

# GEOFISICA INTERNACIONAL

REVISTA DE LA UNIÓN GEOFÍSICA MEXICANA, AUSPICIADA POR EL INSTITUTO DE GEOFÍSICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Director: Julián Adem

Subdirector: Manuel Maldonado-Koerdell

Vol. 1

México, D. F., 1o. de Octubre de 1961

Núm. 4

## ACERCA DE LA PROPAGACION DE ONDAS OCEANICAS SOBRE UNA ESFERA

G. W. GROVES \* y J. MELCER \*

### RESUMEN

Las ondas oceánicas son descritas en términos de un espectro direccional de potencia que varía con la posición y el tiempo. Esta función debe satisfacer una ecuación que exprese la conservación de energía de las ondas. En el caso de que no haya generación o disipación de las ondas, la ecuación de energía tiene una solución sencilla, mediante la cual es posible obtener ejemplos que relacionan el espectro de onda en diferentes lugares y tiempos. Se tratan algunos ejemplos de estado estacionario y problemas de valores iniciales y se comparan soluciones en la esfera y en el plano. El método puede ampliarse para operar sobre otros tipos de ondas dispersivas en la superficie de la esfera.

La generación y la disipación se expresan por una función generadora, que da la razón del incremento de energía de las ondas por unidad de área para cada componente espectral. En ciertas formas simples de esta función pueden obtenerse soluciones exactas para ondas limitadas por fetch y duración. También pueden tratarse tipos simples de disipación de ondas. Si se puede postular una función generadora razonable o deducirla teóricamente, este método será útil para predicciones automáticas rápidas de ondas.

### INTRODUCCION

Consideremos el problema de pronosticar ondas sobre una base rutinaria alimentando una computadora electrónica con valores de viento superficial sobre el océano. Una manera posible sería la de considerar las áreas generadoras activas como rectángulos de viento constante. A cada una de las áreas generadoras se les asignarían espectros apropiados de ondas con base en parámetros como fetch, duración y velocidad de viento, utilizando un método como

## ON THE PROPAGATION OF OCEAN WAVES ON A SPHERE

G. W. GROVES \* and J. MELCER \*

### ABSTRACT

Waves on the ocean are described by means of a directional power spectrum which varies with position and time. This function must satisfy an equation expressing conservation of wave energy. If there is no wave generation or dissipation, the energy equation has a simple solution by which it is possible to work out examples relating wave spectra at different places and times. Some examples of steady state and initial value problems are presented. Solutions on a sphere and on a plane are compared. The method can be extended to deal with most types of dispersive waves on the surface of a sphere.

Generation and dissipation are expressed by a generating function which expresses the rate of increase of wave energy per unit area for each spectral component. For certain simple forms of this function exact solutions can be obtained for duration-limited and fetch-limited waves. Simple types of wave dissipation can also be treated. If a reasonable generating function can be postulated or derived theoretically the method should prove useful for rapid automatic wave forecasts.

### INTRODUCTION

Let us consider the problem of making wave forecasts on a routine basis by feeding surface wind values over the ocean into an electronic computer. One possible way would be to have the program approximate the active generating areas by rectangles of constant wind. Appropriate wave spectra would be assigned to each generating area on the basis of parameters such as the fetch, duration and wind speed, using a method such as that of Pierson *et al* (1955).

\* Instituto de Geofísica, U.N.A.M.

\* Institute of Geophysics, U.N.A.M.

el de Pierson *et al.* (1955). Existen muchas situaciones meteorológicas que serían extremadamente difíciles de resolver por este camino, debido al pequeño número de parámetros que determinan el espectro. Un segundo camino sería postular (o determinar experimental o teóricamente) la razón de incremento de la energía espectral para cada frecuencia y dirección debida a la generación del viento. Esta cantidad puede ser llamada la *función generadora*  $G$  y se mediría en unidades  $L^2$ , que dependerían del espectro de onda ya mencionado así como del viento. Para resolver algunos de estos problemas es necesario considerar la propagación de ondas sobre una superficie esférica, a menos que solamente se deseen estudiar ondas en regiones del océano suficientemente pequeñas. Pero, el presente estudio está hecho particularmente con la idea de aplicarlo en la segunda forma. En este caso la determinación de la función  $G$  representa la parte más difícil del trabajo, pero una vez encontrada una forma satisfactoria el problema final de predicción automática de ondas puede ser resuelto.

El concepto de un espectro direccional de ondas que varíe con la posición sobre la superficie del mar y el tiempo, no es nuevo. Pierson *et al.* (1955) hablan del espectro de ondas en cierto lugar y a cierto tiempo. Por lo tanto, consideramos que el espectro de energía puede expresarse como  $E(\omega, \alpha, \theta, \phi, t)$ , donde  $\omega$  es la frecuencia,  $\alpha$  es la dirección hacia la cual se propagan las ondas, medida contra las manecillas del reloj desde el este,  $\theta$  es la colatitud,  $\phi$  es la longitud este y  $t$  es el tiempo.

#### PROPAGACION SOBRE UN OCEANO PLANO

Para este caso tomamos  $E = E(\omega, \alpha, x, y, t)$ , donde  $x$  apunta hacia el este e  $y$  hacia el norte. Calculemos la razón de incremento de  $E$  proveniente de la llegada de trenes de ondas de puntos adyacentes, por ejemplo, la advección de energía espectral. Después de un instante de tiempo  $dt$  la densidad espectral para cada  $\omega$  y  $\alpha$  que estará presente en el punto  $(x, y)$  es precisamente la densidad espectral que se encuentra ahora en el punto  $(x - dr \cos \alpha, y - dr \sin \alpha)$ , donde  $dr$  es la pequeña distancia que cada tren de ondas se ha desplazado en el tiempo  $dt$ , y está dada por

$$\frac{dr}{dt} = V$$

siendo  $V = g/2\omega$  la velocidad de grupo para cada tren de ondas, si se consideran únicamente la aproximación de agua profunda. Para otros problemas diferentes de ondas oceánicas, debe usarse la expresión apropiada para la velocidad de grupo. Aquí,  $g$  es la aceleración de la gravedad. La distancia  $dr$  es diferente para cada frecuencia. Combinando las relaciones anteriores obtenemos

$$E(\omega, \alpha, x, y, t + dt) = E(\omega, \alpha, x - \frac{gdt}{2\omega} \cos \alpha, y - \frac{gdt}{2\omega} \sin \alpha, t) \quad (1)$$

There are many meteorological situations which would be extremely hard to fit properly in this way owing to the small number of parameters determining the spectrum. A second way would be to postulate (or to determine experimentally or theoretically) the rate of increase of spectral energy for each frequency and direction arising from wind generation. This quantity, which may be called the *generating function*  $G$  would be measured in units of  $L^2$  and we should expect it to depend on the spectrum of the waves already present and also on the wind. To solve either of these problems it is necessary to consider wave propagation on a spherical surfaces unless one wishes to study waves only on sufficiently small regions of the ocean. But the present study is made particularly with the idea of applying it to the second approach. In this case, the determination of the function  $G$  represents the most difficult part of the job, but once a satisfactory form is found the ultimate problem of automatic wave prediction can be set up.

The concept of a directional wave spectrum which varies with position on the sea surface and with time is not new. Pierson *et al.* (1955) speak of the wave spectrum at a certain place and time. Thus, we shall assume that the energy spectrum can be expressed as  $E(\omega, \alpha, \theta, \phi, t)$ , where  $\omega$  is frequency,  $\alpha$  is direction toward which the waves are traveling, measured counterclockwise from the east,  $\theta$  is colatitude,  $\phi$  is east longitude and  $t$  is time.

