

**UNA INTERPRETACION GEOMETRICA DE LAS  
FUNCIONES ORTOGONALES EMPIRICAS**

**H. G. PEÑA\***

**A. BADAN-DANGON\***

*(Recibido: 19 de octubre, 1982)*

*(Aceptado: 23 de mayo, 1983)*

**RESUMEN**

Se presenta una interpretación geométrica sencilla de las Funciones Ortogonales Empíricas cuando sus dos primeros modos explican un gran porcentaje de la varianza total (por ejemplo, un 90%). La representación geométrica en dos dimensiones (plano), permite obtener una inspección rápida, informativa y resumida de la interrelación entre las variables iniciales. Se estiman los errores relativos que se cometen al despreciar la influencia del tercer modo. Estos conceptos son aplicados a una serie de datos de corrientes marinas obtenidas a distintas profundidades. La interpretación geométrica puede extenderse a más de 2 dimensiones, aunque su visualización, obviamente, se hace cada vez más difícil.

**ABSTRACT**

A simple geometric interpretation of Empirical Orthogonal Functions is presented for the case where the first two modes represent a large percentage of the total variance (say, 90%). A geometric representation in two dimensions (a plane), permits a rapid, informative and succinct inspection of the interrelation among the original variables. The relative error produced by supressing the third mode is estimated. These concepts are applied to a series of data from oceanographic current meters at different depths. The geometric interpretation can be extended to more than two dimensions although the visualization becomes obviously more difficult.

\* *CICSESE, Apartado Postal 2732, Ensenada, B. C., MEXICO.*

## I. INTRODUCCION

La representación y análisis de campos multidimensionales en meteorología y en oceanografía han creado un auge en la utilización de las funciones ortogonales empíricas o eigenvectores, principalmente a partir de los años 1950. Además de ofrecer las ventajas comunes a las representaciones ortogonales convencionales, las funciones ortogonales empíricas dependen exclusivamente de las estadísticas de los procesos bajo estudio y, por ello, no requieren de las suposiciones de orden dinámico *a priori* que requieren aquellas para generar el conjunto ortogonal más conciso\*. Por lo mismo, las funciones empíricas son ortogonales en forma discretizada, lo cual se acomoda a las características de las técnicas de muestreo comúnmente utilizadas.

Ejemplos de la utilización de las funciones ortogonales empíricas incluyen el trabajo de Lorenz(1956), quien impulsó su aplicación en la predicción atmosférica, y Davis (1976), el cual utilizó este método para separar las componentes de los campos térmicos del Pacífico Norte. Kutzbach (1967) aplicó esta técnica para evaluar las diferentes contribuciones de campos multivariantes en la atmósfera; el ejemplo equivalente en el océano lo proporcionaron Wang y Walsh (1976) en un estudio de las componentes de un ecosistema frente a Baja California.

La aplicación de las funciones ortogonales empíricas al estudio de estructuras de playa se ilustra en Winant, Inman y Nordstrom (1975) y en Winant y Aubrey (1976), donde se presentan algunos resultados acerca de la estabilidad de las mismas. En otras aplicaciones, Kundu, Allen y Smith (1975) utilizaron el método en el estudio de un sistema de circulación costera y Allen y Smith (1981) utilizaron las funciones ortogonales empíricas para hacer un diagnóstico de los balances dinámicos de tres sistemas costeros distintos.

La forma usual de representar las funciones ortogonales empíricas, esto es, superpuestas en una misma gráfica y a lo largo de un mismo eje (Badan-Dangon, 1982; Smith, 1981), no permite realizar una inspección rápida e informativa que muestre las posibles relaciones entre las variables iniciales. Lo mismo sucede con los coeficientes de expansión, los cuales son función del tiempo. El propósito de esta nota es proponer una manera nueva de representar los resultados de un análisis de funciones ortogonales empíricas. Este método aprovecha las representaciones geométricas extremadamente sencillas de las estadísticas de las series originales para permitir la interpretación inmediata del análisis y otorga una imagen clara de la estructura

\* Cabe hacer notar que esto puede llevar en ocasiones a cierta ambigüedad en la interpretación del análisis, como lo recalcan Allen y Smith (1981).

multivariada de los datos. Este método es particularmente útil cuando una mayor parte de la varianza del sistema puede ser explicada por los dos o, a lo sumo, tres primeros modos. Esto suele ocurrir en la inmensa mayoría de los sistemas geofísicos, donde la energía tiende a decrecer exponencialmente de un modo a otro (Preisendorfer, 1977).

