

***SIMULACION DE ALTURAS SUCESIVAS DE OLAS
CON CORRELACION NO-NULA DISTRIBUIDAS
SEGUN LA LEY DE RAYLEIGH***

H. G. PEÑA*

(Recibido: 12 de agosto, 1981)

RESUMEN

La sucesión de alturas de olas es modelada con un proceso autorregresivo de primer orden, incluyendo así un coeficiente de correlación no nulo entre dos alturas sucesivas. Por medio de un algoritmo que preserva el valor medio, la dispersión estándar y el coeficiente de asimetría, se generan series de valores que representan las alturas de olas, distribuidas según la ley de Rayleigh.

Los resultados de la simulación muestran excelente concordancia con la distribución teórica. Se ilustra el uso del modelo y su simulación en una aplicación a la estadística de la formación de grupos de olas que superan la altura significativa. Otra vez, el acuerdo de los resultados con los obtenidos a partir de datos de campo es muy bueno.

ABSTRACT

The successive wave heights are modelled with a first order autoregressive process with a non-zero first lag autocorrelation. Using an algorithm which preserves the mean, standard deviation and skewness coefficient, the wave heights are generated with a Rayleigh probability density distribution law.

The results of this simulation show excellent agreement with the theoretical distribution.

An application of simulated results on a run of waves statistics is shown, and again, these results compare favourably with observational data.

* *Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada. Departamento de Oceanografía. Ensenada, B. C.*

I INTRODUCCION

En general, todos los estudios numéricos sobre estadística de olas se han basado en la simulación de la serie temporal que representa al registro de olas, usando series trigonométricas de la forma:

$$\eta_t = \sum_{\ell=1}^N A_{\ell} \cos(2\pi f_{\ell} t + \phi_{\ell})$$

donde las amplitudes A_{ℓ} están relacionadas con el espectro de energía y las fases ϕ_{ℓ} están distribuidas uniformemente entre 0 y 2π . De esta forma, la distribución de densidad de probabilidad de η_t es del tipo gaussiano.

Otro método empleado se basa en la generación de una señal puramente aleatoria ("ruido blanco"), la cual es filtrada numéricamente con un filtro, cuya función de transferencia posee las mismas características espectrales que corresponden a la serie que se desea simular.

El primero tiene la desventaja de consumir mucho tiempo de computadora, mientras que para el segundo es en general dificultoso obtener el filtro con las características deseadas.

La idea de este trabajo es pasar por alto la generación del perfil η_t e ir directamente a la generación de los máximos del perfil, que son los que definen las alturas de las olas. De esta forma obtenemos la sucesión de alturas sin la necesidad del conocimiento del perfil η_t . La desventaja de este método está en que ignoraremos la distribución estadística de los periodos. La justificación de ello estriba en que, a fines de la aplicación del método a problemas de Ingeniería Oceánica, en general es más importante y significativo el contar con el conocimiento de la estadística de las alturas y no la de los periodos. A menudo, un periodo promedio es suficiente para tales fines.

II MODELO TEORICO

El modelo a proponer está fundamentado en un simple, sencillo y justificado argumento: la función de autocorrelación de las alturas de las olas posee un carácter geométrico descendente.

Como fue demostrado por Rice (1944), la distribución de densidad de probabilidad de la envolvente de una señal gaussiana de ancho de banda angosta, es:

$$p(a_1, a_2) = 16 \Lambda^{-1} a_1 a_2 I_0 [a_1 a_2 (4A)^{-1} (\mu_{13}^2 + \mu_{14}^2)^{1/2}] \times \\ \times \exp \left\{ -m_0 (8A)^{-1} (a_1^2 + a_2^2) \right\} \quad (1)$$

donde $a_1 = a(t)$ es la altura definida como la distancia entre un máximo y el siguiente mínimo en el perfil. La variable a_2 es la misma que a_1 pero evaluada a un tiempo τ posterior, es decir: $a_2 = a(t+\tau)$. Los restantes símbolos, son:

$$\Lambda = m_0^2 - (\mu_{13}^2 + \mu_{14}^2)$$

$I_0(x)$: es la función de Bessel de primera clase con argumento imaginario (de orden cero),

$$m_0 = \int_0^{\infty} S(f) df = \bar{\eta}^2 \quad (\text{varianza de } \eta_t).$$

$$\mu_{13} + i \mu_{14} = \int_0^{\infty} S(f) e^{i2\pi(f-f_M)\tau} df, \quad i = \sqrt{-1}$$

$S(f)$: es la densidad espectral

f_M : es la frecuencia que corresponde al máximo de la densidad espectral $S(f)$. Obviamente, la variable aleatoria $a(t)$ es siempre positiva.