#### PROPAGATION ON A PLANE OCEAN

For this case we take  $E = E(\omega, \alpha, x, y, t)$ ,  $x$  pointing toward east,  $y$  toward north. Let us calculate the rate of increase of  $E$  arising from the arrival of wave trains from adjacent points; i.e., advection of spectral energy. At a slightly later time  $dt$  the spectral density for each  $\omega$  and  $\alpha$  which will be present at the point  $(x, y)$  is precisely that spectral density now at the point  $(x - dr \cos \alpha, y - dr \sin \alpha)$ , where  $dr$  is the small distance travelled by each wave train during the time  $dt$  and is given by

$V = g/2\omega$  being the group velocity of each wave train, considering only the deep-water approximation. For problems other than ocean waves the appropriate expression for group velocity must be used. Here,  $g$  is the acceleration of gravity. The distance  $dr$  is different for each frequency. Combining the above relationships gives

Si la generación (o disipación) está realizándose, el término  $Gdt$  se sumará por la derecha. Por lo que la ecuación

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{g}{2\omega} \left[ \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial E}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha \right] + G \quad (2)$$

se deduce de lo anterior y representa la conservación de la energía espectral.<sup>1</sup>

Si no hay generación o disipación ( $G = 0$ ), la ecuación (2) tiene una solución simple

$$E = F(\omega, \alpha, u, v) \quad (3)$$

donde where

$$u = x - \frac{gt}{2\omega} \cos \alpha$$

$$v = y - \frac{gt}{2\omega} \operatorname{sen} \alpha \quad (4a)$$

(Para el método de encontrar soluciones para ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, del tipo (2) y (7) el lector puede referirse a Webster, 1950). La función  $F$  es arbitraria y puede elegirse de acuerdo con las condiciones dadas. Los argumentos  $u$  y  $v$  no son los únicos que pueden ser usados. Sin embargo, son los más convenientes para el problema de valores iniciales. Cualquiera de dos funciones independientes de  $u$  y  $v$  pueden ser usadas en su lugar. Las combinaciones

$$u_1 = x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha$$

o or

$$u_2 = y - x \tan \alpha \quad (4b)$$

que son independientes de  $t$ , son útiles para problemas de estado estacionario.

### PROPAGACION SOBRE UNA ESFERA

Aquí supondremos que los rayos de ondas son círculos máximos. El efecto acumulado de la fuerza de Coriolis sobre grandes distancias recorridas, tiene que ser todavía ampliamente investigado y puede resultar importante, pero ahora este efecto no se considera. Barber (1958) considera algunos ejemplos de propagación de ondas sobre una esfera bajo estas mismas condiciones.

#### A lo largo de un rayo

<sup>1</sup> Cuando este trabajo se llevaba a cabo, los autores se enteraron que ideas similares se estaban desarrollando por algunos otros investigadores, especialmente por K. Hasselmann (1961), quien independientemente consideró la ecuación de conservación de energía espectral, junto con el concepto de la función generadora.

If generation (or dissipation) is taking place also, the term  $Gdt$  should be added to the right side. Thus, the equation

follows from the above, and represents the conservation of spectral energy.<sup>1</sup>

If there is no generation or dissipation ( $G = 0$ ), equation (2) has an easy solution:

(For the method of finding solutions of first-order partial differential equations of the type (2) or (7) the reader is referred to Webster, 1950). The function  $F$  is arbitrary, and can be chosen to fit the given conditions. The arguments  $u$  and  $v$  are not the only ones that could have been used but they are most convenient for the initial value problem. Any two independent functions of  $u$  and  $v$  can be used in their place. The combinations

being independent of  $t$ , are useful for steady state problems.

### PROPAGATION ON A SPHERE

Here it will be assumed that the wave rays are great circles. The accumulated effect of Coriolis force over long travel distances has yet to be thoroughly investigated and may be important, but here this effect is not considered. Barber (1958) has considered some examples of wave propagation on a sphere under these same conditions.

#### Along a ray

<sup>1</sup> While this work was in progress, the authors learned that similar ideas were being developed by several other investigators, especially by K. Hasselmann (1961), who had independently considered the equation of conservation of spectral energy along with the concept of the generating function.

$$- dr \operatorname{sen} \alpha = a d \theta$$

$$dr \operatorname{cos} \alpha = a \operatorname{sen} \theta d \phi$$

donde  $a$  es el radio terrestre. Hay un aspecto en el problema esférico que no ocurre en el océano plano: la dirección de las ondas cambia continuamente a lo largo del rayo, de acuerdo con

where  $a$  is radius of the Earth. Now, there is a feature in the spherical problem that does not occur on the plane ocean: the wave direction changes continually along the ray according to

$$\frac{d\alpha}{dr} = -\frac{1}{a} \operatorname{cos} \alpha \operatorname{ctn} \theta \quad (5)$$

Por lo que en lugar de (1) escribiremos

Hence, instead of (1) we must write

$$E(\omega, \alpha + d\alpha, \theta + d\theta, \phi + d\phi, t + dt) = E(\omega, \alpha, \theta, \phi, t) + Gdt \quad (6)$$

y consecuentemente      which gives

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{g}{2a\omega} \left( \frac{\partial E}{\partial \alpha} \operatorname{cos} \alpha \operatorname{ctn} \theta + \frac{\partial E}{\partial \theta} \operatorname{sen} \alpha - \frac{\partial E}{\partial \phi} \operatorname{cos} \alpha \operatorname{csc} \theta \right) + G \quad (7)$$

Esta ecuación podría ser usada para una predicción rápida de ondas, utilizando un procedimiento por iteración de tiempo. Un método alternativo que podría resultar más práctico, se sugiere adelante.

This equation could be used for rapid wave prediction, using a time iteration procedure. An alternative method, which may prove more practical, is suggested below.

Si no hay generación o disipación ( $G = 0$ ) la solución general de (7) es

If there is no generation or dissipation ( $G = 0$ ), the general solution of (7) is

$$E = F(\omega, u, v, w) \quad (8)$$

donde      where

$$u = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \theta$$

$$v = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \phi + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \phi$$

$$w = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \left( \frac{gt}{2a\omega} \right) + \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \left( \frac{gt}{2a\omega} \right) \quad (9a)$$

Como antes,  $F$  es arbitraria y cualquiera de tres funciones independientes de  $u, v$  y  $w$ , pueden ser substituidas. En particular las siguientes substituciones de variables

As before  $F$  is arbitrary and any three independent function of  $u, v$ , and  $w$  can be substituted in their place. In particular, the following substitute variables

$$v_1 = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \phi - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \phi$$

$$v_2 = \phi + \operatorname{arc} \tan (\tan \alpha \sec \theta)$$

$$w_1 = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \left( \frac{gt}{2a\omega} \right) - \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \left( \frac{gt}{2a\omega} \right) \quad (9b)$$

$$w_2 = \frac{gt}{2a\omega} - \operatorname{arc} \tan (\operatorname{csc} \alpha \operatorname{ctn} \theta)$$

son útiles para ciertos problemas. Las siguientes fórmulas

are useful in certain problems. The following formulas

$$\begin{aligned}
 u^2 + v^2 + v_1^2 &= 1 \\
 u^2 + w^2 + w_1^2 &= 1 \\
 v^2 &= (1 - u^2) \operatorname{sen}^2 v_2 \\
 w_1^2 &= (1 - u^2) \operatorname{sen}^2 w_2
 \end{aligned}
 \tag{9c}$$

expresan algunas relaciones entre las variables, que pueden ser utilizadas en (8). Consideremos las variables dadas por (9a). Se puede demostrar que  $u$  y  $v$ , y por lo tanto, cualquier función de  $u$  y  $v$  son constantes a lo largo de cualquier rayo. Además,  $w$  es constante sobre un punto que viaja a lo largo de cualquier rayo con velocidad de grupo. Por lo tanto cualquier función de  $u$ ,  $v$  y  $w$ , es constante sobre un punto que viaja a lo largo de un rayo con velocidad de grupo. Se puede notar que  $u$  y  $v$  siendo independientes de  $t$ , son útiles para problemas de estado estacionario. Similarmente  $u$  y  $w$  son independientes de  $\phi$  y son útiles para problemas con simetría axial.

