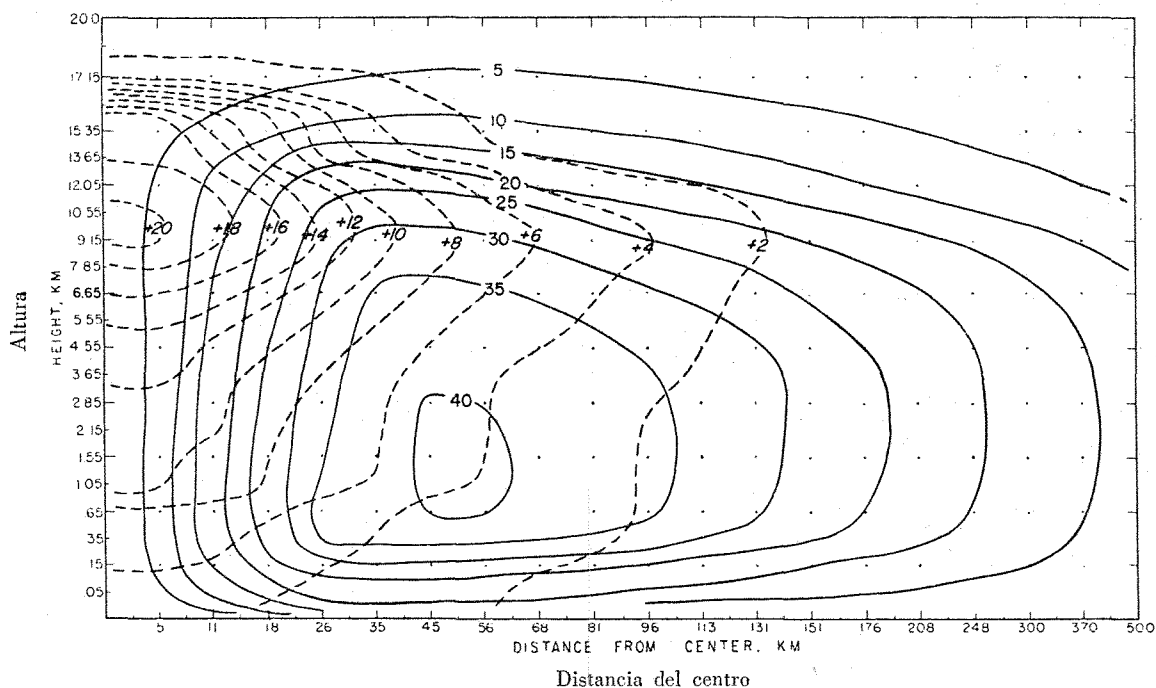


Fig. 1. Distribución inicial de la componente de velocidad tangencial (m seg⁻¹) y de la temperatura potencial (°C en exceso sobre atmósfera tropical standard) para el modelo casi-gradiente.

Fig. 1. The initial distributions of tangential velocity component (m sec⁻¹) and potential temperature (°C excess over standard tropical atmosphere) for the quasi-gradient model.

SOLUCION NUMERICA

La sección vertical cuyas integraciones se realizaron tiene 20 Km de profundidad y 500 Km de extensión horizontal. El espaciamiento de la cuadrícula es variable tanto en dirección radial como vertical, más pequeño cerca del centro del vórtice y de la superficie de la Tierra y gradualmente expandiéndose hacia arriba y afuera. Las coordenadas reales de la cuadrícula están indicadas por números en los lados izquierdo e inferior de la región (Fig. 1). Las ecuaciones de predicción, Ecs. (1), (5) y (6), se reemplazaron con análogos de diferencia finita de acuerdo con el esquema propuesto por Lelevier (Richtmyer, 1957) en que las derivadas de tiempo local y espacio advectivo no están centradas. Los intervalos de tiempo fueron de 90 segundos y 15 segundos para los modelos casi-gradiente y de ecuación primitiva, respectivamente.

Se impusieron las siguientes condiciones de frontera:

$$z = 20 \text{ Km:}$$

$$P = P_s, \theta = \theta_s, u = w = v = 0$$

$$z = 0:$$

$$T = {}^\circ\text{C}, u = w = v = 0$$

$$r = 0:$$

$$u = v = 0$$

En $r = 500 \text{ Km}$ suponemos que la advección horizontal y vertical y los procesos de mezcla lateral son despreciables. Los cambios por remolinos a través de la interfase mar-aire fueron calculados de acuerdo con el modelo de capa de frontera mencionado previamente (Estoque, 1963).

Para ambos modelos se usaron prácticamente las mismas condiciones iniciales para u y θ (Fig. 1). La distribución inicial θ se basó en condiciones medias de huracanes en tanto que u se calculó por la distribución θ , con ayuda de las ecuaciones de gradiente de viento e hidrostática. En $r = 176 \text{ Km}$ la distribución de u calculada originalmente, que dio vorticidades absolutas negativas de $z = \text{Km}$ a $z = \text{Km}$, se modificó ligeramente para eliminar la región de valores negativos requerida por el modelo casi-gradiente. Sin embargo, la distribución original u con área de vorticidad absoluta negativa se usó para el modelo de ecuación primitiva. La condición inicial para la velocidad radial requerida por el modelo de ecuación primitiva consistió en hacer a esta componente igual a cero en todos los puntos de la cuadrícula.

RESULTADOS

MODELO CASI-GRADIENTE.—Las integraciones de tiempo de este modelo y también del modelo de ecuación primitiva se realizaron para un período de hora y media de tiempo

NUMERICAL SOLUTION

The vertical cross section for which the integrations were carried out is 20 Km in depth and 500 Km in horizontal extent. The grid spacing is variable along both vertical and radial directions, the spacing being smallest near the vortex center and the Earth's surface and gradually expanding upward and outward. The actual grid coordinates are indicated by the numbers along the left and bottom boundaries of the region (Fig. 1). The prediction equations, Eqs. (1), (5) and (6), were replaced by finite difference analogs according to the scheme proposed by Lelevier (Richtmyer, 1957) in which the local time and advective space derivatives are uncentered. The time steps were 90 seconds and 15 seconds for the quasi-gradient and the primitive equation models, respectively.

The following boundary conditions were imposed:

$$z = 20 \text{ Km:}$$

$$P = P_s, \theta = \theta_s, u = w = v = 0$$

$$z = 0:$$

$$T = {}^\circ\text{C}, u = w = v = 0$$

$$r = 0:$$

$$u = v = 0$$

At $r = 500 \text{ Km}$, we assumed that horizontal and vertical advection as well lateral mixing processes are negligible. Eddy transfers across the sea-air interface were calculated in accordance with the boundary layer model mentioned previously (Estoque, 1963).

Both models used practically the same initial conditions for u and θ (Fig. 1). The initial θ distribution is based on observed mean hurricane conditions while u is computed from the θ distribution with the aid of the hydrostatic and the gradient wind equations. At $r = 176 \text{ Km}$ the originally computed u distribution, which gave negative absolute vorticities from $z = \text{Km}$ to $z = \text{Km}$, was modified slightly in order to eliminate the region of negative values required by the quasi-gradient model. However, the original u distribution with an area of negative absolute vorticity was used in the primitive equation model. The initial condition for the radial velocity required by the primitive equation model consisted of setting this component equal to zero at all grid points.

RESULTS

QUASI-GRADIENT MODEL.—Time integration of this model and also of the primitive equation model were carried out for a period of one and a half hours of meteorological time.

meteorológico, pero sólo los resultados de la primera hora se han presentado en este trabajo. Las Figs. 2 y 3 muestran los tipos de viento tangencial calculado y de temperatura potencial a 30 y 60 minutos después del tiempo inicial. En general, una comparación con las correspondientes distribuciones

But only the results during the first hour will be presented here. Figs. 2 and 3 show the computed tangential wind and potential temperature patterns at 30 and 60 minutes after the initial time. Comparison with the corresponding initial distributions show that, in general, only minor changes have

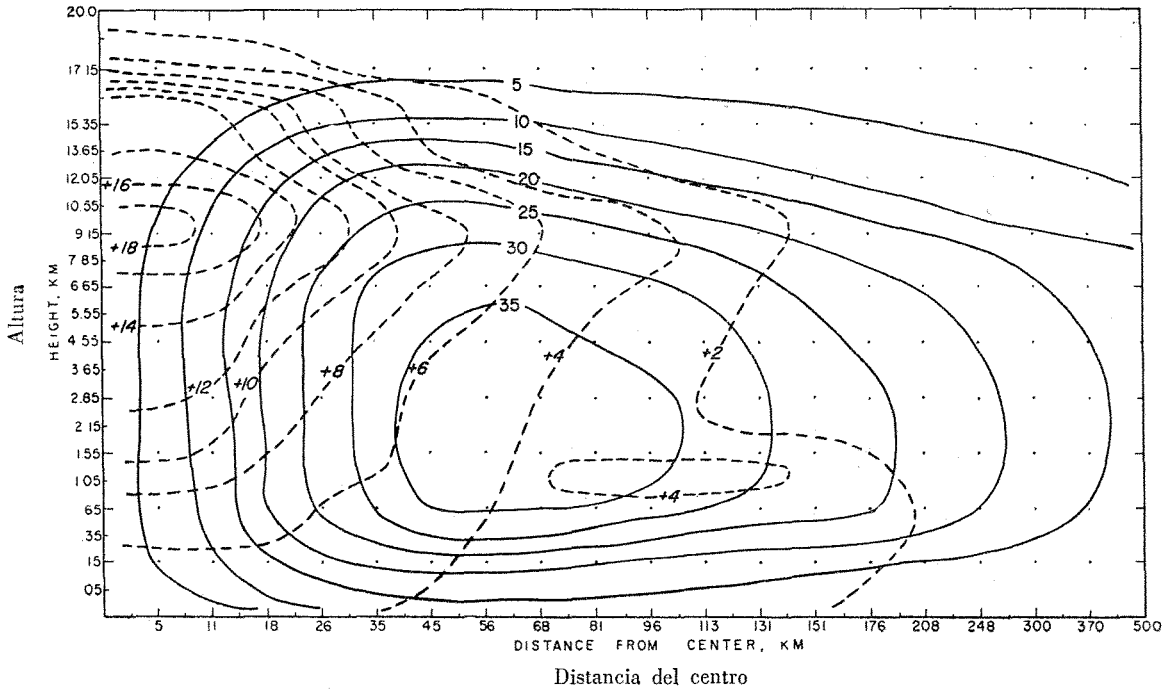


Fig. 2. Distribución pronosticada media hora después del tiempo inicial de la componente de velocidad tangencial ($m\ sec^{-1}$) y de la temperatura potencial ($^{\circ}C$ en exceso sobre atmósfera tropical standard) para el modelo casi-gradiente.