Los resultados presentados en las secciones siguientes, si bien no aportan, matemáticamente, nada nuevo, ofrecen una representación gráfica que permite una visualización rápida de la estadística de las variables de interés. La aplicación a datos de corrientes marinas se presenta sólo como un ejemplo numérico y no se pretende en este trabajo efectuar ningún tipo de análisis sobre los datos en búsqueda de conclusiones desde el punto de vista oceanográfico.

## II. FUNCIONES ORTOGONALES EMPIRICAS

Las bases matemáticas de las funciones ortogonales empíricas (FOE) fueron presentadas originalmente por Kosambi (1943) y existen descripciones detalladas del método en trabajos posteriores (Lorenz, 1956; Lumley, 1970; Kundu, Allen y Smith, 1975). Ofrecemos aquí una breve revisión:

Sea  $v(x_i, t_k)$  el campo de una variable aleatoria, real, en la localidad  $i$ -ésima y evaluada al tiempo  $k$ -ésimo, donde  $i = 1, \dots, N$  y  $k = 1, \dots, K$ .

En el contexto matricial podemos representar al campo  $v(x_i, t_k)$  como la matriz

$$v = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k) ;$$

las componentes del vector  $\underline{v}_k$  son las observaciones para cada estación, a tiempo fijo  $k$ .

Se define la matriz de varianza-covarianza como

$$R = \frac{1}{K} v(I - \frac{1}{K}J) v' \equiv \frac{1}{K} UU' , \quad (1)$$

donde  $I$  es la matriz unitaria,  $J(K \times K)$  es una matriz con todos sus elementos unitarios y el símbolo ( $'$ ) designa la transpuesta de una matriz.

La matriz  $R$  es simétrica y semidefinida positiva, por lo cual posee un conjunto  $N$  de autovalores reales y positivos, y un conjunto  $N$  de autovectores

$$P = (\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_N)$$

que, reescalados, cumplen la propiedad de ortogonalidad

$$P'P = \lambda, \quad (2)$$

siendo  $\lambda$  una matriz diagonal cuyos elementos son las varianzas que explican cada uno de los  $N$  modos. El primer modo será el que explique mayor varianza y así sucesivamente ( $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$ ).

Dado que los autovectores (modos) forman un conjunto completo, la expansión modal quedará expresada como

$$U = PE, \quad (3)$$

siendo  $E = (E_1, E_2, \dots, E_k)$  la matriz de los coeficientes, que pueden ser hallados de

$$E = \lambda^{-1} P'U, \quad (4)$$

y que posee las siguientes propiedades

$$\frac{1}{k} E e = \underline{0}, \quad (5)$$

siendo  $e' = (1, 1, \dots, 1)_{1 \times k}$

$$y \quad \frac{1}{k} E E' = \mathbf{1}, \quad (6)$$

Para más detalles de la obtención de estas relaciones, el lector puede remitirse a las referencias ya citadas. En resumen, esta forma de reducir la información implica una descomposición de la organización del sistema en sus modos más persistentes, ya sea espacial o temporalmente.

A partir de las expresiones anteriores y con el fin de poder apreciar e interpretar geoméricamente ciertas características estadísticas de los datos, se hace necesario explicitar la dependencia espacial y temporal de las matrices anteriores. Así, podemos definir un vector "espacial",  $H_j$  en  $R^N$ , tal que sus componentes están representadas por los autovectores, es decir

$$H_j = (P_1(j), P_2(j), \dots, P_n(j)) \quad (7)$$

(Nótese que  $H_j$  es el vector de la fila  $j$ -ésima de la matriz  $P$ ). Análogamente, definimos un vector "temporal"  $C_k$  en  $R^N$ , tal que sus componentes están representadas por el vector columna  $k$ -ésima de la matriz  $E$ , es decir

$$C_k = \{E_1(k), E_2(k), \dots, E_N(k)\} \quad (8)$$

El espacio  $R^N$  está compuesto por  $N$  ejes cartesianos ortogonales representados por cada uno de los  $N$  modos. Así definidos ambos vectores, es posible expresar la estadística contemporánea de la información, con el único manejo de proyecciones ortogonales entre vectores, ángulos y módulos. Esto no sólo permite ordenar la información en forma resumida, sino también otorga un acceso rápido, cualitativo y cuantitativo a la misma.