Consideremos ahora el reemplazo de las variables independientes  $(\omega, \alpha, \theta, \phi, t)$  por  $(\omega, u, v, w, t)$ , se podrá notar que no existe una relación biunívoca entre los dos conjuntos de variables. Cualquier punto del espacio  $(\omega, \alpha, \theta, \phi, t)$  se puede representar en forma única en un punto del espacio  $(\omega, u, v, w, t)$ , sin embargo lo inverso no es válido. En general existen cuatro distintos puntos en el espacio  $(\omega, \alpha, \theta, \phi, t)$  que se pueden representar en cada punto del espacio  $(\omega, u, v, w, t)$ . Esta transformación está dada esencialmente por (9a) y (9b). La transformación inversa puede ser expresada por

relate the various sets of variables that can be used in (8). Let us consider the variables given by (9a). It can be shown that  $u$  and  $v$ , and hence any function of  $u$  and  $v$ , are constant along any ray. Furthermore,  $w$  is constant at a point travelling along any ray with group velocity. Hence, any function of  $u$ ,  $v$  and  $w$  is constant at a point travelling along a ray with group velocity. It can be noted that  $u$  and  $v$ , being independent of  $t$ , are useful for steady state problems. Similarly,  $u$  and  $w$  are independent of  $\phi$  and are useful for problems with axial symmetry.

Let us now consider replacing the independent variables  $(\omega, \alpha, \theta, \phi, t)$  by  $(\omega, u, v, w, t)$ . It should be noted that there is not a one-to-one correspondence between the two sets of variables. Any point in the  $(\omega, \alpha, \theta, \phi, t)$  space maps uniquely into a point in the  $(\omega, u, v, w, t)$  space, but the inverse is not true. In general, there are four distinct points in the  $(\omega, \alpha, \theta, \phi, t)$  space that will map into each point of the  $(\omega, u, v, w, t)$  space. This transformation is essentially given by (9a) or (9b). The inverse transformation can be expressed by

$$\begin{aligned}
 \theta &= \operatorname{arc} \cos \left[ w \operatorname{sen} \left( \frac{gt}{2a\omega} \right) - \sqrt{1 - u^2 - w^2} \cos \left( \frac{gt}{2a\omega} \right) \right] \\
 &\quad \text{si} \quad \text{if} \\
 &\quad w_1 \geq 0 \\
 \theta &= \operatorname{arc} \cos \left[ w \operatorname{sen} \left( \frac{gt}{2a\omega} \right) + \sqrt{1 - u^2 - w^2} \cos \left( \frac{gt}{2a\omega} \right) \right] \\
 &\quad \text{si} \quad \text{if} \\
 &\quad w_1 < 0
 \end{aligned}
 \tag{10a}$$

Esta expresión determina  $\theta$  en forma única en el intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Habiendo determinado  $\theta$ ,  $\alpha$  está dada por

This expression determines  $\theta$  uniquely on the interval  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Having determined  $\theta$ ,  $\alpha$  is given by

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= u \operatorname{csc} \theta \\
 \operatorname{sen} \alpha &= \frac{w - \cos \theta \operatorname{sen} \left( \frac{gt}{2a\omega} \right)}{\operatorname{sen} \theta \cos \left( \frac{gt}{2a\omega} \right)}
 \end{aligned}
 \tag{10b}$$

que en forma única determinan  $\alpha$  en el intervalo  $0 \leq \alpha < 2\pi$ . Finalmente  $\phi$  está dada por

which uniquely determines  $\alpha$  on the interval  $0 \leq \alpha < 2\pi$ . Finally  $\phi$  is given by

$$\begin{aligned}
 \cos \phi &= (1-u^2)^{-1} [v \operatorname{sen} \alpha + \sqrt{1-u^2-v^2} \cos \alpha \cos \theta] \\
 \operatorname{sen} \phi &= (1-u^2)^{-1} [v \cos \alpha \cos \theta - \sqrt{1-u^2-v^2} \operatorname{sen} \alpha] \\
 &\quad \text{si} \quad \text{if} \\
 &\quad v_1 \geq 0 \\
 \cos \phi &= (1-u^2)^{-1} [v \operatorname{sen} \alpha - \sqrt{1-u^2-v^2} \cos \alpha \cos \theta] \\
 \operatorname{sen} \phi &= (1-u^2)^{-1} [v \cos \alpha \cos \theta + \sqrt{1-u^2-v^2} \operatorname{sen} \alpha] \\
 &\quad \text{si} \quad \text{if} \\
 &\quad v_1 < 0
 \end{aligned}
 \tag{10c}$$

de donde  $\phi$  queda determinada en forma única en el intervalo  $0 \leq \phi < 2\pi$ .

Puede verse que podemos determinar  $(\omega, \alpha, \theta, \phi, t)$  en forma única conociendo los valores de  $(\omega, u, v, w, t)$  tan bien como los signos de  $v_1$  y  $w_1$ . Sin el conocimiento de estos signos, existirían cuatro resultados posibles. Si expresamos la energía espectral en términos de las nuevas variables,  $E = E^*(\omega, u, v, w, t)$ , la ecuación (7) queda como sigue

$$\frac{\partial E^*}{\partial t} = G
 \tag{11}$$

donde la derivada parcial denota diferenciación con respecto a la quinta variable independiente (sin considerar la variación de  $w$  con  $t$ ). La ecuación (11) resulta más prác-

from which  $\phi$  is uniquely determined on the interval  $0 \leq \phi < 2\pi$ .

It is seen that one can determine  $(\omega, \alpha, \theta, \phi, t)$  uniquely from knowledge of the values of  $(\omega, u, v, w, t)$  as well as the signs of  $v_1$  and  $w_1$ . Without knowledge of these signs, there would be four possible results. If we express the spectral energy in terms of the new variables,  $E = E^*(\omega, u, v, w, t)$ , equation (7) becomes

where the partial derivative denotes differentiation with respect to the fifth independent variable (not considering the variation of  $w$  with  $t$ ). Equation (11) might turn out