La función de autocorrelación de $a(t)$ es entonces:

$$\rho(\tau) = R(\tau)/\sigma_R^2$$

donde σ_R^2 es la varianza de $a(t)$,

y

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [a(t) - \bar{a}] \cdot [a(t+\tau) - \bar{a}] \cdot p[a(t), a(t+\tau)] da da. \quad (2)$$

Como fue mostrado por Longuet-Higgins (1952), para un espectro de banda angosta, la distribución de densidad de probabilidad de $a(t)$ sigue la ley de Rayleigh:

$$p(a) = \frac{a}{4m_0} \exp \left\{ -\frac{a^2}{8m_0} \right\}$$

de donde

$$\bar{a} = (2\pi m_0)^{1/2}$$

$$y \quad \sigma_R^2 = 8 m_0 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Arhan y Ezraty (1978) evaluaron numéricamente la expresión (2), donde el valor de τ es puesto igual al "periodo medio de cruce de cero" T_z y múltiplos de él.

Los resultados muestran que la autocorrelación $\rho(\tau)$ es del tipo exponencial $r^{k\tau}$ ($|r| < 1$), donde el parámetro k es función del espectro energético de las olas. Nótese que T_z también lo es, ya que depende de los momentos espectrales a través de:

$$\bar{T}_z = 2\pi \left(\frac{m_0}{m_2}\right)^{1/2}.$$

Nuestra hipótesis de trabajo será entonces asumir una autocorrelación exponencial entre alturas que supondremos espaciadas a intervalos de tiempo constante, iguales a \bar{T}_z . Por lo tanto, la información espectral estará contenida en este periodo medio y nada diremos acerca de la distribución de periodos. Los valores de la correlación para $\tau \gg 2\bar{T}_z$, dependen otra vez del espectro, pero en general son menores que 0.1.

Una vez establecida la dependencia exponencial de la autocorrelación, el siguiente paso será proponer un modelo estocástico que posea dicha característica, esto es: un proceso autorregresivo de 1er orden (o proceso de Markov de 1er orden):

$$x_{t+1} - \mu_x + \rho_x(1)(x_t - \mu_x) + \epsilon_{t+1}$$

donde x_t , es el valor del proceso a tiempo t , μ_x es el valor medio de x_t , $\rho_x(1)$ es el coeficiente de correlación entre x_t y x_{t+1} , y ϵ_t es una variable aleatoria pura con

$$E(\epsilon_t) = 0 \quad y \quad \text{var}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2.$$

Las varianzas de x_t y σ_ϵ^2 están relacionadas por

$$\sigma_\epsilon^2 = \sigma_x^2 (1 - \rho_x^2).$$

Si la distribución de ϵ_t es Normal ($0, \sigma_\epsilon^2$) entonces la distribución de x_t es $N(\mu_x, \sigma_\epsilon^2)$. Sin embargo necesitamos que la distribución de x_t sea del tipo Rayleigh, ya que las alturas de las olas siguen dicha ley.

En general, la distribución de x_t es:

$$\text{distrib}(x_t) \cong \text{distrib} \left(\sum_{k=0}^n \rho_x^k \epsilon_{n-k} \right)$$

Si fuera $\rho_x \approx 1$, entonces aplicando el Teorema Central del Límite, obtendremos una distribución gaussiana (para $n \gg$) independientemente de la distribución de ϵ_t .

Si ρ_x es pequeño y la distribución de ϵ_t es NO-gaussiana, nada puede ser dicho en general sobre cómo será la distribución de x_t .

Esta complicación nos lleva a sugerir otro método propuesto por Matalas (1967), donde el modelo de generación responde a la expresión:

$$y_{t+1} - \mu_y = \rho_y(y_t - \mu_y) + T_{t+1} \sigma_y (1 - \rho_y^2)^{1/2} \quad (3)$$

donde μ_y , σ_y^2 y ρ_y son la media, la varianza y la correlación $\rho_y(1)$ de los logaritmos naturales de la variable original, es decir $y_t = \ln(x_t - \alpha)$.