Una lista no exhaustiva de estas representaciones geométricas es la siguiente: (las derivaciones de las expresiones son sencillas y no merecen atención especial)

$$a) \quad U(x_j, t_k) = H_j \cdot G_k, \quad (9)$$

donde el símbolo  $(\cdot)$  significa producto interno (o escalar) entre dos vectores. Nótese que este tipo de producto implica una proyección ortogonal de un vector sobre el otro.

b) El cuadrado del módulo del vector espacial  $H_j$  es la varianza de la variable  $U(x_j, t_k)$ ,

$$\text{Var} [U(x_j, t_k)] = |H_j|^2, \quad (10)$$

y la dispersión estándar es

$$\sigma_j = |H_j|. \quad (11)$$

c) Los elementos de la matriz de covarianza  $R$ , son el producto interno de los vectores espaciales  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo,

$$R = H_i \cdot H_j, \quad (12)$$

d) El coseno del ángulo entre  $H_i$  y  $H_j$  es el coeficiente de correlación lineal entre las variables  $U(x_i, t_k)$  y  $U(x_j, t_k)$ ,

$$\rho_{ij} = \cos \gamma_{ij}, \quad \gamma_{ij} \equiv (H_i, H_j). \quad (13)$$

e) Los cosenos directores cuadrados del vector espacial  $H_j$  representan la fracción de la varianza de la estación  $j$ -ésima que es explicada por sus respectivos modos

$$\gamma_n^2(j) = \cos^2 \mu_j^{(n)}, \quad (14)$$

donde  $\mu_j^{(n)}$  representa el ángulo que forma el vector espacial  $H_j$  con el eje de  $R^N$  correspondiente al modo  $n$ -ésimo.

f) La proyección ortogonal de  $G_k$  sobre  $H_j$  es la estandarización a media nula y varianza unitaria de la variable original  $v(x_j, t_k)$ ,

$$S(x_j, t_k) = h_j \cdot G_k, \quad (15)$$

donde  $S$  es la variable estandarizada y  $h_j$  es el vector en la dirección de  $H_j$ .

Estas características geométricas surgen entonces como propiedades del álgebra lineal cuando se diagonaliza una matriz simétrica. Sin embargo, tratar de visualizarlas en un espacio euclidiano de  $N$  dimensiones es obviamente imposible.

Afortunadamente la experiencia con variables que poseen un significado físico bien concreto ha mostrado que en general bastan no más de 2 ó 3 modos para explicar más del 95% de la varianza total. De esta forma, el espacio de los vectores espacial y temporal se reducirían a 2 ó 3 dimensiones.

El caso ideal sería poder trabajar en el plano (cuando sólo son necesarios los dos primeros modos para explicar un gran porcentaje de la varianza total). Aun en el caso de que sean necesarios los tres primeros modos, es posible reducir el problema de 3 dimensiones al plano y evaluar los errores al admitir tal contracción. La sección siguiente trata sobre este tema.

### III. ANALISIS DE ERRORES

La reducción (contracción) del análisis por funciones ortogonales empíricas de tres dimensiones a dos dimensiones implica un cierto error relativo porcentual. Este es pequeño cuando, como lo hemos expresado anteriormente, los dos primeros modos son suficientes para expresar una proporción considerable de la varianza total. Una forma conveniente de expresar este error es:

$$E_r = \left[ \frac{Z_{R^2} - Z_{R^3}}{Z_{R^3}} \right] \cdot 100 \quad (16)$$

donde  $R^2$  y  $R^3$  indican el espacio euclidiano en el que se realizan los cálculos de los modos. Esto es, un valor positivo de  $E_r$  indica que el cálculo en  $R^2$  sobreestima al valor verdadero en  $R^3$ ; un valor negativo de  $E_r$  indica que el cálculo en  $R^2$  sub-estima al valor verdadero en  $R^3$  en el porcentaje indicado. Por lo tanto, el valor verdadero puede obtenerse de:

$$Z_{R^3} = \frac{1}{1 + \frac{E_r}{100}} \cdot Z_{R^2} \quad (17)$$

Además, podemos entonces definir al factor:

$$J = \frac{1}{1 + \frac{E_r}{100}} \quad (18)$$

como el factor de corrección, que será mayor o menor que la unidad, dependiendo del signo de  $E_r$ . Específicamente, tenemos para algunas expresiones presentadas en la sección anterior:

(a) Error relativo en las dispersiones estándar (11):

$$E_r = - \left[ 1 - \frac{|H_i| R^2}{|H_j| R^3} \right] \cdot 100 \quad (19)$$

(b) Error relativo en los elementos de la matriz de covarianza (12):

$$E_r = - \left[ 1 - \frac{(H_i \cdot H_j) R^2}{(H_i \cdot H_j) R^3} \right] \cdot 100 \quad (20)$$

(c) Error relativo en los coeficientes de correlación lineal (13):

$$E_r = - \left[ 1 - \frac{\cos(H_i, H_j) R^2}{\cos(H_i, H_j) R^3} \right] \cdot 100 \quad (21)$$

(d) Error relativo de la varianza explicada por cada modo (14):

$$E_r = - \left[ 1 - \frac{|H_j|^2 R^3}{|H_j|^2 R^2} \right] \cdot 100 \quad (22)$$

#### IV. APLICACION

A manera de ilustración de los argumentos que hemos presentado, desarrollamos un análisis en funciones ortogonales empíricas de un conjunto de datos de corrientes oceánicas. Estos datos fueron obtenidos frente a Baja California en profundidades de 25, 42 y 60 m, por medio de tres correntómetros de registro electrónico marca *General Oceanics*. Los detalles de la instalación, operación de los instrumentos y del análisis preliminar de los datos pueden encontrarse en Barton *et al.* (1980). Los datos resultantes que se muestran en la figura 1 son tres series temporales de velocidad, filtradas de tal manera que eliminen las frecuencias inercial y mayores. Estas series han sido giradas 45° en dirección contraria a las manecillas del reloj, que es la orientación general de la costa. Indicamos con u, v, las componentes en las direcciones x, y, que son positivas hacia el noreste y noroeste respectivamente.



Para este ejemplo tomamos la componente  $v(t)$ , paralela a la costa, como datos de entrada al análisis (figura 2). O sea, tenemos específicamente  $v(x_i, t_k)$ ; donde  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  se refiere a la posición (profundidad) de cada sensor y  $t_k$ ,  $k = 1, 1120$  es el número de datos, donde cada dato es tomado a intervalos de seis horas. Las estadísticas básicas de estos datos se muestran en la Tabla 1.

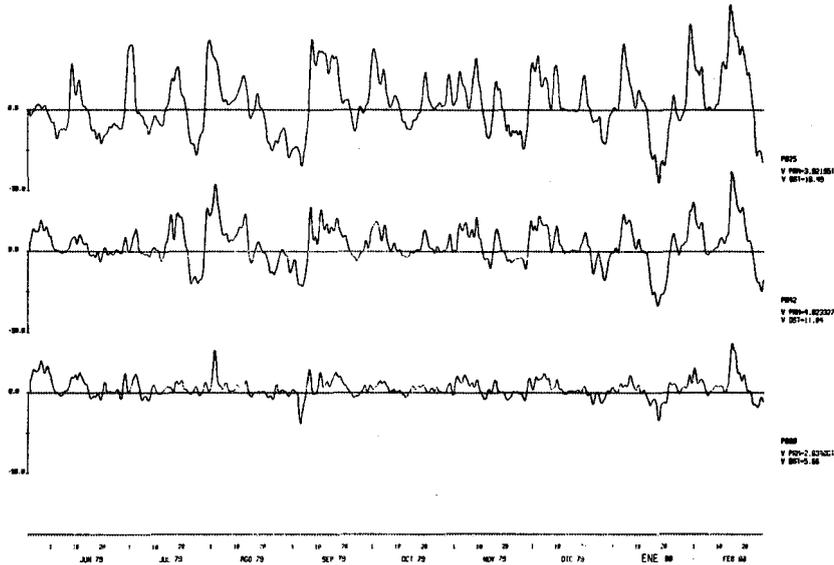


Fig. 2. Series temporales de la componente  $V(t)$  de la corriente, dirigida a lo largo de la costa. Valores positivos indican un flujo hacia el noreste.

La matriz de covarianza de estos datos, definida por (1), es:

Tabla 1

Estadísticas básicas de las series temporales utilizadas en el análisis por funciones ortogonales empíricas. De las dispersiones estándar se muestran las verdaderas y las calculadas en  $R^2$ , según la ecuación (11).