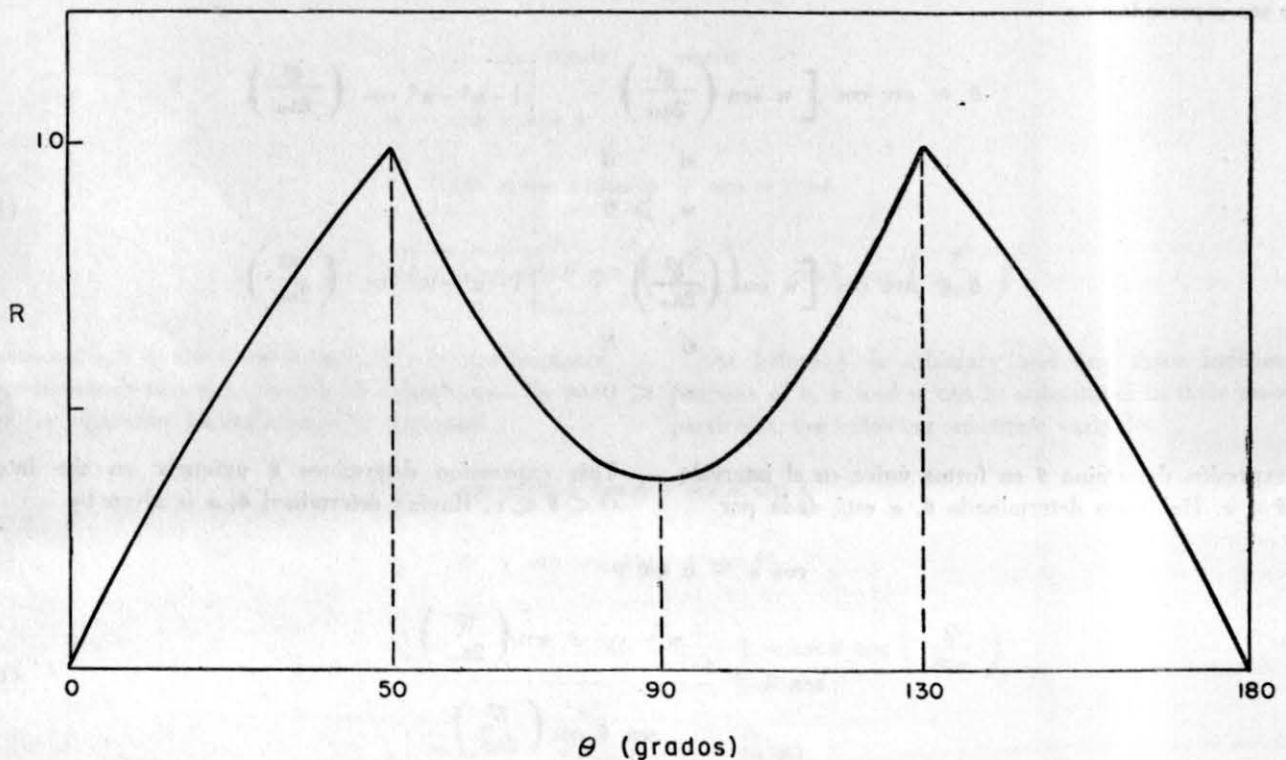


Fig. 1. Energía integrada direccionalmente en función de colatitud para los "ponientes duros", normalizada para la unidad en la fuente.

Fig. 1. Directionally-integrated energy plotted against colatitude for "roaring forties" example, normalized to be unity at source.

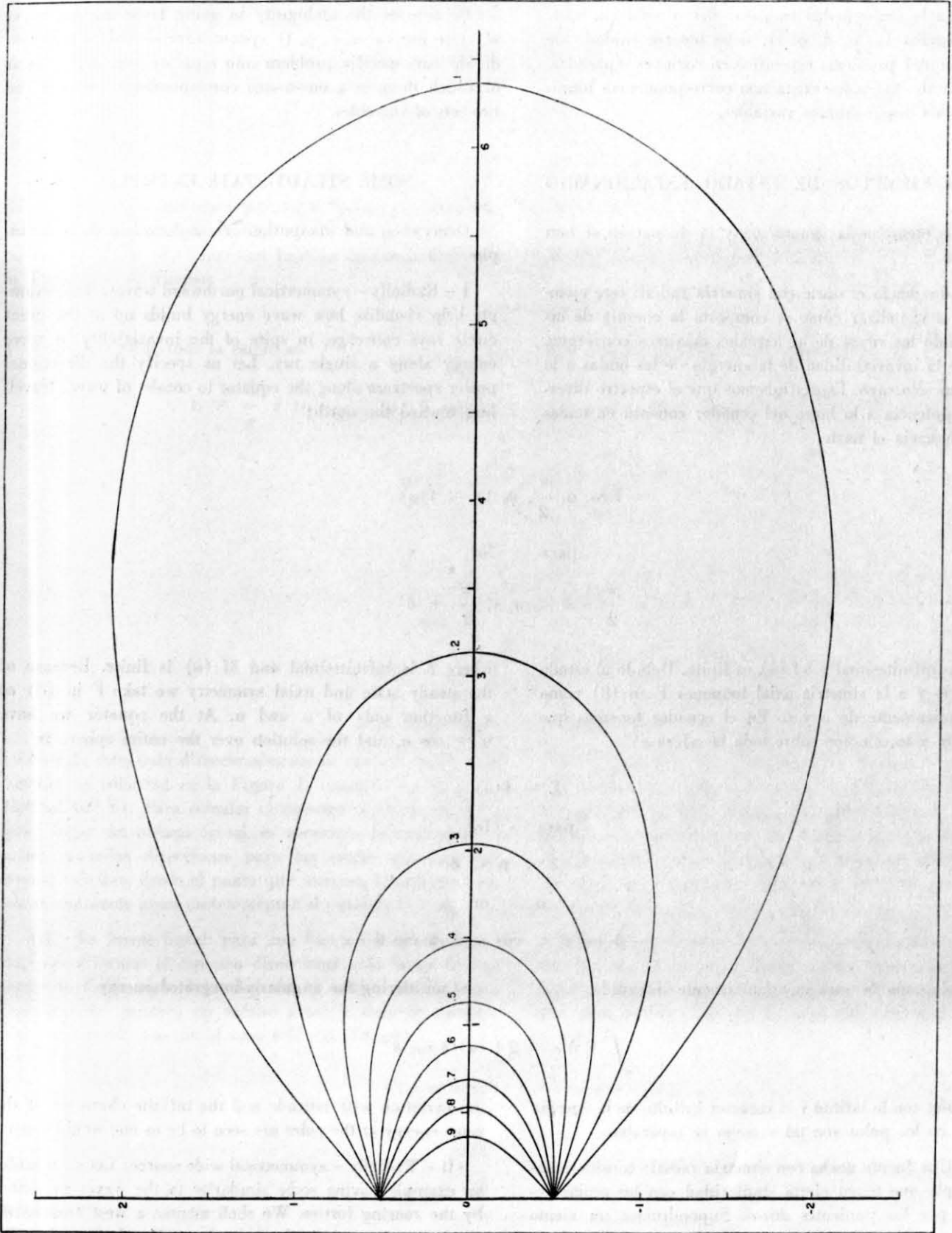


Fig. 2. Directionally-integrated energy for line source on a plane, normalized to be unity at source. Length of source is taken as unit of distance.

Fig. 2. Energía integrada direccionalmente para una fuente lineal sobre un plano, normalizada para ser la unidad en la fuente. La longitud de la fuente se toma como unidad de distancia.

tica que la (7) para predicción automática de ondas, ya que no hay que calcular derivadas con respecto a  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ .

Debido a la ambigüedad en pasar del sistema  $(\omega, u, v, w, t)$  al sistema  $(\omega, \alpha, \theta, \phi, t)$ , debe tenerse cuidado de dividir cualquier problema específico en regiones separadas, en cada una de las cuales exista una correspondencia biunívoca entre los dos conjuntos variables.

#### ALGUNOS EJEMPLOS DE ESTADO ESTACIONARIO

En estos ejemplos la generación y la disipación se han despreciado.

I - Ondas hacia el norte con simetría radial: este ejemplo ayuda a visualizar cómo se comporta la energía de las ondas cuando los rayos de los círculos máximos convergen, a pesar de la invariabilidad de la energía de las ondas a lo largo de un solo rayo. Especifiquemos que el espectro direccional de potencia a lo largo del ecuador consista en ondas que viajan hacia el norte,

$$E(\omega, \alpha, \frac{\pi}{2}, \phi, t) = f(\omega)$$

para for

$$\frac{\pi}{2} - \delta < \alpha < \frac{\pi}{2} + \delta$$

donde  $\delta$  es infinitesimal y  $\delta f(\omega)$  es finita. Debido al estado estacionario y a la simetría axial tomamos  $F$  en (8) como función únicamente de  $\omega$  y  $u$ . En el ecuador tenemos que  $u = \cos \alpha$  y la solución sobre toda la esfera es

$$E = f(\omega)$$

para for

$$-\delta < u < \delta$$

o or

$$-\delta \csc \theta < \cos \alpha < \delta \csc \theta$$

Considerando la energía angularmente integrada

$$\int E d\alpha = 2 f(\omega) \delta \csc \theta$$

la variación con la latitud y el carácter infinito de la energía de onda en los polos son tal y como se esperaban.

II - Una fuente ancha con simetría radial: consideremos un ejemplo que tenga cierta similaridad con las ondas generadas por los ponientes duros. Supondremos un viento oeste (hacia el este) a cierta colatitud  $\theta_0$  especificando la distribución angular de las ondas de acuerdo con la dada por el método de Pierson. Por lo que tomamos

to be more practical than (7) for automatic wave forecasts, in that no derivatives with respect to  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  need be calculated.