T_t es una variable $N(0, 1)$. El procedimiento está basado en dicha transformación, con los parámetros de (3) relacionados a los correspondientes a la variable original x_t , a través del siguiente sistema de ecuaciones no-lineales:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \alpha + \exp(\sigma_y^2/2 + \mu_y) \\ \sigma_x^2 &= \exp[2(\sigma_y^2 + \mu_y)] - \exp(\sigma_y^2 + 2\mu_y) \\ \gamma_x &= [\exp(3\sigma_y^2) - 3\exp(\sigma_y^2) + 2] / [\exp(\sigma_y^2) - 1]^{3/2} \\ \rho_x &= [\exp(\sigma_y^2 \rho_y) - 1] / [\exp(\sigma_y^2) - 1] \end{aligned} \quad (4)$$

En estas ecuaciones, μ_x , σ_x^2 , γ_x y ρ_x se refieren a la media, varianza, coeficiente de asimetría y correlación ($\tau = 1$) de los datos originales, los cuales se suponen conocidos.

Resolviendo las ecuaciones para α , μ_y , σ_y y ρ_y y empleando la relación (3), obtenemos la generación del proceso y_t . Luego, el proceso autorregresivo que poseen los parámetros μ_x , σ_x^2 , γ_x y ρ_x se obtiene de

$$x_t = \exp(y_t) + \alpha .$$

III RESULTADOS DEL MODELO

A fin de comparar los resultados del modelo con la estadística teórica correspondiente a Longuet-Higgins (1952) dado para un espectro angosto, realizamos el cambio de la variable "altura" a la variable "amplitud" que resulta ser igual a aquella, dividido por el factor 2.

Expresada en términos de la amplitud, la distribución de Rayleigh es,

$$p(a) = \frac{2a}{\langle a^2 \rangle} \exp \left\{ - a^2 / \langle a^2 \rangle \right\}$$

donde

$$\langle a^2 \rangle = a_{rms}^2 \quad (\text{valor cuadrático medio}).$$

Los momentos estadísticos de esta distribución son:

$$\mu_x = \langle a \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_{rms}$$

$$\sigma_x^2 = \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2 = a_{rms}^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\gamma_x = 0.6311$$

Para independizar los resultados del valor cuadrático medio, realizamos una adimensionalización respecto de dicho parámetro, resultando:

$$\mu_x = \sqrt{\pi}/2, \quad \sigma_x^2 = (1 - \pi/4), \quad \gamma_x = 0.6311$$

A efectos de la simulación adoptamos el coeficiente de correlación como parámetro libre y con un valor de $\rho_x = 0.25$, el cual en promedio es similar al valor obtenido con datos reales (Rye, 1974; Arhan *et al.*, 1978).

Se simularon 15 series de 2 000 alturas cada una. La tabla I muestra los resultados promediados sobre las 15 series, y donde se han incluido los valores teóricos para su comparación.

Para cada serie se realizó una prueba de ajuste con el Test χ^2 , para comparar con la distribución teórica de Rayleigh. Los resultados se mostraron excelentes a niveles de significación de 0.05 y 0.01, y por lo tanto son altamente significativos. El acuerdo entre los resultados teóricos y los obtenidos por simulación (Tabla I) son excelentes, lo que demuestra que el procedimiento adoptado para simular un

proceso autorregresivo de 1er orden con una distribución tipo Rayleigh es adecuado para obtener una sucesión de alturas de olas con una correlación dada.

Tabla I⁽¹⁾

PARAMETRO	TEORIA ⁽²⁾	SIMULACION
$\langle a \rangle$	0.886	0.886 \pm 0.005
arms	1.000	0.997 \pm 0.010
σ^2	0.215	0.212 \pm 0.008
a 1/3	1.416	1.415 \pm 0.005
a 1/10	1.800	1.801 \pm 0.005
a (máx)	2.865	3.061 \pm 0.250
(3) Q	0.134	0.132 \pm 0.004
$\rho_X(1)$	0.250	0.243 \pm 0.005
(4) P ₁₁	—	0.234 \pm 0.018
(4) P ₂₁	—	0.115 \pm 0.003

(1) Los parámetros están normalizados respecto al valor arms.

(2) Ver Longuet-Higgins (1952)

(3) representa la probabilidad de que una altura tomada al azar, sea mayor o igual que la altura significativa a 1/3.

(4) Ver texto.

De la generación de las series, y debido al tipo de algoritmo utilizado, resulta aproximadamente un 1 % de valores negativos. Estos valores son simplemente descartados sin que por ello se modifique la estadística del 99 % restante.