Fig. 2. The predicted distributions, one half hour after initial time, of tangential velocity component ($m\ sec^{-1}$) and potential temperature ($^{\circ}C$ excess over standard tropical atmosphere) for the quasi-gradient model.

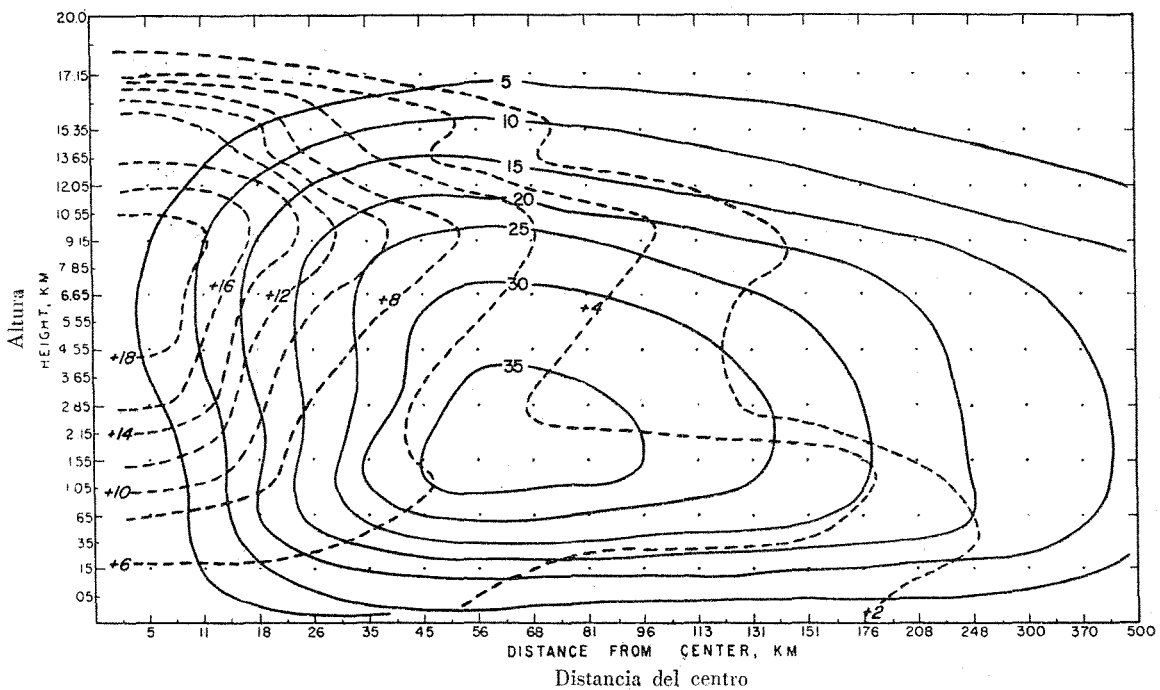


Fig. 3. Distribución pronosticada una hora después del tiempo inicial de la componente de velocidad tangencial ($m\ sec^{-1}$) y de la temperatura potencial ($^{\circ}C$ en exceso sobre atmósfera tropical standard) para el modelo casi-gradiente.

Fig. 3. The predicted distributions, one hour, after initial time, of tangential velocity component ($m\ sec^{-1}$) and potential temperature ($^{\circ}C$ excess over standard tropical atmosphere) for the quasi-gradient model.

iniciales muestra que sólo hubo pequeños cambios siendo el más importante en el tipo de viento tangencial la disminución en magnitud en las capas más bajas debido a la mezcla vertical y en la región de máxima velocidad como resultado de mezcla lateral. Tal efecto no era inesperado ya que la distribución de viento inicial quedaba equilibrada con relación al gradiente de presión, y a las fuerzas de Coriolis y centrífuga. Los cambios en dicha distribución representan el

occurred. The most important changes in the tangential wind pattern are decreases in magnitude at the lowest layers due to vertical mixing and at the region of maximum speed due mainly to lateral mixing. This result is not unexpected because the initial wind distribution was balanced with respect to the pressure gradient, Coriolis, and centrifugal forces. The changes in the distribution represent an attempt by the atmosphere to attain a new equilibrium condition con-

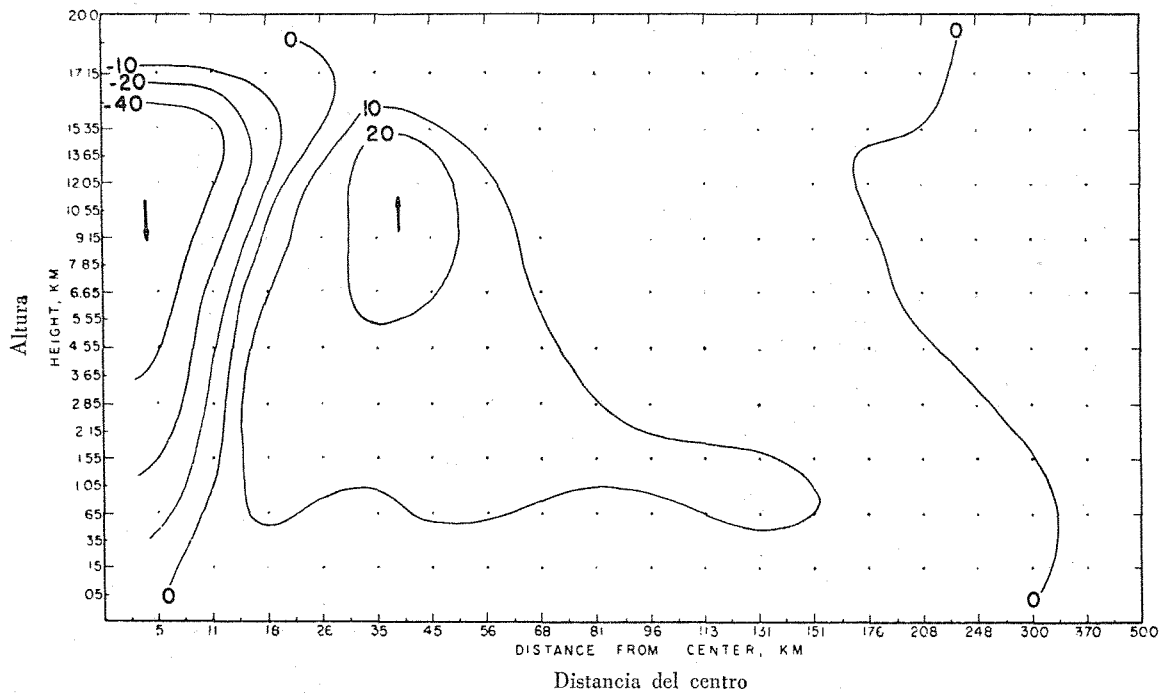


Fig. 4. Componente de velocidad vertical calculada (cm seg^{-1}) en el tiempo inicial para el modelo casi-gradiente.

Fig. 4. The computed vertical velocity component (cm sec^{-1}) at initial time for the quasi-gradient model.

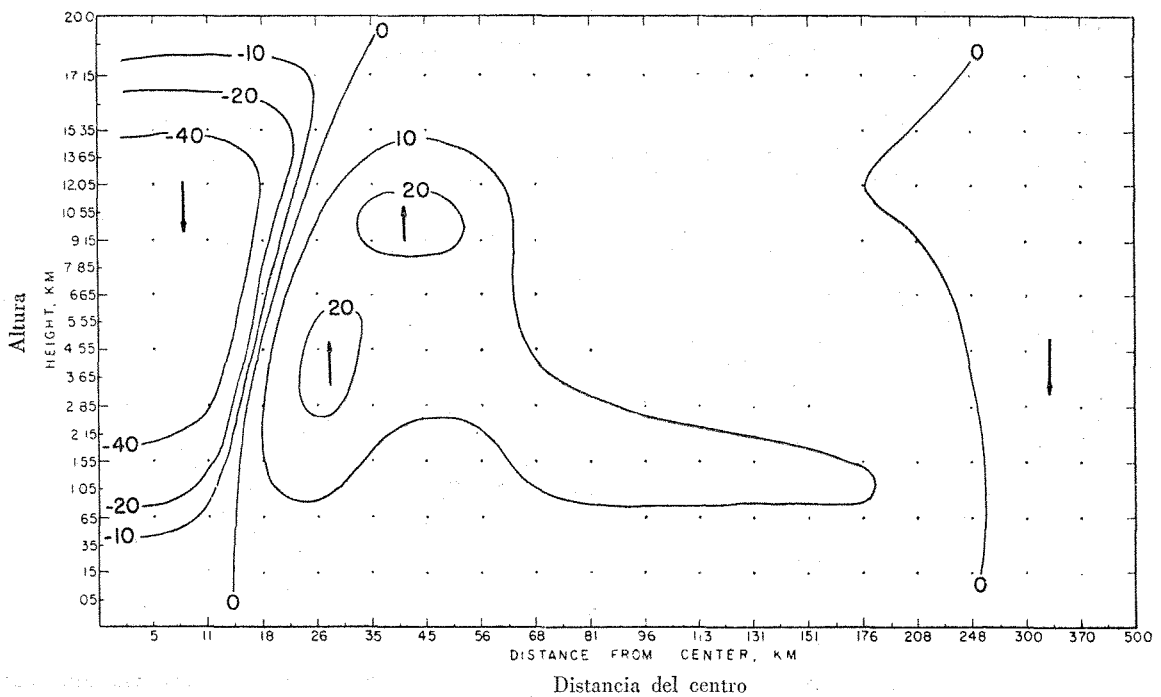


Fig. 5. Componentes de velocidad vertical pronosticadas (cm seg^{-1}) media hora después del tiempo inicial para el modelo casi-gradiente.