Because of the ambiguity in going from the  $(\omega, u, v, w, t)$  to the  $(\omega, \alpha, \theta, \phi, t)$  system, care should be taken to divide any specific problem into separate regions, in each of which there is a one-to-one correspondence between the two sets of variables.

#### SOME STEADY-STATE EXAMPLES

Generation and dissipation are neglected in these examples.

I - Radially - symmetrical northward waves: This example help visualize how wave energy builds up as the great circle rays converge, in spite of the invariability of wave energy along a single ray. Let us specify the directional power spectrum along the equator to consist of waves traveling toward the north;

where  $\delta$  is infinitesimal and  $\delta f(\omega)$  is finite. Because of the steady state and axial symmetry we take  $F$  in (8) as a function only of  $\omega$  and  $u$ . At the equator we have  $u = \cos \alpha$ , and the solution over the entire sphere is

Considering the angularly-integrated energy

the variation with latitude and the infinite character of the wave energy at the poles are seen to be as one would expect.

II - Radially - symmetrical wide source: Let us consider an example having some similarity to the waves generated by the roaring forties. We shall assume a west (eastward) wind at some colatitude  $\theta_0$  and specify the angular distribution of the waves there according to that given by Pierson's Method. Hence we take



$$E(\omega, \alpha, \theta_0, \phi, t) = \frac{2}{\pi} f(\omega) \cos^2 \alpha$$

para for

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$= 0$$

en otros casos in other cases

El factor  $2/\pi$  se introduce para que la energía integrada angularmente sea igual a  $f(\omega)$  para  $\theta = \theta_0$ . Nuevamente tomaremos  $F$  en (8) como una función únicamente de  $\omega$  y  $u$ . Para  $\theta = \theta_0$  tenemos

$$u = \cos \alpha \sin \theta_0$$

y la solución sobre toda la esfera es

and solution over the entire sphere is

$$E = \frac{2}{\pi} f(\omega) \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{para for } \left\{ \begin{array}{l} \arccos \left( \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \right) < |\alpha| < \frac{\pi}{2} \\ \pi - \theta_0 < \theta < \theta_0 \end{array} \right.$$

$$\text{o or } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \theta < \pi - \theta_0 \quad \text{o} \quad \theta > \theta_0 \end{array} \right.$$

$$= 0$$

en otros casos in other cases

La energía integrada direccionalmente se muestra como una función de colatitud en la Figura 1, tomando  $\theta_0 = 130^\circ$  (latitud  $40^\circ$  S). Para calcular el espectro de onda en cualquier lugar del océano actual, es necesario únicamente suprimir aquellas direcciones para las cuales un rayo de círculo máximo, desde el punto que interese, intercepte una isla o continente antes de interceptar el paralelo  $\theta = \theta_0$ .

The directionally - integrated energy is shown as function of colatitude in Figure 1, taking  $\theta_0 = 130^\circ$  (latitude  $40^\circ$  S). To calculate the wave spectrum at any location in the actual ocean it is necessary only to delete those directions from which a great circle ray from the point of interest would intersect an island or continent before intersecting the parallel  $\theta = \theta_0$ .

III - La fuente lineal: para una fuente lineal estacionaria, especificamos el espectro direccional a lo largo de un segmento finito como se realiza en el método de Pierson. Consideremos primero un océano plano y después comparemos los resultados con el caso esférico. Tomemos

III - The line source: For a steady line source we specify the directional spectrum along a finite line segment, as is done in Pierson's method. Let us consider first a plane ocean and then compare the results with the spherical case. Let us take

$$E(\omega, \alpha, o, y, t) = \frac{2}{\pi} f(\omega) \cos^2 \alpha$$

para for

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ y } -b < y < b$$

$$= 0$$

en otros casos in other cases

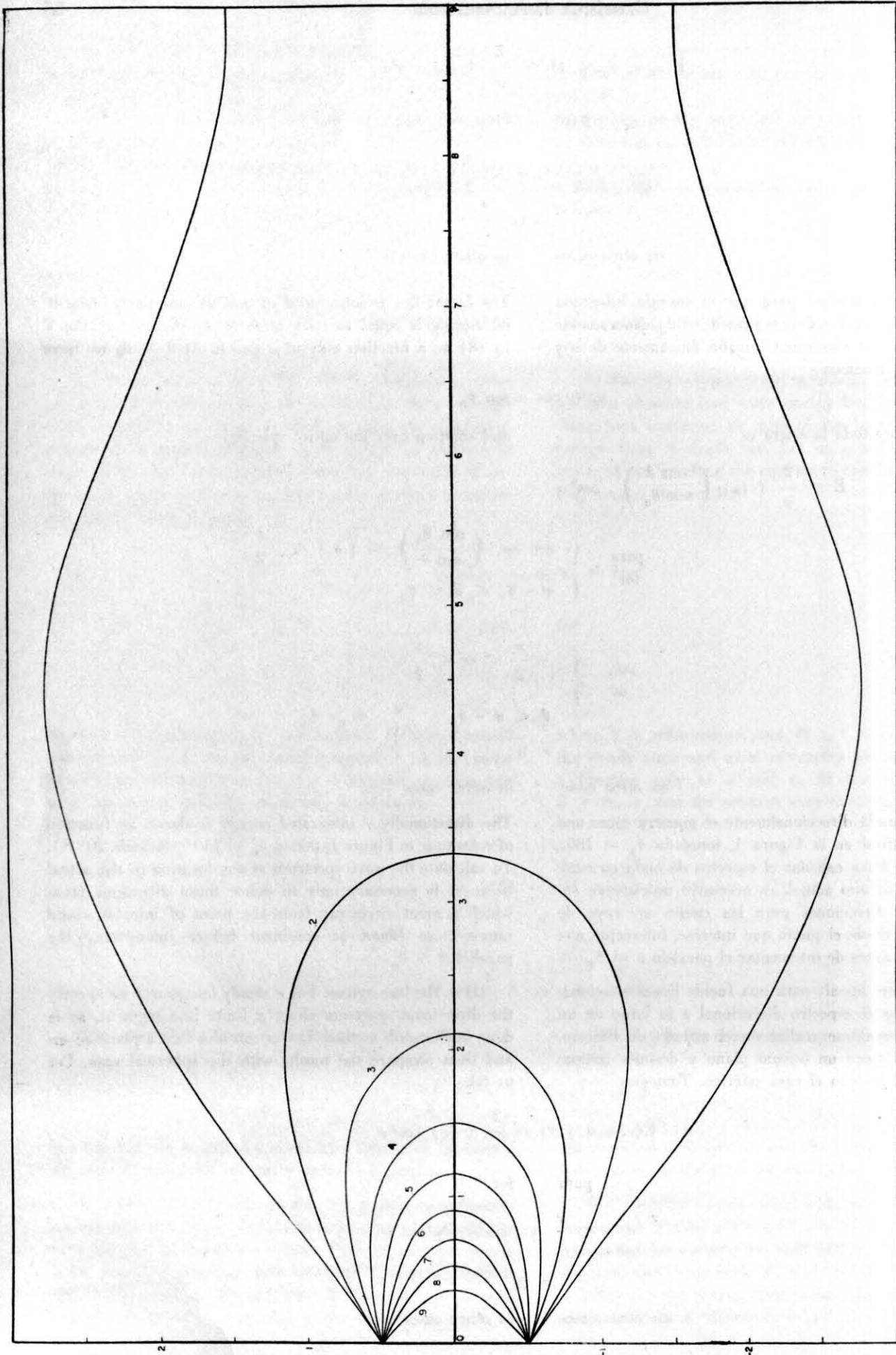


Fig. 3a. Directionally-integrated energy for great-circle source on sphere, normalized to be unity at source. Abcissa represents distance along perpendicular bisector of source; ordinate represents distance from perpendicular bisector. Arc length of source is taken as unit of distance. Figure 3a is for source length of 10 degrees, 3b for source length of 30 degrees.

