

GEOFISICA INTERNACIONAL

REVISTA DE LA UNIÓN GEOFÍSICA MEXICANA, AUSPICIADA POR EL INSTITUTO DE GEOFÍSICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Director: Julián Adem

Subdirector: Manuel Maldonado-Koerdell

Vol. 1

México, D. F., 1º de Abril de 1961

Núm. 2

ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN EL INTERIOR DE UN PLANETA NO EVOLUTIVO *

C. LOMNITZ **

RESUMEN

Se analiza el caso de un planeta hipotético con estructura inicial y distribución de densidad similar a la Tierra actual. Suponiendo los valores de Bullen y Gutenberg para las densidades y velocidades del interior, "se aplica" la fuerza de gravedad. Utilizando las deducciones de Lamé y Love se calculan los valores de los esfuerzos y las deformaciones radiales y tangenciales. Las deformaciones radiales son contracciones en el interior y extensiones en la cubierta externa de 800 Kms de espesor y el esfuerzo de desviación del orden de 170,000 atmósferas cerca de la superficie y de 600,000 atmósferas cerca del límite del núcleo. Suponiendo un núcleo líquido, la presión en el centro del planeta sería de 14 millones de atmósferas. Se discute la influencia del supuesto método de formación de la Tierra, según la distribución de esfuerzos y deformaciones.

INTRODUCCION

Uno de los más viejos problemas en Geofísica es determinar la distribución de esfuerzos y deformaciones dentro de la Tierra. Ese problema está colmado de incertidumbres resultantes de la diversidad de soluciones derivadas de los datos superficiales y en general, de la falta de datos. Jeffreys (1959) declaró que el mejor método para estimar la distribución interior de esfuerzos consistiría en asumir un método dado de formación de la Tierra y sacar las conse-

* Contribución Núm. 13, Instituto de Geofísica y Sismología, Universidad de Chile.

** Director, Instituto de Geofísica y Sismología, Universidad de Chile, Santiago, Chile.

STRESSES AND STRAINS IN THE INTERIOR OF A NON-EVOLUTIVE PLANET *

C. LOMNITZ **

ABSTRACT

The case of a hypothetical planet with an initial structure and density distribution similar to the present earth, is analyzed. Bullen's and Gutenberg's values for the densities and velocities in the interior are assumed, then gravity force is "turned on". Values for the radial and tangential stresses and strains are calculated following derivations by Lamé and Love. The radial strains are contractional in the interior and extensional in an outer shell of 800 km thickness. The deviatoric stress is of the order of 170,000 atmospheres near the surface and 600,000 atmospheres near the core boundary. The pressure at the center of the planet, assuming a liquid core, would be about 14 million atmospheres. The influence of the assumed method of formation of the earth on the stress-strain distribution is discussed.

INTRODUCTION

One of the oldest problems in geophysics deals with the determination of the stress and strain distribution inside the earth. The problem is beset by uncertainties due to the non-uniqueness of solutions derived from surface data, and the lack of data in general. Jeffreys (1959) has stated that the best method of estimating the interior stress distribution would consist in assuming a given method of formation of the earth and working out its consequences. At present, it is

* Contribution No. 13, Institute of Geophysics and Seismology, University of Chile.

** Director, Institute of Geophysics and Seismology, University of Chile, Santiago, Chile.

cuencias. Al presente, se ha reconocido que el verdadero problema es precisamente definir el método o proceso que formó la Tierra. Sea por acreción de partículas frías de polvo o por condensación de una nube cálida y sea que el calor generado por el proceso de acreción haya sido o no importante en la determinación de la temperatura inicial de la Tierra, las etapas primeras de su historia afectan nuestro pensamiento de manera vital.

Para contribuir adicionales elementos de juicio a un problema que sufre de muchas indeterminaciones, puede ser útil idear experimentos teóricos capaces de definir los límites de la solución. En el presente trabajo consideraremos el caso hipotético de un planeta similar a la Tierra que no ha evolucionado.

CALCULO

Supóngase un planeta esférico con el mismo tamaño, estructura, densidad y distribución de rigidez de la Tierra e imagínese que el planeta fue creado instantáneamente o si se prefiere, en ausencia de campos gravitacional y otros.