Fig. 5. The predicted vertical velocity components (cm sec^{-1}) one half hour after initial time for the quasi-gradient model.

esfuerzo de la atmósfera para alcanzar una nueva condición de equilibrio consistente con la introducción de la fricción. Deberá notarse que los cambios son mucho más pequeños durante la segunda media hora que durante la primera, indicando que se alcanzó el estado casi-estacionario.

Durante el mismo período ha tenido lugar enfriamiento por mezcla lateral en niveles superiores de la región central, mientras en el nivel de 3 Km, en el ojo, se ha producido

sistent with the introduction of friction. It will be noticed that the changes are much smaller during the second half hour than they were during the first half, indicating perhaps that a quasi-steady state is being approached.

During the same period cooling by lateral mixing at upper levels in the central region has occurred. Near the 3-Km level in the eye, descending motions have produced

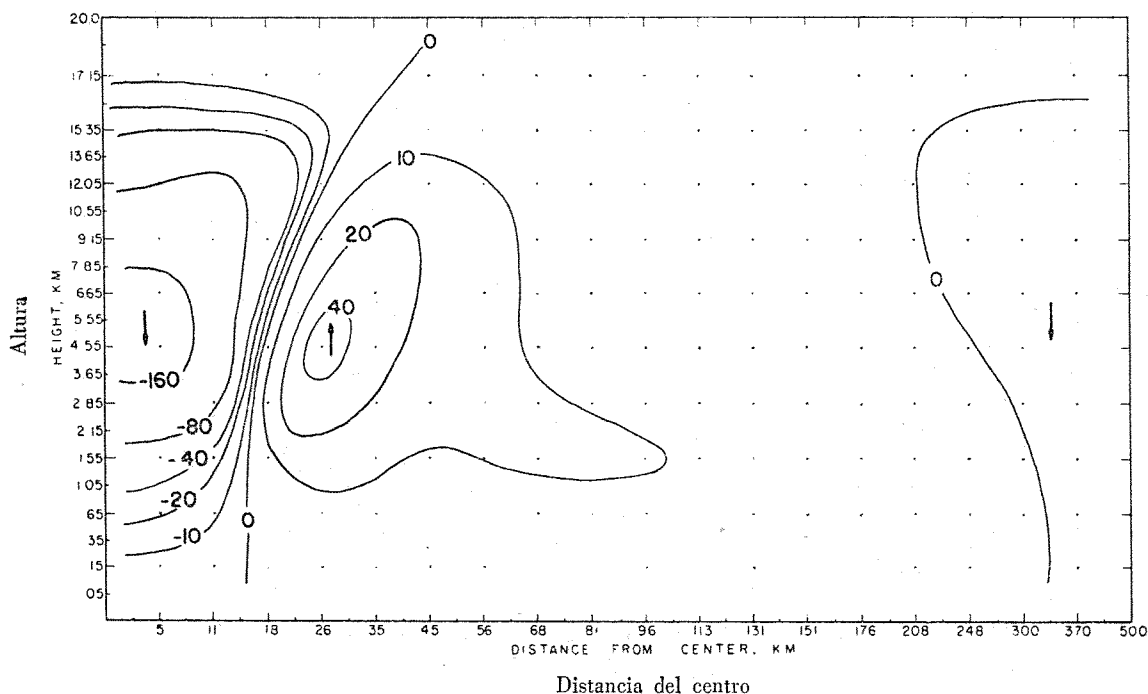


Fig. 6. Componentes de velocidad vertical pronosticadas (cm seg⁻¹) una hora después del tiempo inicial para el modelo casi-gradiente.

Fig. 6. The predicted vertical velocity components (cm sec⁻¹) one hour after initial time for the quasi-gradient model.

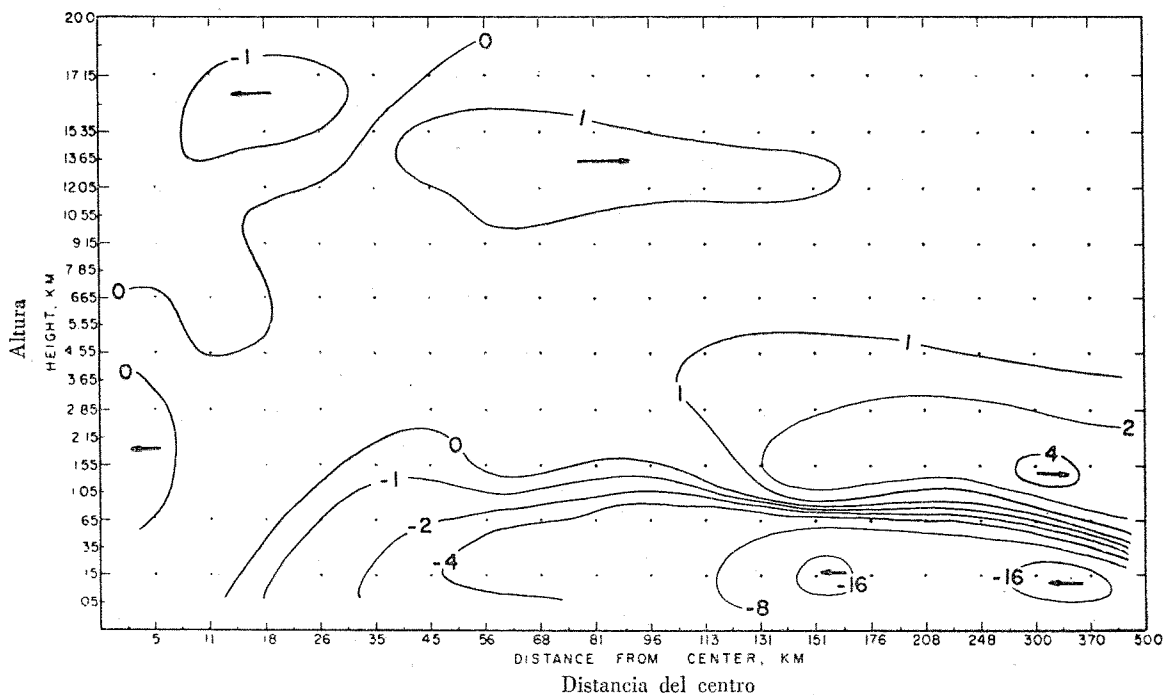


Fig. 7. Componentes de velocidad radial calculadas (m seg⁻¹) en el tiempo inicial para el modelo casi-gradiente.

Fig. 7. The computed radial velocity components (m sec⁻¹) at initial time for the quasi-gradient model.

calentamiento por movimientos descendentes y en menor grado también en las capas más bajas por transferencia de remolinos desde la superficie del mar.

En las Figs. 4 a 6 se muestran las correspondientes componentes de velocidad vertical calculadas en tanto que las componentes radiales se muestran en las Figs. 7 a 9. Un reforzamiento gradual de la circulación vertical ha existido durante el período y por ello, los movimientos ascendentes en

warming. Slight warming has also occurred in the lowest layers by eddy transfer from the sea surface.

The corresponding computed vertical velocity components are shown in Figs. 4 to 6 while the radial components are shown in Figs. 7 to 9. A gradual strengthening in the vertical circulation during the period is indicated. Thus, the ascending motions in the eyewall doubled approximately

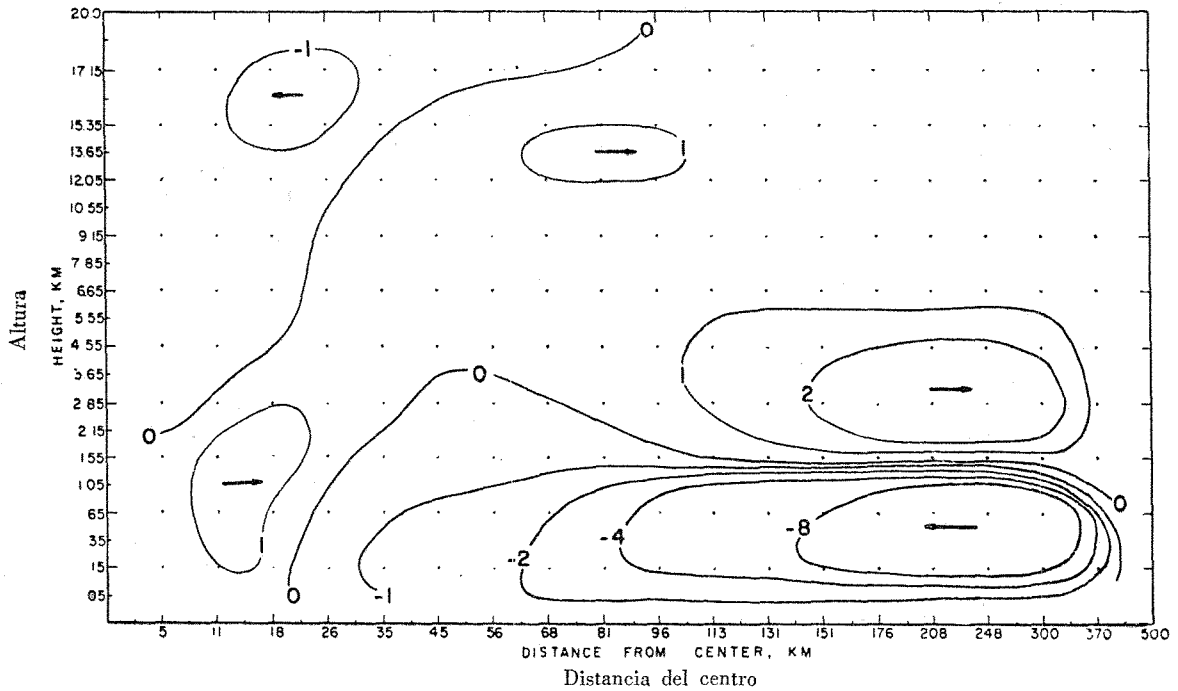


Fig. 8. Componentes de velocidad radial pronosticadas (m seg⁻¹) media hora después del tiempo inicial para el modelo casi-gradiente.