Fig. 3a. Energía integrada direccionalmente para una fuente, que sea un círculo máximo sobre una esfera, normalizada para ser la unidad en la fuente. La abscisa representa la distancia a lo largo de la bisectriz perpendicular a la fuente; la ordenada representa la distancia desde la bisectriz perpendicular. La longitud de arco de la fuente se toma como unidad de distancia. La figura 3a es para una fuente de 10 grados y la 3b para una fuente de 30 grados.

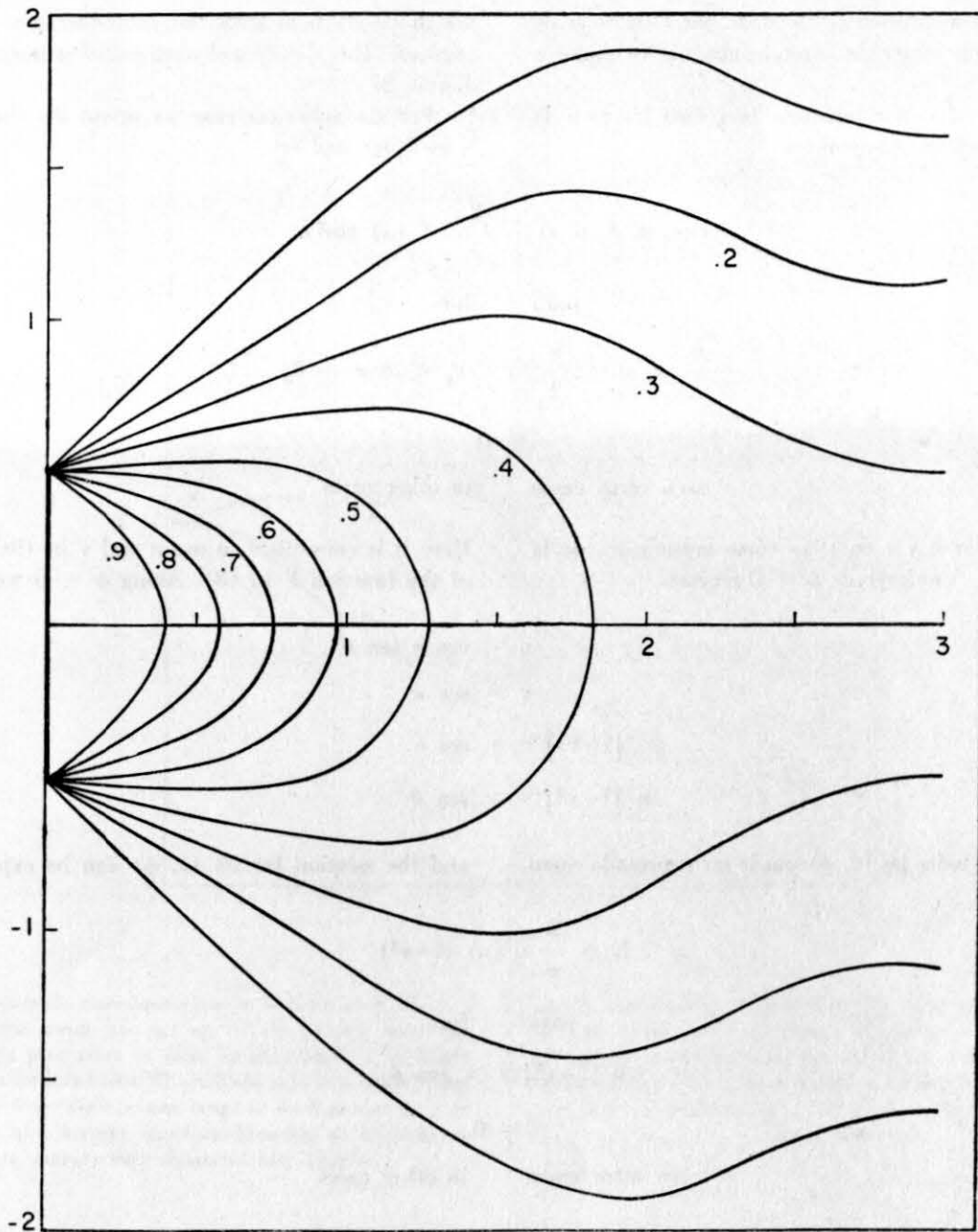


Fig. 3b.

tomando nuevamente la distribución angular del coseno cuadrado. Usando  $u$  como está dada en (4b) como un argumento de la función arbitraria de (3), se obtiene la siguiente solución

again taking the cosine squared angular distribution. Using  $u$  given in (4b) as an argument of the arbitrary function of (3) the following solution is obtained

$$E = \frac{2}{\pi} f(\omega) \cos^2 \alpha$$

para for

$$\arcsin \left( \frac{y-b}{x} \right) < \alpha < \arcsin \left( \frac{y+b}{x} \right)$$

$$= 0$$

en otros casos in other cases

la cual es idéntica al procedimiento dado por el método de Pierson. La energía integrada direccionalmente se muestra en la Figura 2.

Para el caso esférico orientamos la fuente lineal a lo largo de un meridiano y suponemos

$$E(\omega, \alpha, \theta, \phi, t) = \frac{2}{\pi} f(\omega) \cos^2 \alpha$$

para for

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ y } \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0$$

$$= 0$$

en otros casos in other cases

Es conveniente usar  $u$  y  $v$  en (9a) como argumentos de la función  $F$  en (8). A lo largo de  $\phi = 0$  tenemos

$$u = \cos \alpha \operatorname{sen} \theta$$

$$v = \operatorname{sen} \alpha$$

$$[1 - v^2]^{1/2} = \cos \alpha$$

$$u [1 - v^2]^{-1/2} = \operatorname{sen} \theta$$

y la solución para todas las  $(\theta, \phi)$  puede ser expresada como

$$E = \frac{2}{\pi} f(\omega) (1 - v^2)$$

para for

$$u [1 - v^2]^{-1/2} > \operatorname{sen} \theta_0$$

$$= 0$$

en otros casos in other cases

La energía integrada direccionalmente se expresa en la Figura 3. Su comportamiento a lo largo del ecuador para fuentes de diferentes longitudes se expresa en la Figura 4.

Como era de esperarse, la esfera difiere en muy poco del plano excepto para grandes distancias que se aproximan  $90^\circ$  de la fuente. Puesto que las ondas son aún detectables después de recorrer un arco de  $170^\circ$  (Munk, 1961), parece ser práctico, tal vez necesario, considerar el caso esférico en predicciones automáticas de ondas. Hay una curiosa diferencia en el problema de la fuente lineal entre el plano y la esfera; en el plano la energía integrada angularmente disminuye de modo continuo conforme se aleja de la fuente mientras en la esfera la energía se incrementa conforme se aleja a pequeñas distancias de la fuente, alcanzando pronto un valor máximo cerca de ella. Esta es una consecuencia directa de la distribución angular del coseno cuadrado, el cual evidentemente no es estrictamente hablando válido en

which is identical with the procedure given by Pierson's method. The directionally-integrated energy is plotted in Figure 2.

For the spherical case we orient the line source along a meridian and set

Here it is convenient to use  $u$  and  $v$  in (9a) as arguments of the function  $F$  in (8). Along  $\phi = 0$  we have

and the solution for all  $(\theta, \phi)$  can be expressed

The directionally - integrated energy is plotted in Figure 3. Its behaviour along the equator for various source lengths is shown in Figure 4.

As one would expect the sphere differs little from the plane except at great distances, approaching  $90^\circ$ , from the source. But, since waves have been known to be still detectable after traversing an arc of  $170^\circ$  (Munk, 1961), it would seem practical, perhaps even necessary, to consider the spherical case when making automatic wave forecasts. There is one curious difference in the line source problem between the plane and the sphere: on the plane the angularly-integrated energy diminishes continuously with distance from the source, whereas on the sphere the energy increases with distance from the source, for small distances, quickly reaching a maximum value near the source. This is a direct consequence of the cosine squared angular distribution which evidently is not strictly speaking valid on a spherical

una superficie esférica, a menos que uno esté dispuesto a aceptar ondas más altas fuera de la región generadora que dentro de ella.

surface unless one is willing to accept higher waves outside the generating region than inside.