Ahora póngase la gravitación. Los principios de la siguiente derivación, aplicados al caso de una esfera homogénea fueron dados por Lamé (1852) y Love (1927). La ecuación diferencial de equilibrio en coordenadas polares, asumiéndose simetría radial cerca del centro del planeta es:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} \left(\frac{dU}{dr} + 2 \frac{U}{r} \right) + \rho B = 0 \quad (1)$$

en que U es el desplazamiento, ρ la densidad en el radio r , y B la fuerza del cuerpo. Se dan signos positivos a todos los vectores dirigidos en el sentido del incremento de r o alejándose del centro de la esfera.

La fuerza gravitacional del cuerpo se escribe:

$$B = - \gamma m/r^2 \quad (2)$$

en que $\gamma = 6.673 \times 10^{-8}$ cgs es la constante gravitacional de Newton y m la masa contenida dentro de una esfera de radio r . El valor de esta masa puede escribirse:

$$m = 4\pi \int \rho r^2 dr \quad (3)$$

Introduciendo estos valores en la ecuación diferencial y calculando $(\lambda + 2\mu)/\rho = V_p^2$ obtenemos:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{dU}{dr} + \frac{2U}{r} \right) = \frac{4\pi\gamma}{r^2 V_p^2} \int \rho r^2 dr \quad (4)$$

Integrando se obtiene la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dU}{dr} + \frac{2U}{r} = 4\pi\gamma [F(r) + C_1] \quad (5)$$

coming to be recognized that the true problem is precisely how to define the method or process by which the earth was formed. Whether by accretion of cold dust particles or by condensation of a hot cloud, and whether the heat supplied by the accretion process was important or not in determining the earth's initial temperature, the earliest stage in the earth's history is found to affect our thinking in a vital way.

In order to contribute additional elements of judgement to a problem suffering from too many indeterminations, it may be useful to design thought experiments capable of defining the boundaries of the solution. In the present case we shall consider the hypothetical case of a planet similar to the earth but without an evolution.

DERIVATION

Assume a spherical planet having the same size, structure, density and rigidity distribution of the earth. Let us imagine that the planet was created instantly or, if preferred, in the absence of gravitational or other fields.

Let now gravitation be turned on. The principles of the following derivation, applied to the case of a homogeneous sphere, were given by Lamé (1852) and Love (1927). The differential equation of equilibrium in polar coordinates, assuming radial symmetry about the center of the planet, is:

in which U is the displacement, ρ the density at radius r , and B the body force. The positive sign is assigned to all vectors directed in the sense of increasing r , or away from the center of the sphere.

The gravitational body force is written:

in which $\gamma = 6.673 \times 10^{-8}$ cgs is Newton's gravitational constant, and m is the mass contained within a sphere of radius r . The value of this mass may be written:

Introducing these values into the differential equation and setting $(\lambda + 2\mu)/\rho = V_p^2$ we obtain:

Integration yields the linear differential equation:

donde

where

$$F(r) = \int \frac{\int \rho r^2 dr}{r^2 V_p^2} dr \tag{6}$$

La solución de esta ecuación se escribe:

The solution of this equation is written:

$$U = \frac{4\pi\gamma}{r^2} \left[\int F(r)r^2 dr + \frac{r^3}{3} C_1 + C_2 \right] \tag{7}$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se determinan por medio de dos condiciones de límites. Si se dan las velocidades y densidades en el interior, la selección de condiciones de límites se reduce a un desplazamiento cero en el centro y a una deformación radial cero en la superficie. La condición de una interfase sólido-líquido en el límite del núcleo ya está implícita en la velocidad y distribución de densidades dada.

Integration constants C_1 and C_2 are determined by means of two boundary conditions. If the velocities and densities in the interior are given, the choice of boundary conditions is reduced to a zero displacement at the center, and zero radial stress at the surface. The condition of a solid-liquid interface at the core boundary is already implicit in the given velocity and density distribution.