Fig. 8. The predicted radial velocity components (m sec⁻¹) one half hour after initial time for the quasi-gradient model.

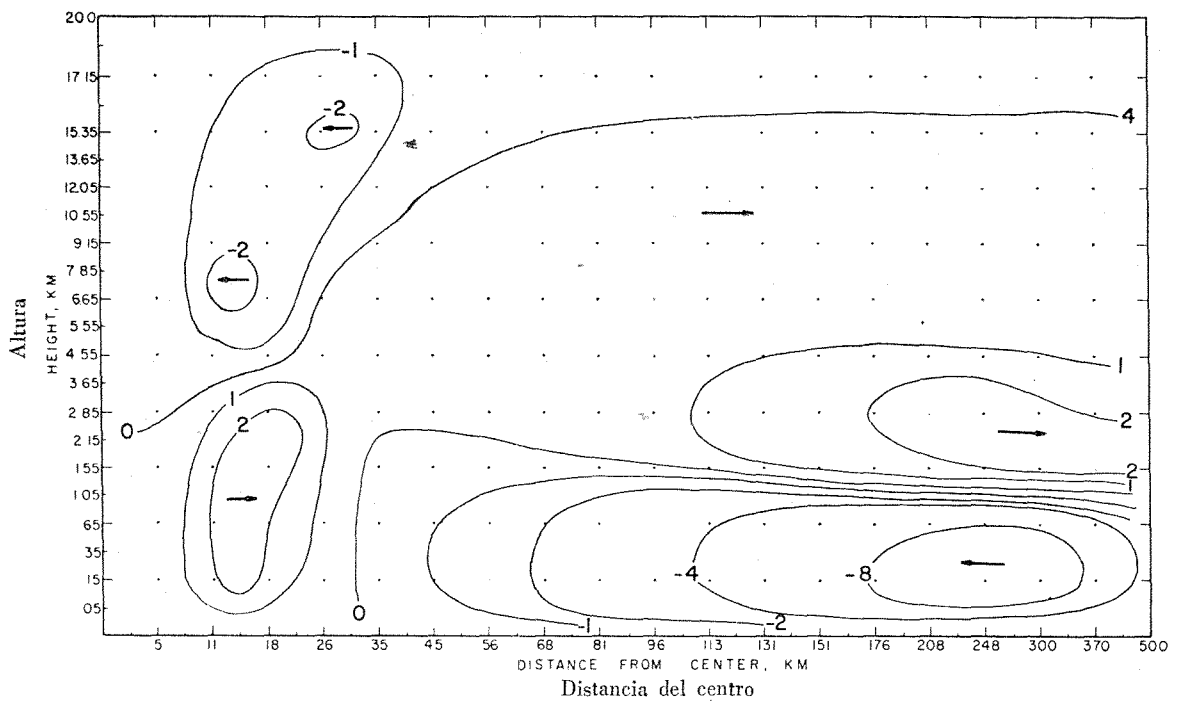


Fig. 9. Componentes de velocidad radial pronosticadas (m seg⁻¹) una hora después del tiempo inicial para el modelo casi-gradiente

Fig. 9. The predicted radial velocity components (m sec⁻¹) one hour after initial time for the quasi-gradient model.

la pared del ojo se duplicaron aproximadamente en intensidad con máximo desplazamiento de su posición inicial en $z = 11$ Km y $r = 35$ Km hacia una posición inferior y más cercana al centro ($z = 5$ Km, $r = 25$ Km). El cambio parece que fue debido al calentamiento por descenso en el ojo cerca del nivel de 3 Km mientras la intensificación del movimiento ascendente en la pared del ojo estuvo acompañada por un incremento de movimientos descendentes en el núcleo central. También aumentó el diámetro del ojo, adquiriendo una forma de embudo bien definida con fuertes pendientes en los niveles inferiores. Algunas observaciones (Riehl, 1954) y cálculos independientes de Palmén (1956) parecen comprobar este resultado.

Los cambios en la distribución de la componente de viento radial simplemente reflejan el reforzamiento de las componentes verticales, habiendo intensificación de circulación entrante de alto nivel y saliente a bajo nivel en la región central. Por otra parte, la principal circulación entrante adyacente a la superficie disminuyó en magnitud, lo cual fue debido a un debilitamiento del gradiente vertical del viento en esa región por difusión vertical de los remolinos. Se notará que la circulación entrante a bajo nivel es relativamente somera, pues apenas alcanza 1.5 Km de espesor; la máxima velocidad se localiza a unos 250 Km del centro. Las velocidades radiales medias observadas por Miller (1958), que muestran un máximo a 3 grados de latitud del centro, parecen verificar los cálculos. Sin embargo, el análisis de Hughes (1952), indica que las velocidades máximas se localizan en un radio de medio grado de latitud del centro. Un rasgo irreal de nuestros tipos de vientos radiales calculados es la posición de la circulación saliente más importante

in intensity with the maximum shifting from its initial location at $z = 11$ Km and $r = 35$ Km toward a position which is lower and nearer the center ($z = 5$ Km, $r = 25$ Km). The change appears to be associated with heating by subsidence in the eye near the 3-Km level. The intensification of the upward motions in the eyewall was accompanied by an increase of downward motions in the central core. The eye has also increased its diameter and acquired a well-defined funnel-shaped appearance with steep slopes at lower levels. Observations (Riehl, 1954) and independent calculations by Palmén (1956) seem to support this result.

The changes in the distribution of the radial wind component merely reflect the strengthening of the vertical components. There is intensification of the high level inflow and the lower level outflow in the central region. On the other hand, the principal inflow adjacent to the surface decreased in magnitude. This is due to a weakening of the vertical gradient of the wind in this region by vertical eddy diffusion. It will be noticed that the low-level inflow is relatively shallow, being about 1.5 Km in depth; the maximum speed is located at about 250 Km from the center. Miller's (1958) observed mean radial speeds which show a maximum at 3 degrees of latitude from the center appear to verify the calculations. However, the analysis of Hughes (1952) indicate that the maximum speeds are located within a radius of half of a degree of latitude from the center. An unrealistic feature in our computed radial wind patterns is the position of the major outflow which is directly above the low-level inflow. Observational data (Riehl, 1954;

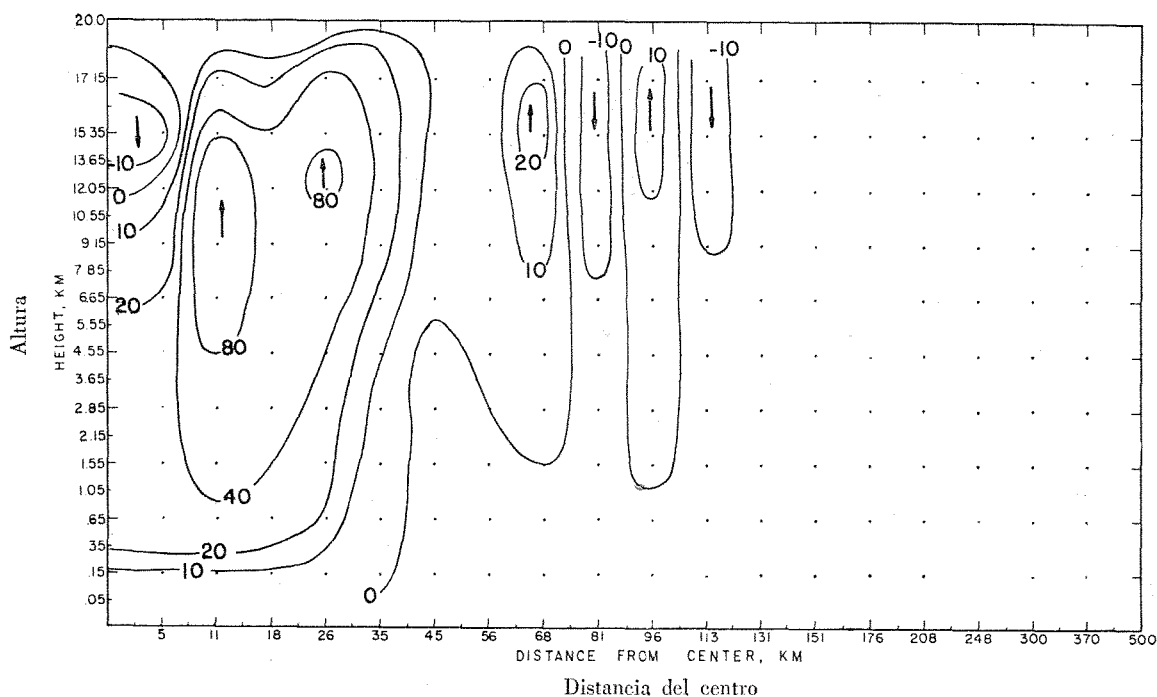


Fig. 10. Componentes de velocidad vertical (cm seg^{-1}) pronosticadas un cuarto de hora después del tiempo inicial para el modelo de ecuación primitiva.

Fig. 10. The predicted vertical velocity (cm sec^{-1}) components one fourth hour after initial time for the primitive equation model.

situada directamente encima de la entrante a bajo nivel. Datos de observación (Riehl, 1954; Miller, 1958) indican que la circulación saliente tiene lugar principalmente en la alta tropósfera.