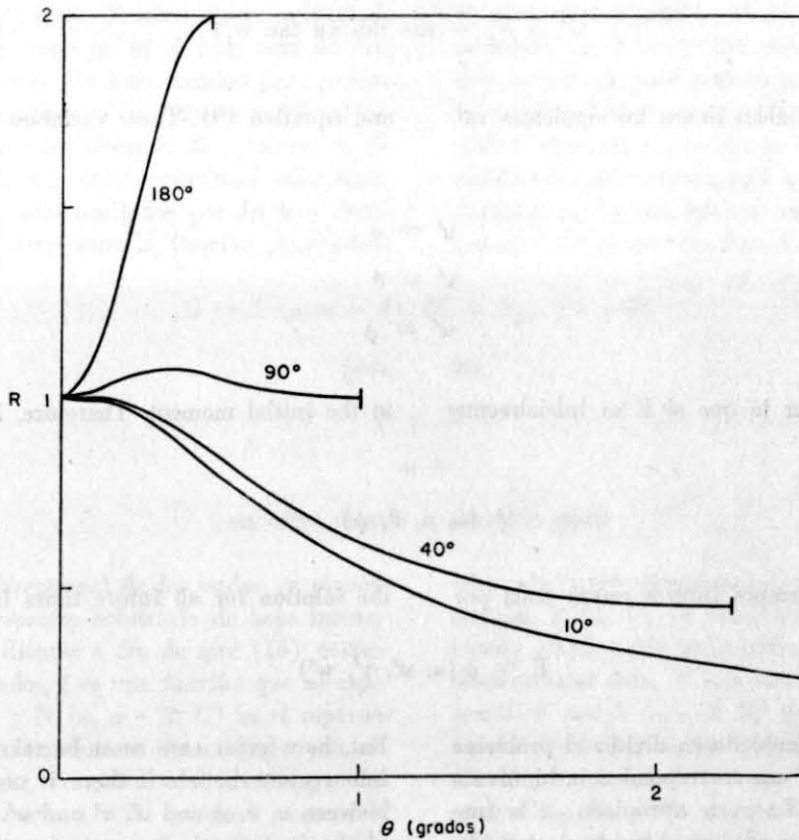


Fig. 4. Energía integrada direccionalmente a lo largo de la bisectriz perpendicular a una fuente que sea un círculo máximo sobre una esfera, normalizada para tener el valor de la unidad en la fuente para fuentes de varias longitudes. El resultado para una fuente lineal sobre el plano correspondería a una longitud de 0 grados y no se muestra debido a que discrepa imperceptiblemente de la curva de 10 grados, excepto para distancias muy grandes.

Fig. 4. Directionally-integrated energy along perpendicular bisector to great circle source on sphere, normalized to be unity at source, for various source lengths. The result for linear source on plane would correspond to source length of 0 degrees and is not shown, as it deviates imperceptibly from 10 degrees curve, except for very large distances.

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Si se especifica la función E en el tiempo  $t = 0$  se necesita evaluar para todos los tiempos futuros (despreciando nuevamente la generación y la disipación). Para el caso del plano especificamos

$$E(\omega, \alpha, x, y, 0) = \psi(\omega, \alpha, x, y)$$

donde  $\psi$  es la función dada. Para el momento inicial tenemos que  $u = x$  y  $v = y$  de (4a). Consecuentemente, la solución para todos los tiempos es

$$E = \psi(\omega, \alpha, u, v)$$

En la esfera es conveniente usar las variables  $u', v'$  y  $w'$  definidas por

INITIAL VALUE PROBLEMS

Here the function E is specified at time  $t = 0$  and it is required to evaluate E for all future times (again neglecting generation and dissipation). For the plane case we specify

where  $\psi$  is the given function. At the initial moment we have  $u = x$  and  $v = y$  from (4a). Consequently, the solution for all times is

On the sphere it is convenient to use the variables  $u', v'$  and  $w'$ , defined by

$$u' = \arctan \left( \frac{w}{u} \right)$$

$$v' = \arcsen \sqrt{u^2 + w^2}$$

$$w' = v_2 + \arctan (u \tan w_1)$$

y la ecuación (9). Estas variables tienen los siguientes valores

$$u' = \alpha$$

$$v' = \theta$$

$$w' = \phi$$

para el momento inicial. Por lo que si E es inicialmente igual a

$$\psi (\omega, \alpha, \theta, \phi)$$

la solución para todos los tiempos futuros estará dada por

$$E = \psi (\omega, u', v', w')$$

Pero, aquí se tendrá mucho cuidado en dividir el problema en regiones en las que exista una correspondencia biunívoca entre  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  y  $u'$ ,  $v'$  y  $w'$ . La parte apropiada de la función trigonométrica inversa puede ser obtenida de consideraciones sobre continuidad. Si esta solución se utiliza en el océano actual para problemas tales como seguir las ondas generadas por una sola tormenta, rayos que chocan sobre una costa no se les deberá permitir aparecer en ninguna otra parte. Incluso en una región abierta sin islas en el océano, algunos rayos podrán circular la tierra y reaparecer, a menos que se tenga cuidado de excluirlos.

#### LA FUNCION GENERADORA

Se sabe que la función generadora depende en una forma muy compleja del espectro de las ondas ya presentes y del viento. Aceptaremos la hipótesis de que tiene la siguiente forma

$$G [u, \alpha, -\beta, \omega, E (\omega, \alpha, \theta, \phi, t)]$$

donde  $u (\theta, \phi, t)$  es la velocidad del viento y  $\beta (\theta, \phi, t)$  la dirección hacia la cual está soplando. Aunque esta expresión parezca complicada, está demasiado simplificada. Por ejemplo, no va de acuerdo con el método de Pierson en el cual la presencia de ondas de muy alta frecuencia facilitan en alguna forma el crecimiento de las ondas de baja frecuencia. No es erróneo pensar que G depende también de

and equation (9). These variables have the values

at the initial moment. Therefore, if E is initially equal to

the solution for all future times is given by

But, here great care must be taken to divide the problem into regions in which there is one to one correspondence between  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  and  $u'$ ,  $v'$  and  $w'$ . The appropriate branch of the inverse trigonometric functions can be chosen from continuity consideration. If this solution is to be used in the actual ocean for a problem such as to follow the waves generated by a single storm, rays impinging upon a coastline should not be allowed to reappear elsewhere. Even in an islandless open region of the ocean some rays might circle the earth and reappear unless care is taken to exclude them.