IV UNA APLICACION CON LOS VALORES SIMULADOS

A fin de efectuar diseños de estructuras oceánicas o costeras, es importante conocer los aspectos estadísticos que presentan las sucesiones de n alturas de olas que superan cierto nivel prefijado (comúnmente adoptado como la altura significativa $a_{1/3}$). En otras palabras, se trata de estimar la probabilidad de ocurrencia de que se presenten 1, 2, etcétera, alturas sucesivas de olas que superen un nivel dado. Desde

el punto de vista teórico, es muy sencillo resolver este problema si se asume que cada altura es totalmente independiente de las anteriores (Goda, 1970). Sabemos que este hecho escapa a la realidad ya que como se ha visto, existe una correlación no-nula entre alturas sucesivas. Desafortunadamente el problema teórico se presenta ahora insoluble debido a su complejidad matemática.

Sin embargo, usando el método de simulación junto con el modelo autorregresivo podemos resolver el problema satisfactoriamente para cualquier nivel de referencia y coeficiente de correlación adoptado.

Se puede mostrar (Peña, en preparación), que toda la información requerida para conocer las probabilidades de la sucesión de alturas está contenida en la matriz de transición del proceso definido a través de 2 estados, como sigue:

Estado 1: altura de la ola \geq nivel prefijado.

Estado 2: altura de la ola $<$ nivel prefijado.

La matriz de transición p_{ik} establece entonces las probabilidades condicionales de que se presente una altura en un estado dado, conociendo el estado en la que se encuentra la anterior, es decir, que p_{ik} representa la probabilidad de estar en el estado i -ésimo, cuando el estado anterior fue el k -ésimo.

Esta matriz de transición puede hallarse fácilmente si luego de la simulación de las alturas (con ρ_x elegido *a priori*), se procede a "contar" las veces que se presenta el evento en sus 4 posibilidades (en realidad, sólo 2 posibilidades son independientes, ya que en una matriz de transición de 2×2 , sólo existen 2 elementos independientes).

Entonces, si se genera suficiente cantidad de alturas, la probabilidad de evento p_{ik} se obtiene del cociente entre los casos favorables y los posibles. Obviamente, el resultado será mejor cuanto mayor sea el número de alturas generadas.

Procediendo de la manera descrita y utilizando las 15 series de 2 000 alturas cada una, se obtuvo en promedio: ($h = a_{1/3}$ y $\rho = 0.25$)

$$P_{11} = 0.2340 \pm 0.0180$$

y
$$P_{21} = 0.1152 \pm 0.0030$$

$$(P_{12} = 1 - P_{11} \text{ y } P_{22} = 1 - P_{21}).$$

La distribución de probabilidad de n alturas sucesivas sobre la significativa es (Peña, en preparación):

$$P_1(n) = P_{12} P_{11}^{(n-1)}$$

y su valor medio $\langle \ell_1 \rangle = 1/P_{12}$

TABLA II

n	$P_1(n), \rho = 0.{}^{(1)}$	$P_1(n), \rho = 0.25$
1	0.866	0.766
2	0.116	0.180
3	0.0155	0.0420
4	0.00208	0.09815
5	0.00028	0.00230
6	0.00004	0.00054

⁽¹⁾ Corresponde a los resultados de Goda (1970)

La tabla II muestra las probabilidades teóricas con correlación nula y las correspondientes a la simulación con $\rho = 0.25$. Como era de esperarse, las probabilidades (para $n > 1$) son mayores cuando la correlación es no-nula. La comparación con distribuciones obtenidas a partir de datos reales (Siefert, 1976), se puede ver en la fig. 1. El acuerdo es excelente. Los valores medios son $\langle \ell_1 \rangle = 1.15$ (para $\rho = 0$ y $\langle \ell_1 \rangle = 1.31$ (para $\rho = 0.25$).

El aspecto computacional para la simulación está compuesto por 3 subrutinas básicas:

- a) para la resolución del sistema de ecuaciones no lineales (4)
- b) para la generación del dato a partir de (3). Esta subrutina incluye la generación de una serie puramente aleatoria con distribución uniforme, a partir de la cual se construye la distribución gaussiana de T_t .

La generación de cada serie de 2 000 valores, realizada en un sistema Prime 400, lleva 20 segundos aproximadamente.