Miller, 1958) indicate that the outflow occurs mainly in the high troposphere.

MODELO DE ECUACIÓN PRIMITIVA.— El siguiente grupo de figuras (Figs. 10-15) presentan los resultados de este modelo a 15, 30 y 45 minutos del tiempo inicial. Como en el caso

PRIMITIVE EQUATION MODEL—The next group of figures (Figs. 10-15) represent the results for this model at 15, 30, and 45 minutes after initial time. As in the case of the

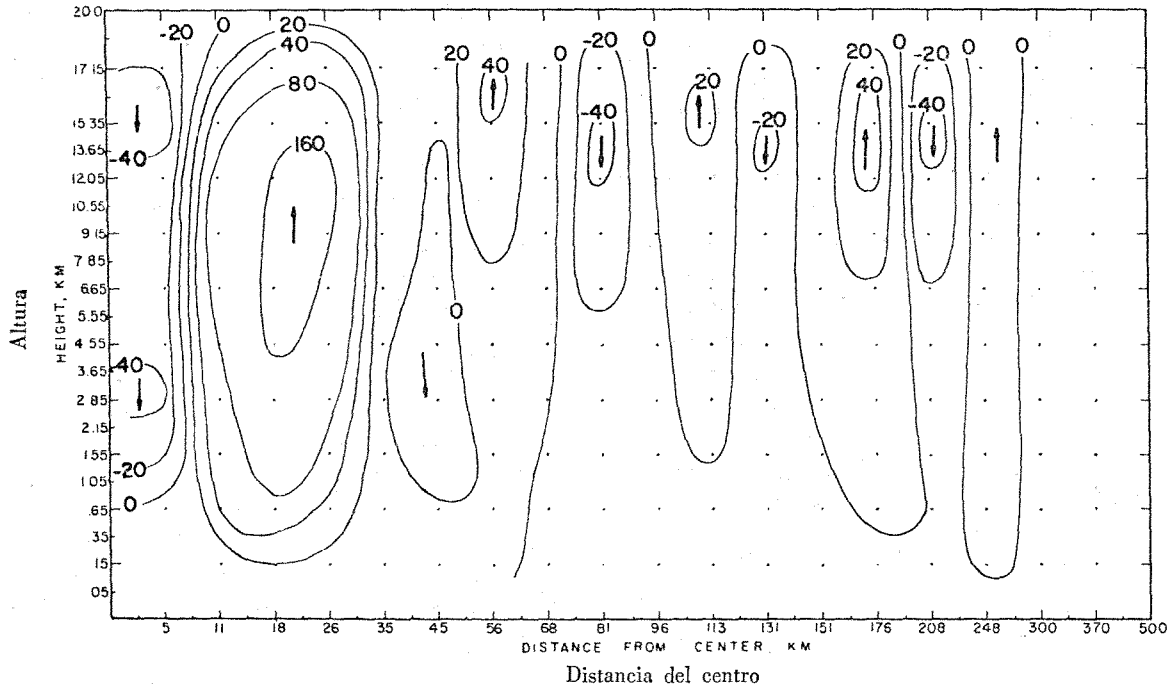


Fig. 11. Componentes de velocidad vertical (cm seg⁻¹) pronosticadas media hora después del tiempo inicial para el modelo de ecuación primitiva.

Fig. 11. The predicted vertical velocity (cm sec⁻¹) components one half hour after initial time for the primitive equation model.

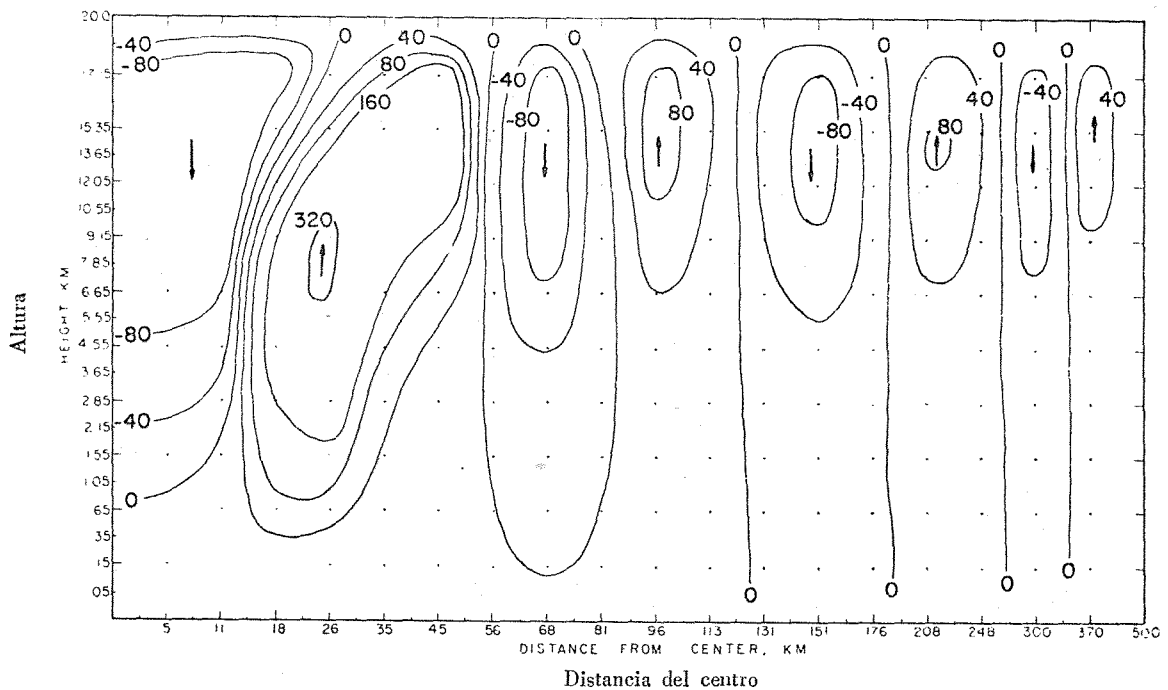


Fig. 12. Componentes de velocidad vertical (cm seg⁻¹) pronosticadas tres cuartos de hora después del tiempo inicial para el modelo de ecuación primitiva.

Fig. 12. The predicted vertical velocity (cm sec⁻¹) components three fourth hour after initial time for the primitive equation model.

del modelo casi-gradiente, hubo cambios relativamente pequeños en las distribuciones de u y θ (Fig. 10). Se recordará que las condiciones iniciales correspondían exactamente al gradiente de circulación ($u(r, z), v = w = 0$). Inmediatamente después de comenzadas las integraciones, las fuerzas de fricción por procesos de mezcla lateral y vertical comenzaron a modificar la circulación balanceada. Con el viento disminuyó la mezcla vertical en las capas inferiores y por consiguiente, se redujo la fuerza centrífuga que resultó menor que la fuerza del gradiente de presión, generándose así una circulación entrante a bajo nivel. En la tropósfera superior, a pocas decenas de kilómetros del centro, la mezcla lateral de temperatura llegó a una reducción del gradiente de temperatura horizontal y por consideraciones hidrostáticas, también del gradiente de presión horizontal. El efecto fue hacer menor el gradiente de presión que la fuerza centrífuga que permaneció relativamente sin cambio, creándose una circulación saliente de alto nivel. En la región entre esta circulación saliente y el centro, los procesos de mezcla lateral causaron un decremento más rápido en la fuerza centrífuga con respecto a la fuerza gradiente de presión. Así, se formó una circulación entrante de alto nivel hacia el ojo. Según el principio de conservación de masa y de acuerdo con el tipo de circulaciones entrante y saliente ya descritos, el movimiento ascendente en la pared del ojo y descendente en el centro fueron generados simultáneamente.

Parece que ambos modelos pueden reproducir los rasgos significantes de las circulaciones radial y vertical-descenso en el ojo, ascenso en la pared del ojo, circulación entrante de alto nivel en la región central, circulación saliente a

quasi-gradient model, relatively minor changes in the u and θ distributions have occurred (Fig. 10). It will be recalled that the initial conditions correspond to exact gradient flow ($u(r, z), v = w = 0$). Immediately after the integrations started, the frictional forces due to both lateral and vertical mixing processes began to modify the balanced flow. Vertical mixing decreased the wind in the lowest layers, thereby reducing the centrifugal force and making it less than the pressure gradient force. The result is a generation of the low-level inflow. In the upper troposphere a few tens of kilometers away from the center, lateral mixing of the temperature led to a reduction in the horizontal temperature gradient and, from hydrostatic considerations, also of the horizontal pressure gradient. The effect is to make the pressure gradient less than the centrifugal force which remained relatively unchanged; hence, an upper-level outflow is created. In the region between this outflow and the center, lateral mixing processes led to a more rapid decrease in the centrifugal force relative to the pressure gradient force. Thus, an upper level inflow toward the eye is created. Through the conservation of mass principle and in conjunction with the pattern of inflow and outflow just described, upward motion in the eyewall and descent in the center are simultaneously generated.