Profundidad (m)	media (cm/seg)	Dispersión estándar	
		$R^2$ (cm/seg)	$R^3$ (cm/seg)
25	3.872	18.533	18.537
45	4.002	11.755	11.859
60	2.887	5.173	5.662

$$R_{ij} = \begin{vmatrix} 343.61 & 192.90 & 68.24 \\ 192.90 & 140.65 & 54.14 \\ 68.24 & 54.14 & 32.06 \end{vmatrix}$$

Los autovectores que resultan con la condición de normalización expresada por (2), así como el porcentaje de la varianza total contribuida por cada modo, son:

	1er. modo $P_1(x_i)$	2o. modo $P_2(x_i)$	3er. modo $P_3(x_i)$
$\lambda_i / \sum \lambda_i$	92.37%	6.09%	1.54%
$x_1$	18.30	2.93	-0.44
$x_2$	11.17	-3.66	1.58
$x_3$	4.17	-3.07	-2.30

Estos mismos pueden representarse gráficamente en su forma clásica como en la figura 3. En ésta se aprecia que los tres modos ortogonales empíricos corresponden aproximadamente a un modo barotrópico dominante y a los dos primeros modos baroclínicos de mucha menor importancia. De la misma forma los coeficientes temporales de la expansión, expresados por (4) ilustrados en la figura 4, muestran que el primer modo expresa una gran proporción de la varianza del conjunto de datos, así como su contenido en frecuencia dominante. Es sencillo verificar que los autovectores o modos cumplen con la condición de ortogonalidad (2). A su vez, los autovalores corroboran que el 98.46% de la varianza queda representado por los dos primeros modos.

Por ello, podemos hacer uso de una representación bidimensional de este análisis.

Los vectores espaciales  $H_j$ , definidos por (7), en dos dimensiones ( $R^2$ ) son:

$$H_1 = (18.30, 2.93)$$

$$H_2 = (11.17, -3.66)$$

$$H_3 = (4.17, -3.07)$$

El gráfico de este análisis en las dos dimensiones apropiadas se muestra en la figura 5. De estos vectores podemos obtener las siguientes cantidades:

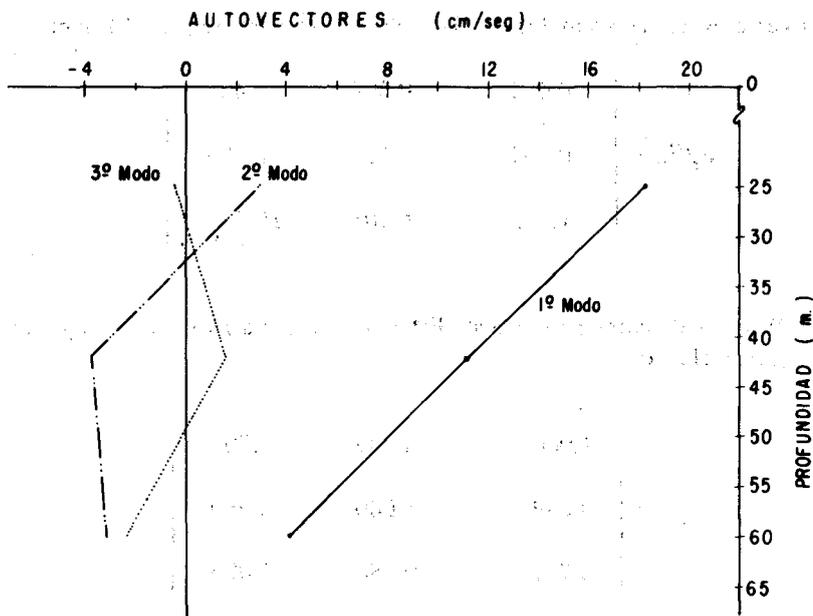


Fig. 3. Distribución espacial de los tres primeros modos del análisis por funciones ortogonales empíricas.

1. Dispersiones estándar: Estas están dadas por la expresión (11) como  $|H_j|$  y se indican en la Tabla 1. Las diferencias que se observan en relación con las dispersiones estándar calculadas inicialmente se deben a que se ha despreciado el tercer modo. El error relativo porcentual es, para cada profundidad, según (19):

$$x_1 : -.021\%$$

$$x_2 : -0.877\%$$

$$x_3 : -8.636\%$$

2. Matriz de covarianza. Los elementos de ésta se calculan a partir de (12), de donde, en  $R^2$ , se obtiene:

$$R_{ij} = \begin{vmatrix} 343.49 & 193.66 & 67.24 \\ 193.66 & 138.18 & 57.77 \\ 67.24 & 57.77 & 26.76 \end{vmatrix}$$