La primera condición de límite da:

The first boundary condition yields:

$$C_2 = 0 \tag{8}$$

La segunda se obtiene considerando el esfuerzo radial (Love, 1927):

The second is obtained by considering the radial stress (Love, 1927):

$$\widehat{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{dU}{dr} + 2\lambda \frac{U}{r} \tag{9}$$

Sustituyendo los valores de U y $\frac{dU}{dr}$ obtenidos de la ecuación (7), con $r=R$ e igualando a cero obtenemos:

Substituting the values of U and $\frac{dU}{dr}$ obtained from eq. (7), setting $r = R$ and equating to zero we obtain:

$$C_1 = \frac{6(1-2\sigma)}{1+\sigma} \phi(R) - 3 \frac{1-\sigma}{1+\sigma} F(R) \tag{10}$$

en que σ es el cociente de Poisson en la superficie, y:

in which σ is Poisson's ratio at the surface, and:

$$\phi(r) = \frac{1}{r^3} \int r^2 F(r) dr \tag{11}$$

Finalmente, sustituyendo los valores de las constantes de integración en la ecuación (7), encontramos:

Finally substituting the values of the constants of integration into eq. (7) one finds:

$$U = 4\pi\gamma \left[\phi(r) + \frac{2(1-2\sigma)}{1+\sigma} \phi(R) - \frac{1-\sigma}{1+\sigma} F(R) \right] \tag{12}$$

La deformación radial se obtiene por diferenciación de (12):

The radial strain is obtained by differentiation of (12):

$$\epsilon_r = \frac{dU}{dr} = 4\pi\gamma \left[F(r) - 2\phi(r) + \frac{2(1-2\sigma)}{1+\sigma} \phi(R) - \frac{1-\sigma}{1+\sigma} F(R) \right] \tag{13}$$

Si ρ y V son funciones definidas positivas del radio, la deformación radial cambiará de signo con cierto valor r_c dado por:

$$F(r_c) - 2\phi(r_c) = \frac{1-\sigma}{1+\sigma} F(R) - \frac{2(1-2\sigma)}{1+\sigma} \phi(R) \quad (14)$$

La deformación tangencial es dada por:

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r} = 4\pi\gamma \left[\phi(r) + \frac{2(1-\sigma)}{1+\sigma} \phi(R) - \frac{1-\sigma}{1+\sigma} F(R) \right] \quad (15)$$

que siempre es negativa (contracción).

La expresión para el esfuerzo radial ya se ha dado (ecuación 9):

$$\widehat{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{dU}{dr} + 2\lambda \frac{U}{r} \quad (9')$$

Si $V_p = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ y $V_s = (\mu/\rho)^{1/2}$ son las velocidades de ondas longitudinales y transversales podemos escribir esa expresión como sigue:

$$\widehat{rr} = \rho V_p^2 [\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta] - 4\rho V_s^2 \varepsilon_\theta \quad (16)$$

en que ε_r y ε_θ son las deformaciones radiales y tangenciales derivadas de las ecuaciones (13) y (15).

Similarmente, los esfuerzos tangenciales:

$$\widehat{\theta\theta} = \lambda \frac{dU}{dr} + 2(\lambda + \mu) \frac{U}{r} \quad (17)$$

pueden escribirse:

$$\widehat{\theta\theta} = \rho V_p^2 [\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta] - 2\rho V_s^2 [\varepsilon_r + \varepsilon_\theta] \quad (18)$$

La Fig. 1 muestra la densidad y distribución de velocidad supuestas, según valores publicados por Bullen (1959) y Gutenberg (1959). Las correspondientes distribuciones de deformaciones se obtienen por integración gráfica de (13) y (15) y el resultado se muestra en la Fig. 2.

Las deformaciones radiales son contracciones en el interior del planeta y extensiones en la cubierta externa. El nivel cero de deformaciones se encuentra a unos 800 Km de profundidad, pero no está asociado con discontinuidad de esfuerzos.

La distribución de esfuerzos se obtiene sustituyendo la expresión de la deformación en (16) y (18), mostrándose los resultados en la Fig. 3. Todos los esfuerzos son com-

If ρ and V are positive definite functions of the radius the radial strain will change signs at a certain value r_c given by:

The tangential strain is given by:

which is always negative (contractional).