It appears that both models are able to reproduce the significant features of the radial and vertical circulations — descent in the eye, ascent in the eyewall, upper-level inflow in the central region, low-level inflow, and com-

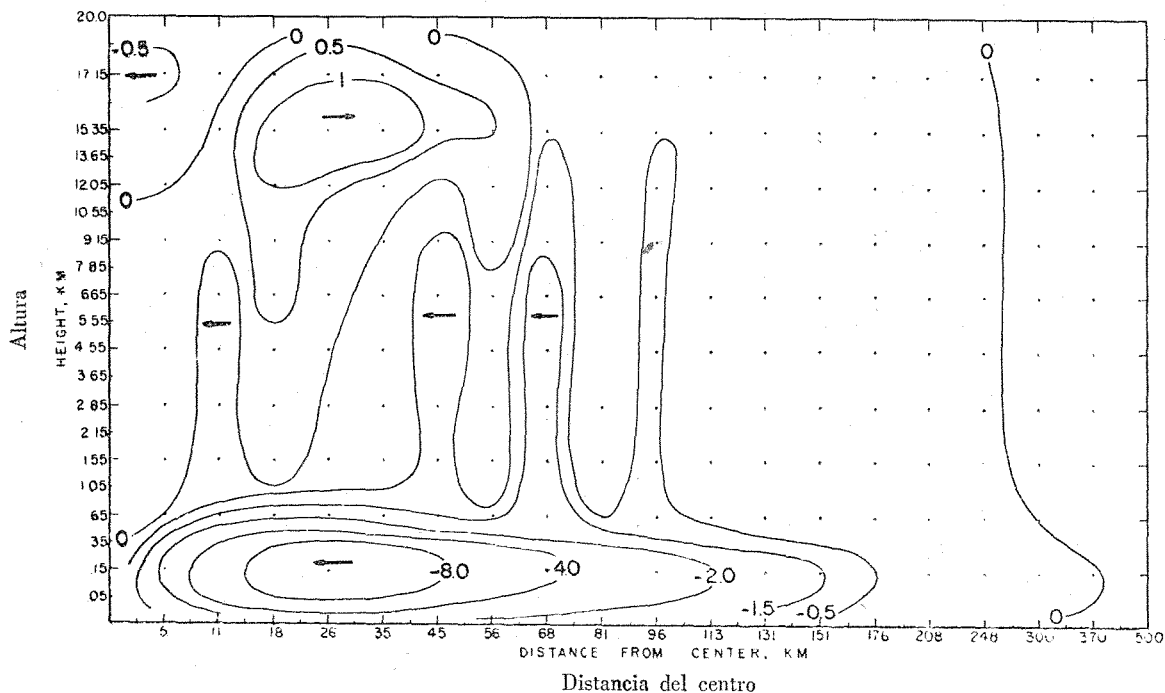


Fig. 13. Componentes de velocidad radial pronosticadas ($m \text{ seg}^{-1}$) un cuarto de hora después del tiempo inicial para el modelo de ecuación primitiva.

Fig. 13. The predicted radial velocity components ($m \text{ sec}^{-1}$) one fourth hour after initial time for the primitive equation model.

bajo nivel y circulación de salida por compensación arriba. La principal diferencia entre tales resultados se refiere a la situación de la circulación entrante a bajo nivel y la saliente de alto nivel. El modelo de ecuación primitiva dio una posición para la máxima circulación entrante a bajo nivel que está mucho más cerca del centro que la indicada por el modelo casi-gradiente. La circulación saliente compensatoria se

pensating outflow above. The main difference between the results is concerned with the locations of the low-level inflow and the upper-level outflow. The primitive equation model gave a position for the maximum low-level inflow which is much closer to the center than that given by the quasi-gradient model. The compensating outflow is located at upper levels for the primitive equation model while the out-

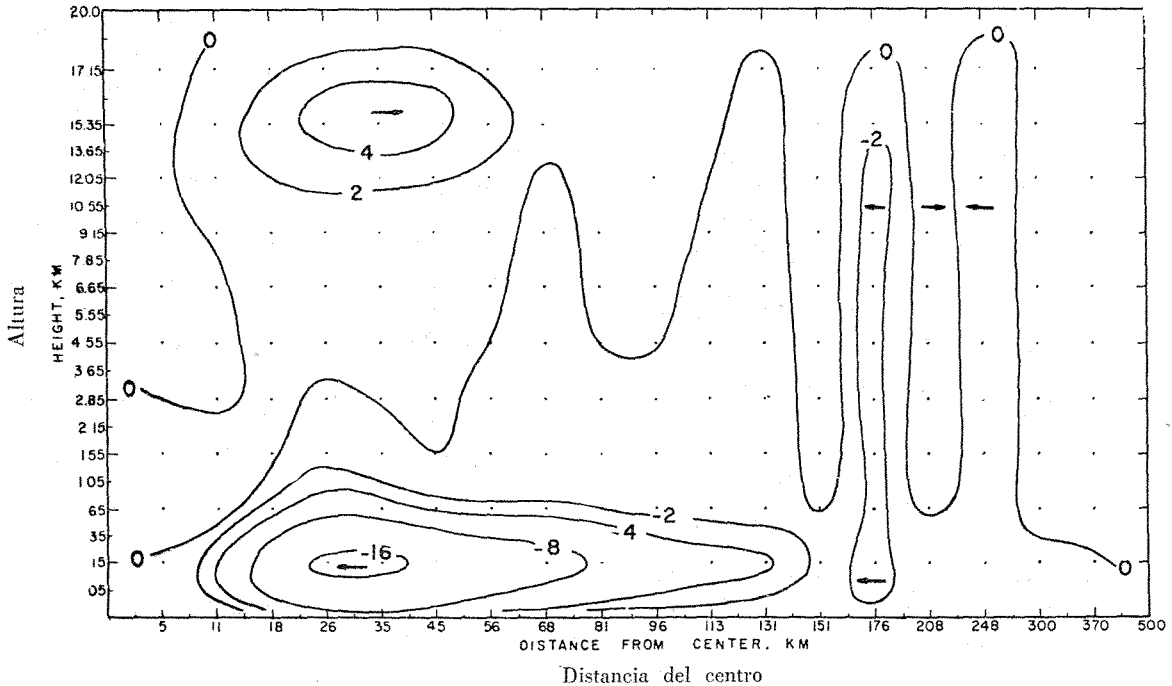


Fig. 14. Componentes de velocidad radial pronosticadas (m seg⁻¹) media hora después del tiempo inicial para el modelo de ecuación primitiva.

Fig. 14. The predicted radial velocity components (m sec⁻¹) one half hour after initial time for the primitive equation model.

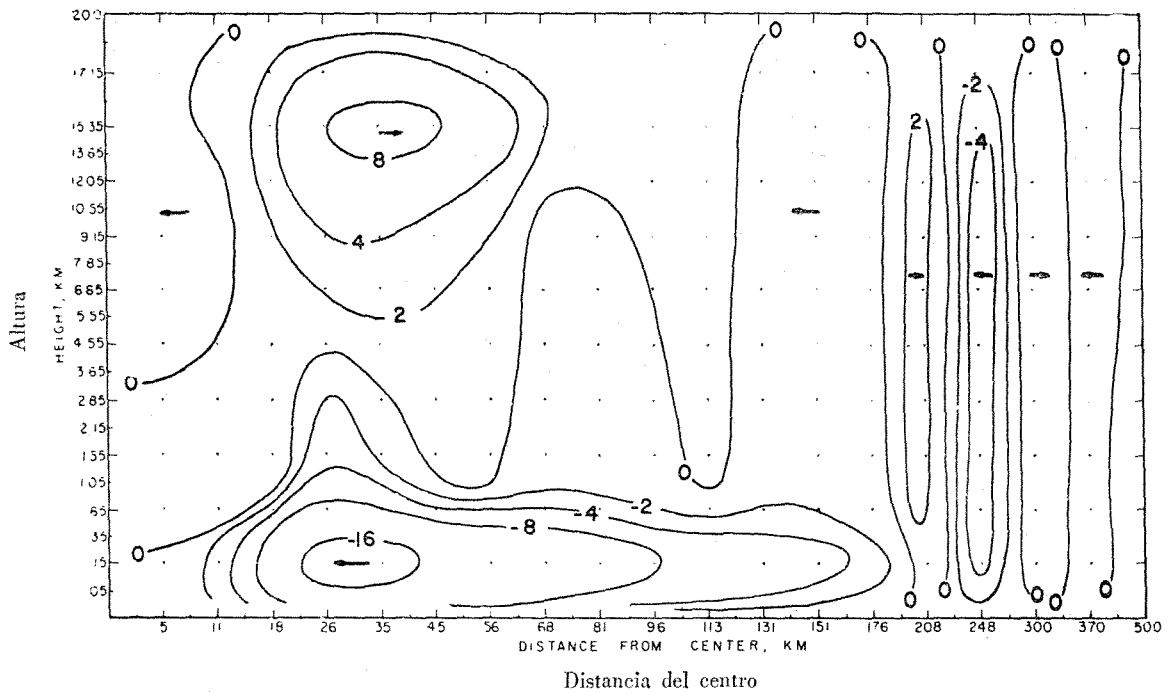


Fig. 15. Componentes de velocidad radial pronosticadas (m seg⁻¹) tres cuartos de hora después del tiempo inicial para el modelo de ecuación primitiva.

Fig. 15. The predicted radial velocity components (m sec⁻¹) three fourths hour after initial time for the primitive equation model.

localiza en altos niveles según el modelo de ecuación primitiva, en tanto que irrealísticamente la circulación saliente para el otro modelo está mucho más abajo y a mayor distancia del centro. También se notará que el modelo de ecuación primitiva dio una circulación más vigorosa.

Hasta ahora no se han mencionado perturbaciones onduladas que se registran en los resultados del modelo de ecuación primitiva pero que faltan en los resultados del otro modelo. La mayoría de tales perturbaciones parecen originarse en la región de vorticidad absoluta negativa ($r = 176 \text{ Km}$). De hecho hemos demostrado probablemente con ello un ejemplo de inestabilidad dinámica. Es posible ver el origen de una perturbación en la región de vorticidad absoluta negativa a unos 30 minutos después del tiempo inicial (Fig. 16). Puede apreciarse que la perturbación se propagó radialmente tanto al interior como al exterior. La perturbación que se movía al interior viajaba con un promedio de casi 0.15

flow for the other model is unrealistically much lower and at a greater distance from the center. It will be noted also that the primitive equation model gave a more vigorous circulation.