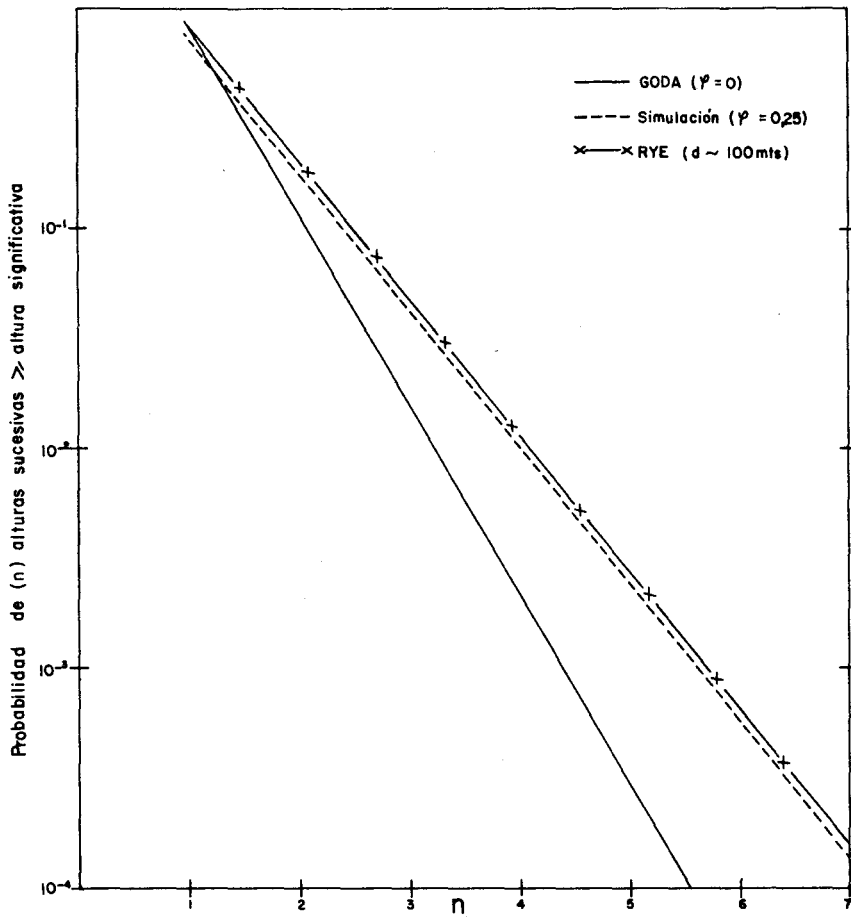


Fig 1. Probabilidad de ALTURAS SUCESIVAS

V CONCLUSIONES

Los resultados presentados en las secciones precedentes han evidenciado lo aceptable que resulta la adopción del modelo autorregresivo propuesto para la simulación de alturas sucesivas de olas.

La principal ventaja reside en el hecho de que el usuario puede utilizarlo en aquellos problemas donde la complejidad matemática le impide obtener resultados analíticos. El modelo es computacionalmente rápido.

Su desventaja, aunque no afecta a la generalidad de los casos prácticos, está en la suposición de que las alturas sucesivas están equi-"espaciadas" temporalmente a intervalos constantes e iguales al periodo medio de "cauce de cero". Esta suposición está plenamente justificada si consideramos que en las aplicaciones al diseño de estructuras oceánicas o costeras, siempre se toma un valor promedio del periodo.

BIBLIOGRAFIA

- ARHAN, M., and R. EZRATI, 1978. "Statistical Relations between Successive Wave Heights" *Oceanol. Acta*, Vol. 1, No. 2, pp. 151-158.
- GODA, V., 1970. "Numerical Experiments on Wave Statistics with Spectral Simulation" Report of the Port and Harbour Research Institute, Vol. 9, No. 3, Japan.
- LONGUET-HIGGINS, M. C., 1952. "On the Statistical Distribution of the Heights of Sea Waves" *Journal of Marine Research*, Vol. XI, No. 3, pp. 245-265.
- MATALAS, N. C., 1967. "Mathematical Assessment of Synthetic Hydrology" *Water Resources Research*, Vol. 3, No. 4, pp. 937-945.
- RICE, S. O., 1945. "Mathematical Analysis of Random Noise" *Bell System Tech. Journal* 24, pp.46-156.
- SIEFERT, W., 1976. "Consecutive High Waves in Coastal Waters". *Proc. of 15th Coastal Eng. Conference*, Vol. I, Chapter 11, pp. 171-182.