The expression for the radial stresses has already been given (eq. 9):

If $V_p = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ and $V_s = (\mu/\rho)^{1/2}$ are the velocities of longitudinal and transversal waves we may write this expression as follows:

in which ε_r and ε_θ are the radial and tangential strains as derived in eqs. (13) and (15).

Similarly, the tangential stresses:

may be written:

Fig. 1 shows the assumed density and velocity distribution, taken from published values by Bullen (1959) and Gutenberg (1959). The corresponding strain distributions are obtained by graphical integration of (13) and (15), and the result is shown in Fig. 2.

The radial strains are contractional in the interior of the planet and extensional in the outer shell. The level of zero strain is found at about 800 Km depth, but it is not associated with any stress discontinuity.

The stress distribution is obtained by substituting the strain expression into (16) and (18). The result is shown in Fig. 3. All stresses are compressive, and they increase

presivos y crecen uniformemente hacia el centro. En el límite del núcleo las dos curvas de esfuerzos se unen en una sola para satisfacer la condición hidrostática del núcleo.

evenly towards the center. At the core boundary the two stress curves merge into one to satisfy the hydrostatic condition in the core.

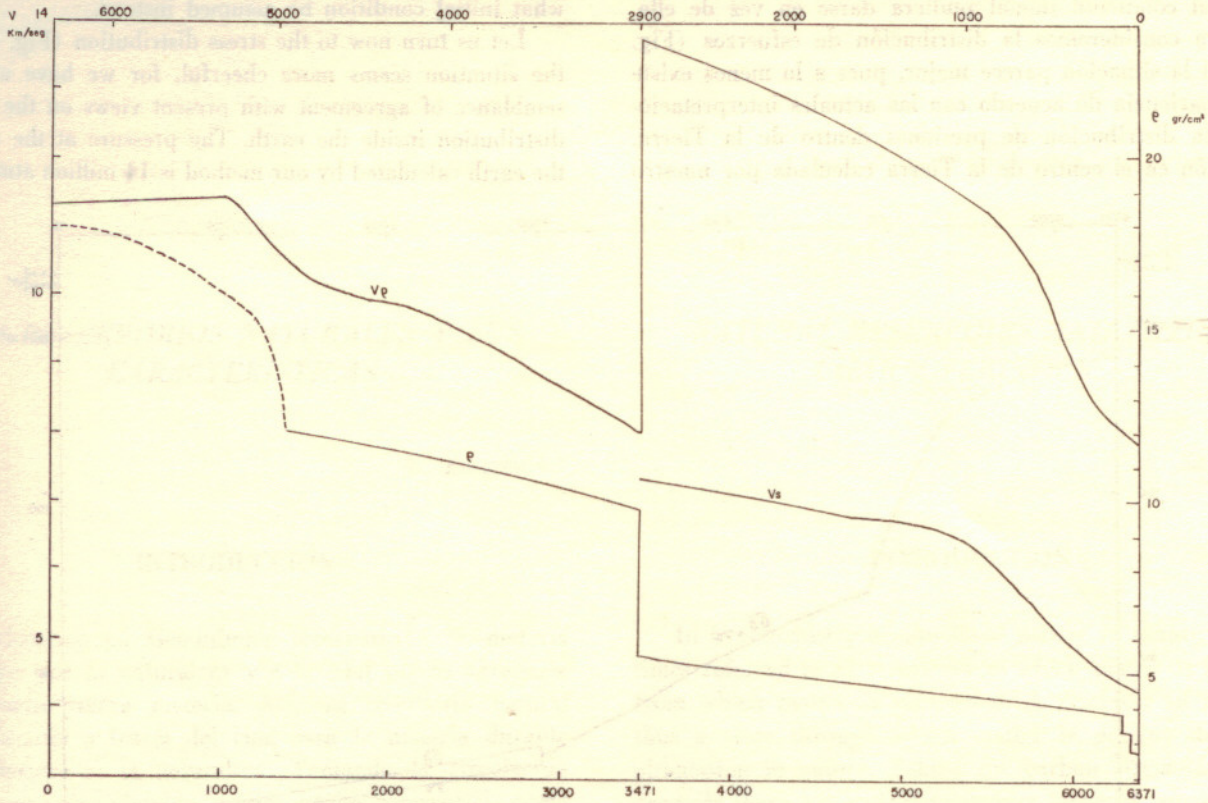


Fig. 1

CONCLUSIONES

Primeramente consideremos la distribución de deformaciones en la Fig. 2. La discontinuidad de la deformación radial a 800 Km de profundidad es obviamente irreal, pues resulta difícil concebir una situación en que la cubierta externa de la Tierra pudiera ser radialmente alargada.