So far, no mention has been made of the wave-like perturbations which are present in the results of the primitive equation model but which are absent in those of the other. Most of these perturbations appear to have originated at the region of negative absolute vorticity ($r = 176 \text{ Km}$). In fact, we have probably demonstrated here an example of dynamic instability. It is possible to see a disturbance originate at the region of negative absolute vorticity about 30 minutes after initial time (Fig. 16). It may be seen that the disturbance propagated radially, both inward and outward. The inward moving disturbance traveled with an average speed of about 0.15 Km sec^{-1} . Upon

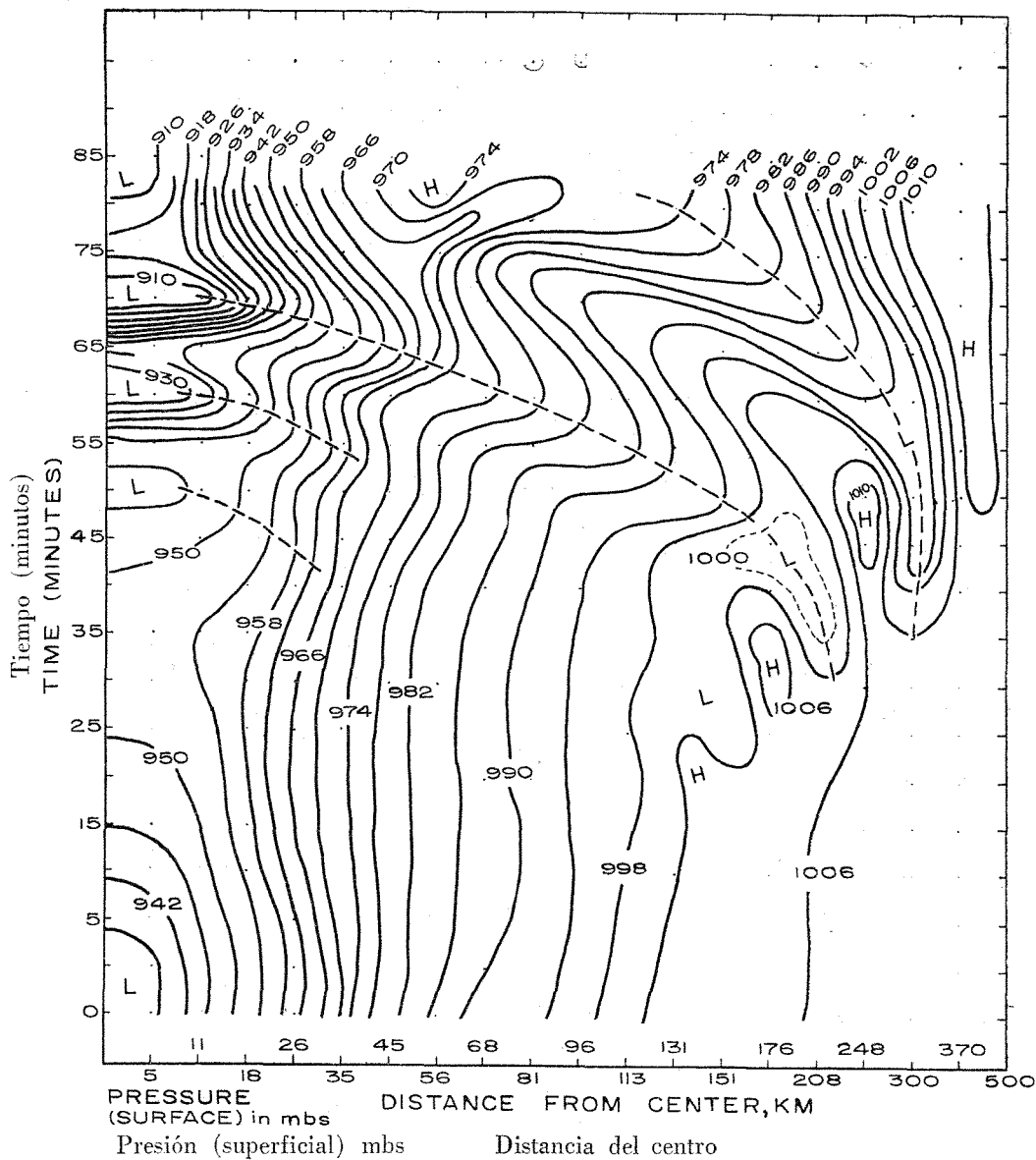


Fig. 16. Sección de tiempo horizontal de la distribución de presión de superficie (mb) pronosticada para el modelo de ecuación primitiva.

Fig. 16. A horizontal time cross-section of the predicted surface pressure (mb) distribution for the primitive equation model.

Km seg^{-1} y cuando alcanzaba el centro daba origen a una rápida intensificación del vórtice .

reaching the center, it caused a rapid intensification of the vortex.

NOTAS EN CONCLUSION

Las integraciones que se han descrito obviamente no se han extremado en tiempo para alcanzar una distribución de estado casi-estacionario correspondiente al ciclón tropical maduro, lo cual es particularmente cierto para el modelo de ecuación primitiva. Sin embargo, hemos logrado alguna información sobre las circulaciones verticales y sus variaciones. Los principales rasgos han sido más o menos reproducidos por los dos modelos, aunque hay diferencias entre sus resultados que pueden atribuirse a diferencias en las suposiciones del modelo o insuficiente lapso de tiempo de integración. Entre ambos, el modelo casi-gradiente parece más adecuado como instrumento práctico para estudiar la dinámica de un huracán no-intensificado, incluyendo las transformaciones de energía. En el uso de tal modelo (y también del otro) hay una dificultad para incorporar satisfactoriamente el efecto de las transferencias de turbulencia debidas a convección de cumulus y otros remolinos sobre la capa de frontera atmosférica. La otra dificultad es matemática —la solución de la ecuación diferencial parcial relativa a las circulaciones verticales con distribuciones u y θ que ordinariamente son elípticas y que por consiguiente carecen de dificultades. Sin embargo, en algunos casos, la ecuación es hiperbólica en ciertas regiones.

La integración del modelo de ecuación primitiva nos dio la secuencia de eventos que llevan a la formación del ojo y su pared comenzando con una circulación gradiente por procesos friccionales. La formación se describió en la sección precedente y probablemente no es única, aunque representa la función de condiciones iniciales. No obstante, confirma la idea común de que tanto los procesos de mezcla vertical como lateral son factores esenciales para la formación del ojo. Otro resultado interesante de las integraciones del modelo de ecuación primitiva es la demostración de existencia de inestabilidad dinámica como resultado de la presencia de una región de vorticidad absoluta negativa. Este tipo de inestabilidad puede ser un factor importante en la intensificación de los ya intensos ciclones tropicales.

APENDICE

Las ecuaciones del modelo casi-gradiente pueden derivarse por análisis escalar. Comenzaremos con las llamadas ecuaciones anelásticas de Ogura y Phillips (1962) que pueden escribirse para el vórtice axialmente simétrico como sigue:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + v \frac{\partial \mu}{\partial r} + w \frac{\partial \mu}{\partial z} + v \left(\frac{\mu}{r} + f \right) = F \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \mu \left(\frac{\mu}{r} + f \right) = - (H) \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} + G$$

CONCLUDING REMARKS

The integrations just described have obviously not been carried out far enough in time to reach a quasi-steady state distribution corresponding to the mature tropical cyclone. This is particularly true for the primitive equation model. Nevertheless, we have gained some information about the vertical circulations and their variations. The main features have been reproduced approximately by the two models. There are differences between the results of the two which may be attributed to either differences in the model assumptions or insufficient length of time of integration. Between them, the quasi-gradient model appears to be more suitable as a practical tool for studying the dynamics, including energy transformations, of a non-intensifying hurricane. One difficulty in the use of the model (also of the other) is incorporating satisfactorily the effect of turbulent transfers due to cumulus convection and other eddies above the atmospheric boundary layer. The other difficulty is a mathematical one —the solution of the partial differential equation relating the vertical circulations with the u and θ distributions. Ordinarily this is elliptic and, therefore, presents no difficulty. However, in some instances, the equation is hyperbolic in some regions.

The integration of the primitive equation model gave us the sequence of events which lead to the formation of the eye and eyewall starting from gradient flow by frictional processes. The formation as described in the previous section is probably not unique but is a function of the initial conditions. Nevertheless, it confirms the common idea that both lateral and vertical mixing processes are essential factors for eye formation. Another interesting result of the primitive equation model integrations is the demonstration of the occurrence of dynamic instability due to the presence of a region of negative absolute vorticity. This type of instability may be an important factor in the intensification of already intense tropical cyclones.

APPENDIX

The quasi-gradient model equations may be derived by a scale analysis. We start with the so-called anelastic equations of Ogura and Phillips (1962) which may be written for the axially symmetric vortex as follows:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - (H) \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} + \frac{g\theta}{(H)} - 2g \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho_s r v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s r w) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial r} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = Q \quad (12)$$

donde F y Q son términos de calentamiento friccional y no-adiabático, (H) es un valor medio constante de la verdadera temperatura potencial. Las ecuaciones anelásticas son derivadas de las ecuaciones meteorológicas básicas, siendo la principal suposición doble, que θ es casi una constante y que la escala de tiempo se determina por la frecuencia de Brunt-Väisälä. El modelo anelástico elimina las ondas acústicas.

Definamos ahora los siguientes parámetros no-dimensionales:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{\mu}{v}, & \hat{v} &= \frac{v}{v}, & \hat{w} &= \frac{w}{v}, & \hat{\theta} &= \frac{\theta}{(H)} \\ \hat{t} &= \frac{ct}{L}, & \hat{r} &= \frac{r}{L}, & \hat{z} &= \frac{z}{L} \end{aligned}$$

donde V es una componente de velocidad de una partícula característica en la dirección radial, C la correspondiente velocidad de fase y L una dimensión característica. Substituyendo estos parámetros no-dimensionales en las precedentes ecuaciones, se obtiene:

where F and Q are frictional and nonadiabatic heating terms; (H) is a constant mean value of the actual potential temperature. The anelastic equations are derived from the basic meteorological equations. The two main assumptions are that θ is almost a constant and that the time scale is set by the Brunt-Väisälä frequency. The anelastic model filters out acoustic waves.