#### THE GENERATING FUNCTION

The generating function is known to depend in a very complex way on the spectrum of the waves already present and the wind. We might hypothesize that it have the form

(12)

where  $u (\theta, \phi, t)$  is wind speed and  $\beta (\theta, \phi, t)$  is direction toward which it is blowing. Even this expression, complicated as it may seem, is oversimplified. For example, it is not consistent with the Pierson method, in which the presence of high-frequency waves somehow facilitates the growth of low-frequency waves. It may not be too far fetched to suppose that G depends also on

$$\int_0^\omega d\omega' \int_0^{2\pi} E(\omega', \alpha, \theta, \phi, t) d\alpha$$

o alguna otra integral semejante. Muchas especulaciones de este tipo pueden hacerse, pero no es el propósito de este trabajo tratar esos problemas. Un buen camino para probar cualquier modelo, sería calcular el espectro direccional resultante para condiciones simplificadas de generación, de las que hay un buen número de observaciones tales como los ejemplos unidimensionales limitados por fetch o duración. Por ejemplo, consideraremos la función generadora

or other such integrals. Many speculations of this sort can be made, but it is not the purpose of this paper to go into this subject. A good way to test any such model would be to calculate the resulting directional spectrum for simplified generating conditions for which there are a good number of observations, such as the one-dimensional limited duration or limited fetch examples. As an example, let us consider the generating function

$$G = f(\omega, \alpha - \beta) (E + E_0) (N - E) \tag{13}$$

para            for

$$E < N$$

$$= 0$$

en otros casos            in other cases

donde E es el espectro direccional de las ondas ya presentes  $E_0(\omega, U)$  es cierto espectro arbitrario de baja intensidad, el cual puede especificarse a fin de que (13) corresponda a los datos observados, f es una función que se especifica en forma parecida y  $N(\omega, \alpha - \beta, U)$  es el espectro direccional para un mar totalmente desarrollado con un viento que tenga la misma velocidad y dirección que los valores instantáneos. Neumann (1953) propuso un modelo para el espectro de un mar totalmente desarrollado que concuerda con muchas observaciones. El espectro de Neumann adaptado con un factor de propagación angular de coseno cuadrado como en el método de Pierson, daría una estimación razonable para N. La expresión (13) se presenta debido a que tiene algunas de las propiedades que se podrían esperar ocurrieran en la naturaleza, además de poderse tratar en forma algebraica y no debido a que tenga algún significado físico.

where E is the directional spectrum of the waves already present,  $E_0(\omega, U)$  is some arbitrary spectrum of low intensity which could be specified in order to make (13) fit observational data, f is a function that would be similarly specified, and  $N(\omega, \alpha - \beta, U)$  is the directional spectrum for a fully-developed sea for a wind having the same speed and direction as the instantaneous values. Neumann (1953) has proposed a model for the spectrum of a fully-developed sea which is in good agreement with many observations. The Neumann spectrum adapted with a cosine squared angular spreading factor as in the Pierson method would give a reasonable estimate of N. The expression (13) is presented merely because it has some of the properties that could be expected to occur in nature in addition to being treatable in closed form, not because it is believed to have any physical significance.

Para un viento constante que sopla sobre un mar en calma (E, inicialmente igual a cero) la generación procede lentamente dependiendo del valor de  $E_0$  para cada componente espectral, hasta que las ondas tengan una altura apreciable. Entonces la generación procede más rápidamente. Finalmente, la razón de generación decrece y el espectro direccional resultante se aproxima a N. La expresión (13) no toma en cuenta ninguna disipación debido a un viento que se oponga a las ondas.

For a constant wind blowing over a calm sea (E initially equal to zero) the generation proceeds slowly, depending on the value of  $E_0$  for each spectral component, until the waves are appreciably high. Then generation proceeds more rapidly. Finally the rate of generation decreases and the resulting directional spectrum approaches N. The expression (13) does not take into account any dissipation for a wind opposing the waves.

La principal ventaja de la expresión (13) y de muchas otras expresiones del tipo (12), es que los problemas del límite por duración y fetch pueden ser resueltos en forma algebraica. Para el problema de límite por duración en un plano nosotros tomamos

The principal advantage of expression (13), and of many others expressions of the type (12), is that the limited duration and fetch problems can be solved in closed form. For the limited duration problem on a plane we take

$$E(\omega, \alpha, x, y, 0) = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 0$$

$$U = \text{const.} \quad \beta = \text{const.}$$

con estas condiciones la solución para (2) y (13) es

with these conditions the solution of (2) and (13) is

$$E = \frac{E_0 N (1 - \lambda)}{(N \lambda + E_0)} \quad (14)$$

donde where

$$\lambda = \exp [-(N + E_0) ft]$$

Para el problema del límite por fetch tomamos

For the limited fetch problem we take

$$E(\omega, \alpha, o, y, t) = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 0$$

$$U = \text{const.} \quad \beta = 0$$

Con estas condiciones la solución es la misma expresión (14), pero en este caso

With these conditions the solution is the same expression (14), but where in this case

$$\lambda = \exp [-2 \omega g^{-1} \sec \alpha (N + E_0) fx]$$

Existe una notable diferencia en la distribución angular de la energía de ondas, entre el método de Pierson y los resultados para nuestro problema de límite por fetch. En el último caso las ondas cuyas direcciones se desvían mucho de la dirección del viento ( $|\alpha|$  grande) alcanzan mayor amplitud para pequeños fetches, mientras en el método de Pierson la distribución angular se toma independiente del fetch. El significado físico es evidente: mientras mayor sea la  $|\alpha|$  más largo será el fetch para el correspondiente tren de ondas.

There is one striking difference in the angular distribution of wave energy between the Pierson method and the above result for limited fetch. In the later case the waves whose directions deviate by a large amount from the wind direction (large  $|\alpha|$ ) attain greater amplitude at small fetches, whereas in the Pierson method the angular distribution is taken independent of fetch. The physical meaning is evident: the larger the  $|\alpha|$  the longer the fetch for that particular wave train.

## DISIPACION

## DISSIPATION

Si la disipación se debe únicamente a pérdidas por viscosidad o turbulencia en el agua o sobre la superficie cuando hay vientos quietos (vientos que no se oponen) el efecto se puede estimar como sigue. Substitúyase

If dissipation arises solely from viscous or turbulent losses in the water or at the surface against still air (no opposing winds) the effect can be estimated as follows. Set

$$G = -K E^n$$

en (7). Aquí K y n pueden ser funciones de  $\omega$ . La solución es entonces

in (7). Here K and n can be functions of  $\omega$ . The solution is then

$$E = F(\omega, u, v, w) e^{-kt}$$

para for

$$n = 1$$

$$E = [F(\omega, u, v, w) - (1 - n)kt]^{-\frac{1}{1-n}}$$

para for

$$n \neq 1$$



donde la función  $F$  es como antes arbitraria y  $u$ ,  $v$  y  $w$  están definidas por (9). Una modificación similar de la solución puede hacerse para el océano plano. Los ejemplos anteriores se pueden solucionar fácilmente, tomando en cuenta este tipo de disipación.

where the function  $F$  is arbitrary as before, and  $u$ ,  $v$  and  $w$  are defined by (9). A similar modification of the solution can be made for the plane ocean. The previous examples can easily be worked out taking this type of dissipation into account.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores se sienten agradecidos con Paul Horrer por sugerir la necesidad de la predicción automática de ondas, con Walter Munk por informarnos acerca de otros trabajos similares, con Mohamed Hassan, Willard J. Pierson, Jr., N. F. Barber, R. W. Burling y Joe Joy por sus acertados comentarios e ideas y con Luis Ottalengo y el Centro Electrónico de Cálculo de la U.N.A.M. por su generosa ayuda en el cálculo numérico.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

The authors are indebted to Paul Horrer for suggesting a need for automatic wave prediction, to Walter Munk for informing us of other work being carried out along similar lines, to Mohamed Hassan, Willard J. Pierson, Jr., N. F. Barber, R. W. Burling, and to Joe Joy for their helpful comments and ideas, and to Luis Ottalengo and the Centro Electrónico de Cálculo de la U.N.A.M. for their generous assistance with numerical calculations.

#### BIBLIOGRAFIA

#### BIBLIOGRAPHY

- BARBER, N. F., 1958. Some Relations to be expected between the directional Spectra of Swell observed at different Times and Places on the Ocean. *New Zealand Journal of Science*, 1(2):330-341.
- HASSELMAN, K., 1961. One dimensional gravity-wave spectrum. Unpublished manuscript of talk given at wave conference in Maryland.
- NEUMANN, G., 1953. On ocean wave spectra and a new method for forecasting wind generated sea. *U. S. Beach Erosion Board, Technical Memorandum No. 43*, Dec., 42 pp.
- PIERSON, W. J., G. NEUMANN and R. W. JAMES, 1955. Practical methods for observing and forecasting ocean waves by means of wave spectra and statistics. *U. S. Navy Hydrographic Office, Publication No. 603*.
- WEBSTER, A. G., 1950. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Chapter II, New York, 1 vol., il.