CONCLUSIONS

Firstly, let us consider the strain distribution in Fig. 2. The radial strain discontinuity at 800 Km depth is obviously unreal, as it is difficult to conceive of a situation in which the outer shell of the earth could be radially elongated.

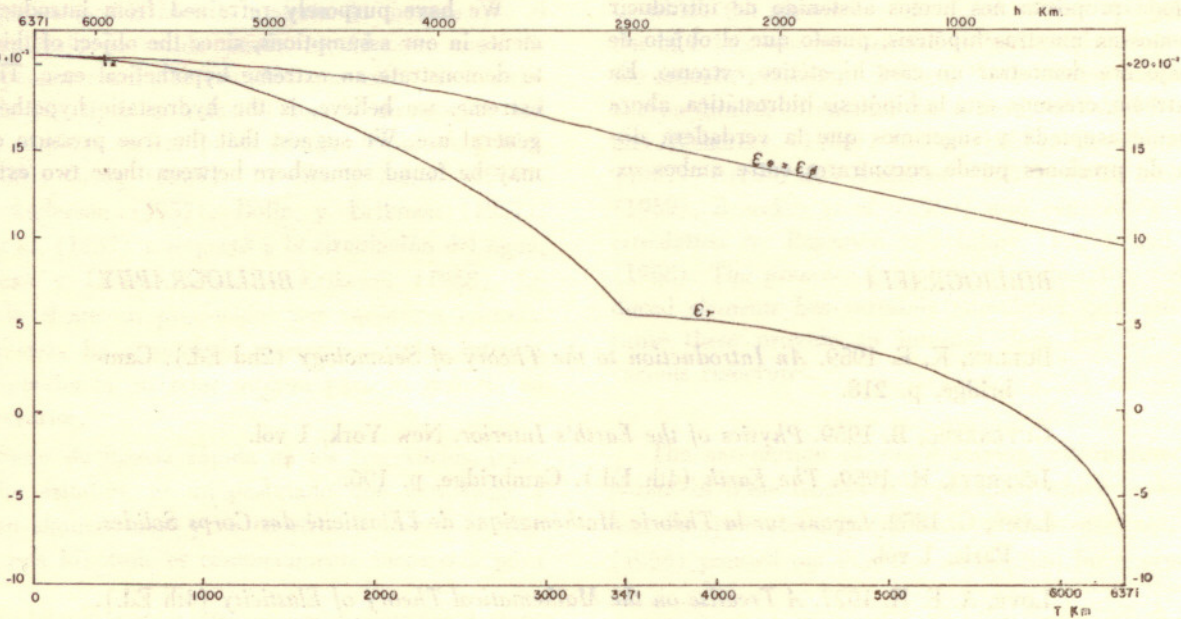


Fig. 2

Podría señalarse que este resultado se obtuvo suponiendo una condición inicial absurda, es decir, con ausencia de fuerzas gravitacionales. Sin embargo, sería bueno preguntarse cuál condición inicial pudiera darse en vez de ella.

Ahora consideremos la distribución de esfuerzos (Fig. 3). Aquí la situación parece mejor, pues a lo menos existe cierta apariencia de acuerdo con las actuales interpretaciones de la distribución de presiones dentro de la Tierra. La presión en el centro de la Tierra calculada por nuestro

It might be pointed out that this result was obtained by assuming an absurd initial condition, namely the absence of gravitational forces. However, the question arises as to what initial condition be assumed instead.