We now define the following non-dimensional parameters:

where V is a characteristic particle velocity component along the radial direction, C the corresponding phase velocity, and L a characteristic dimension. Substituting these non-dimensional parameters in the preceding equations, one obtains

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \hat{t}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \hat{z}} + \hat{v} \left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{r}} + f \frac{L}{v} \right) = \hat{F} \quad (8')$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} - \hat{\mu} \left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{r}} + f \frac{L}{v} \right) = - \frac{(H)}{v^2} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \hat{r}} + \hat{G} \quad (9')$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = - \frac{(H)}{v^2} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \hat{z}} + \frac{Lg}{v^2} (\hat{\theta} - \vartheta) \quad (10')$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\rho_s \hat{r} \hat{v}) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} (\rho_s \hat{r} \hat{w}) = 0$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{z}} = \hat{Q} \quad (12)$$

donde: where:

$$\hat{F} = \frac{FL}{v^2}, \quad \hat{G} = \frac{GL}{v^2}, \quad \hat{Q} = \frac{QL}{(H)}$$

Introduciremos la aproximación básica en que ε es una

We will introduce the basic approximation that ε is a

pequeña cantidad que aumenta todas las variables dependientes como series de potencia en ϵ casi en la circulación de gradientes. Así

small quantity and expand all dependent variables as power series in ϵ about gradient flow. Thus

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \hat{\mu}_0 + \epsilon \hat{\mu}_1 + \epsilon^2 \hat{\mu}_2 + \dots \\ \hat{v} &= 0 + \epsilon \hat{v}_1 + \epsilon^2 \hat{v}_2 + \dots \\ \hat{w} &= 0 + \epsilon \hat{w}_1 + \epsilon^2 \hat{w}_2 + \dots \\ \Phi^* &= \Phi_0^* + \epsilon \Phi_1^* + \epsilon^2 \Phi_2^* + \dots \\ \hat{\theta} &= \hat{\theta}_0 + \epsilon \hat{\theta}_1 + \epsilon^2 \hat{\theta}_2 + \dots \\ \hat{F} &= 0 + \epsilon \hat{F}_1 + \epsilon^2 \hat{F}_2 + \dots \\ \hat{G} &= 0 + \epsilon \hat{G}_1 + \epsilon^2 \hat{G}_2 + \dots \\ \hat{Q} &= 0 + \epsilon \hat{Q}_1 + \epsilon^2 \hat{Q}_2 + \dots \end{aligned}$$

Substituyendo en las Ecs. (8') a (12') e igualando términos de primer orden en la ϵ de la Ec. (8'), queda

Substituting these in Eq. (8)' to (12)' and equating first order terms in ϵ in Eq. (8)' one gets

$$\frac{\partial \hat{\mu}_0}{\partial t} + \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{\mu}_0}{\partial r} + \hat{w}_1 \frac{\partial \hat{\mu}_0}{\partial z} + \hat{v}_1 \left(\frac{\hat{\mu}_0}{r} + \frac{LF}{v} \right) = \hat{F}_1$$

Los términos de orden cero de la Ec. (9') dan

The zero order terms from Eq. (9)' give

$$\hat{\mu}_0 \left(\frac{\hat{\mu}_0}{r} + f \frac{L}{v} \right) = - \frac{(H)}{v^2} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r}$$

mientras que en la Ec. (10') dan

while those from Eq. (10)' give

$$(H) \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} + gL (\partial - \hat{\theta}_0) = 0$$

y en la Ec. (11') dan

and those from Eq. (11)' give

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho_s \hat{r} \hat{v}_1) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s \hat{r} \hat{w}_1) = 0$$

Los términos de primer orden de la Ec. (12') dan

The first order terms from Eq. (12)' give

$$\frac{\partial \hat{\theta}_0}{\partial t} + \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{\theta}_0}{\partial r} + \hat{w}_1 \frac{\partial \hat{\theta}_0}{\partial z} = Q_1$$

Estas ecuaciones pueden escribirse otra vez en sus formas no-dimensionales como

These equations can be rewritten in their nondimensional forms as

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + v \frac{\partial \mu}{\partial r} + w \frac{\partial \mu}{\partial z} + v \left(\frac{\mu}{r} + f \right) = F \tag{13}$$

$$\mu \left(\frac{\mu}{r} + f \right) = (H) \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \quad (14)$$

$$(H) \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} + g \left(\partial - \frac{\theta}{(H)} \right) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \rho_s v) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho_s w) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial r} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = Q \quad (17)$$

donde u, v, w, θ y Φ^* son ahora las primeras aproximaciones no-cero. Si una de las suposiciones anelásticas ($\frac{\theta - H}{H} \ll 1$) se introduce en la Ec. (15), se obtiene

where u, v, w, θ , and Φ^* are now the first nonzero approximations. If one of the anelastic assumptions ($\frac{\theta - H}{H} \ll 1$) is introduced in Eq. (15), one obtains

$$\theta \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} = -g$$

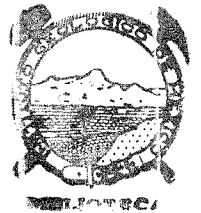
Esta ecuación unida a las Ecs. (13), (14), (16) y (17) forma un conjunto idéntico a las ecuaciones del modelo casi-gradiente (1) a (5) con tal que

This equation together with Eqs. (13), (14), (16), and (17) forms a set which is identical with the quasi-gradient model equations, (1) to (5), provided that

$$F = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[K_H \left(\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \right) \right]$$

$$\theta_s = (H)$$

$$Q = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + K_H \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \Gamma^* w$$



La correspondiente integral de energía para el modelo es

The corresponding energy integral for the model is

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho_s \left(\frac{\mu^2}{2} - \frac{g z \theta}{(H)} \right) dv = \int \rho_s \left(\mu F - \frac{g z Q}{(H)} \right) dv$$

Formas alternas para las Ecs. (13) y (17) pueden obtenerse combinándolas con (14) y (15). Ellas son

Alternative forms for Eqs. (13) and (17) may be obtained by combining them with (14) and (15). These are

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right) + v \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial r^2} \right) + \frac{v}{(H)} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial r} + f \right) \left(\frac{\mu}{r} + f \right) + \frac{\mu^2}{r^2} \right] \\ + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial r} + f \right) \frac{F}{(H)} \end{aligned} \quad (13')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \right) + v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \right) = \frac{gQ}{(H)^2}$$

Finalmente, la Ec. (13) puede convertirse en la ecuación de vorticidad

Finally Eq. (13) may be converted into the vorticity equation

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} (\zeta + f) + w \frac{\partial}{\partial z} (\zeta + f) = \frac{\zeta + f}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s w) - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

donde $\zeta = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}$

where $\zeta = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}$

Esta ecuación, junto con la Ec. (14)', forma un grupo que es básicamente similar al grupo correspondiente en el modelo no-geostrófico, siendo posible calcular ζ en términos de Φ^* con la Ec. (14).

El precedente análisis indica que las ecuaciones casi-gradientes son válidas para condiciones cercanas a circulación gradiente si la velocidad de la onda es pequeña en comparación con la velocidad advectiva. Puede comprobarse por análisis de perturbación que las soluciones que corresponden a ondas de gravedad están suprimidas.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a Francis Ho y Leo Mapanao su programación y análisis de los cálculos y al Centro Occidental de Procesamiento de Datos el uso de su equipo de cálculo.

La investigación fue apoyada por la National Science Foundation (Subsidio Núm. G14770).

This equation, together with Eq. (14)' forms a set which is basically similar to the corresponding set in the non-geostrophic model. It is possible to compute ζ in terms of Φ^* through Eq. (14).

The preceding analysis indicate that the quasi-gradient equations are valid for conditions near gradient flow provided that the wave speed is small compared to the advective speed. It may be shown by a perturbation analysis that solutions corresponding to gravity waves are suppressed.

ACKNOWLEDGEMENT

The author wishes to thank Francis Ho and Leo Mapanao for programming and analysis of the computations and the Western Data Processing Center for use of their computing facilities.

The research was supported by the National Science Foundation (Grant No. G14770).

BIBLIOGRAFIA

- ELIASSEN, A. 1952. Slow thermally or frictionally controlled Meridional Circulations in a Circular Vortex. *Astrophysica Norvegica*, 5(2):
- ESTOQUE, M. A. 1962a. The Sea Breeze as a Function of the Prevailing Synoptic Situation. *Jour. Atmos. Sci.*, 19:244-250.
- 1962b. Vertical and Radial Motions in a Tropical Cyclone. *Tellus*, 14:394-402.
- 1963. A Numerical Model of the Atmospheric Boundary Layer. *Jour. Geophys. Res.*, 68:1103-1113.
- HUGHES, L. A., 1952. On the Low-Level Wind Structure of Tropical Storms. *Jour. Meteorology*, 9:422-428.
- KRISHNAMURTI, T. N. 1961. On the Vertical Velocity Field in a Steady Symmetric Hurricane. *Tellus*, 13:171-180.
- MILLER, B. I. 1958. The Three-Dimensional Wind Structure around a Tropical Cyclone. National Hurricane Research Project. Report No. 15, U. S. Weather Bureau, 41 pp.
- OGURA, Y. & N. A. PHILLIPS. 1962. Scale Analysis of Deep and Shallow Convection in the Atmosphere. *Jour. Atmos. Sci.*, 19:173-179.
- PALMÉN, E. 1956. A Review of Knowledge on the Formation and Development of Tropical Cyclones. *Proceedings of the Tropical Cyclone Symposium, Brisbane, December, 1956*. Bureau of Meteor., Australia, pp. 213-281.
- RICHTMYER, R. D. 1957. *Difference Methods for Initial Value Problems*. New York (Interscience), 283 pp.
- RIEHL, H. 1954. *Tropical Meteorology*. New York (McGraw-Hill Book Co.), 392 pp.

BIBLIOGRAPHY