Let us turn now to the stress distribution (Fig. 3). Here the situation seems more cheerful, for we have at least a semblance of agreement with present views on the pressure distribution inside the earth. The pressure at the center of the earth calculated by our method is 14 million atmospheres

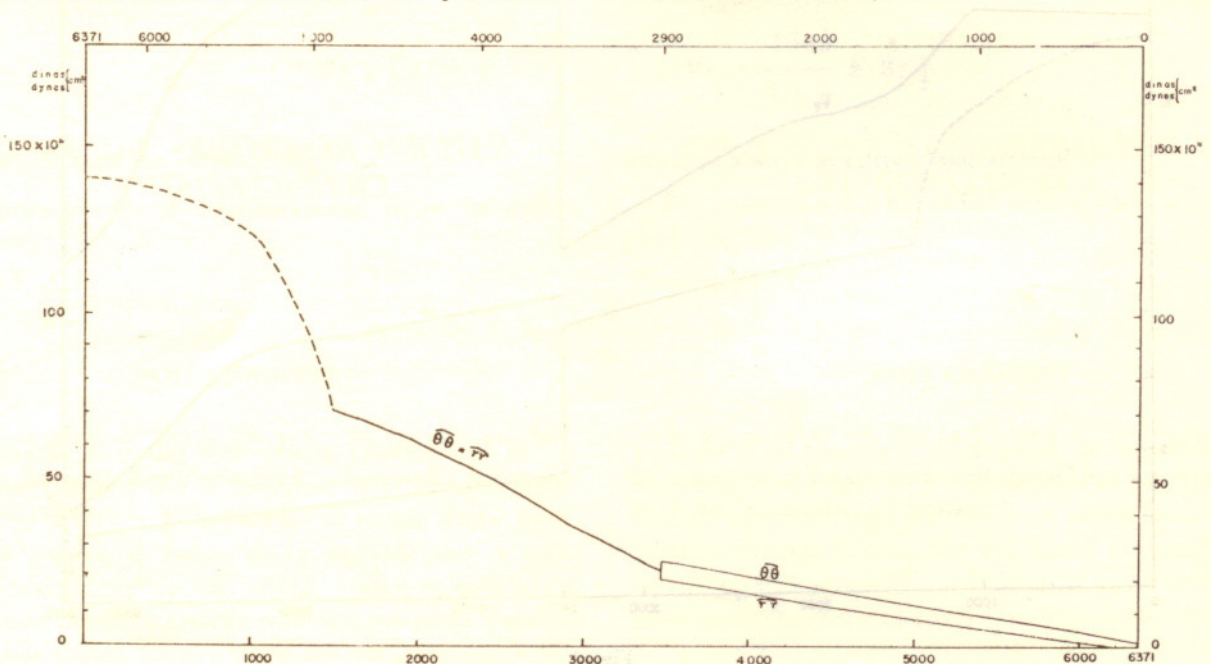


Fig. 3

método es de 14 millones de atmósferas contra 4 millones de atmósferas obtenidas por computación hidrostática. Finalmente, al pasar, nótese que los esfuerzos diferenciales en el manto y la corteza exceden mucho a la resistencia conocida de los materiales rocosos.

Con todo propósito nos hemos abstenido de introducir refinamientos en nuestras hipótesis, puesto que el objeto de este trabajo era demostrar un caso hipotético extremo. En el otro extremo, creemos, está la hipótesis hidrostática, ahora generalmente aceptada y sugerimos que la verdadera distribución de presiones puede encontrarse entre ambos extremos.

as against about 4 million atmospheres obtained by hydrostatic computations. We may note, in passing, that differential stresses in the mantle and crust are far in excess of the known strength of rock materials.

We have purposely refrained from introducing refinements in our assumptions, since the object of this work was to demonstrate an extreme hypothetical case. The opposite extreme, we believe, is the hydrostatic hypothesis now in general use. We suggest that the true pressure distribution may be found somewhere between these two extremes.

BIBLIOGRAFIA

- BULLEN, K. E. 1959. *An Introduction to the Theory of Seismology* (2nd Ed.). Cambridge, p. 218.
- GUTENBERG, B. 1959. *Physics of the Earth's Interior*. New York, 1 vol.
- JEFFREYS, H. 1959. *The Earth* (4th Ed.). Cambridge, p. 196.
- LAMÉ, G. 1852. *Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Elasticité des Corps Solides*. Paris, 1 vol.
- LOVE, A. E. H. 1927. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (4th Ed.). New York, p. 142.

BIBLIOGRAPHY