Los errores relativos debidos a la reducción de  $R^3$  a  $R^2$ , según (20), son:

$$E_r(\%) = \begin{vmatrix} -0.032 & 0.394 & -1.465 \\ 0.394 & -1.721 & 6.705 \\ -1.465 & 6.705 & -16.53 \end{vmatrix}$$

3. Coeficientes de correlación lineal. Estos se calculan a partir de (13) y en  $R^2$  se obtiene, para el caso:

$$\rho_{ij} = \begin{vmatrix} 1.000 & 0.889 & 0.701 \\ 0.889 & 1.000 & 0.950 \\ 0.701 & 0.950 & 1.000 \end{vmatrix}$$

Los errores asociados a este cálculo son (21):

$$E_r(\%) = \begin{vmatrix} - & 1.36 & 7.84 \\ 1.36 & - & 17.87 \\ 7.48 & 17.87 & - \end{vmatrix}$$

4. Varianza explicada por cada modo. Esta es función de los cosenos directores de los vectores espaciales; según (14): Siendo  $n$  el modo y  $j$  la estación (profundidad), se cumple que:

$$\sum_{n=1}^3 \gamma_n^2(x_j) = \sum_{n=1}^3 \cos^2 \mu_j^{(n)} = 1, \quad (27)$$

esto es, el total de la varianza de cada estación está distribuido entre sus tres modos. En  $R^2$  los vectores calculados son:

	1er. modo	20. modo
$x_1$ :	97.50 %	2.50 %
$x_2$ :	90.29 %	9.71 %
$x_3$ :	64.86 %	35.14 %

Las diferencias relativas porcentuales se obtienen de (22) y, numéricamente, éstas son para ambos modos:

$$x_1: 0.032 \%$$

$$x_2: 1.751 \%$$

$$x_3: 19.80 \%$$

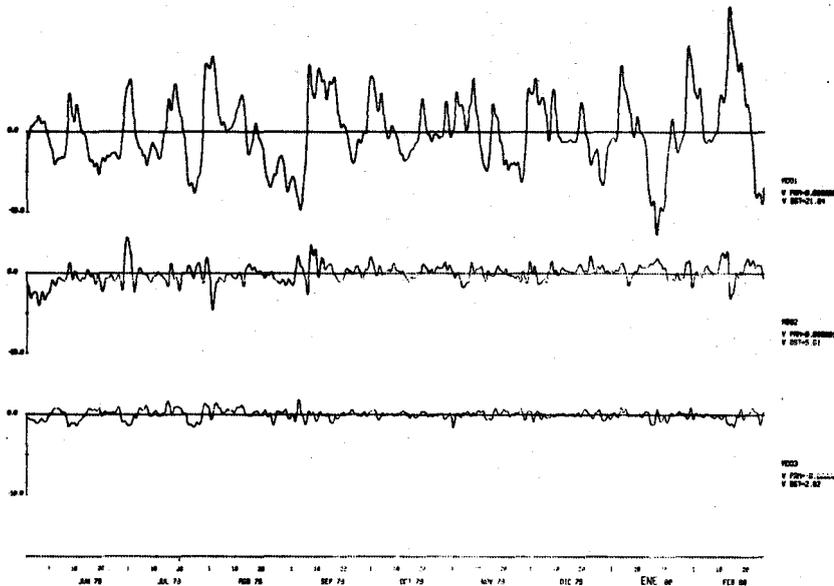


Fig. 4. Series temporales de los coeficientes de los tres primeros modos de análisis por funciones ortogonales empíricas.

## V. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un esquema geométrico de las funciones ortogonales empíricas, cuya representación permite efectuar una rápida visualización de las características cualitativas y cuantitativas de la estadística de los datos.

El ejemplo ha mostrado que la contracción de 3 a 2 dimensiones no produce errores relativos significativos, lo cual es debido a que los dos primeros modos explican un gran porcentaje (98.46%) de la varianza total. La figura 5 resume enton-

ces las características más importantes de la estadística de las observaciones originales. De la figura 5 y con cálculos sencillos, pueden obtenerse estimaciones rápidas de: las varianzas de cada estación, la correlación lineal entre estaciones, los porcentajes de varianza de cada estación que explica cada modo, etcétera, por lo cual manifestamos que este tipo de representación resulta ser mucho más informativa que la clásicamente usada (figura 3).

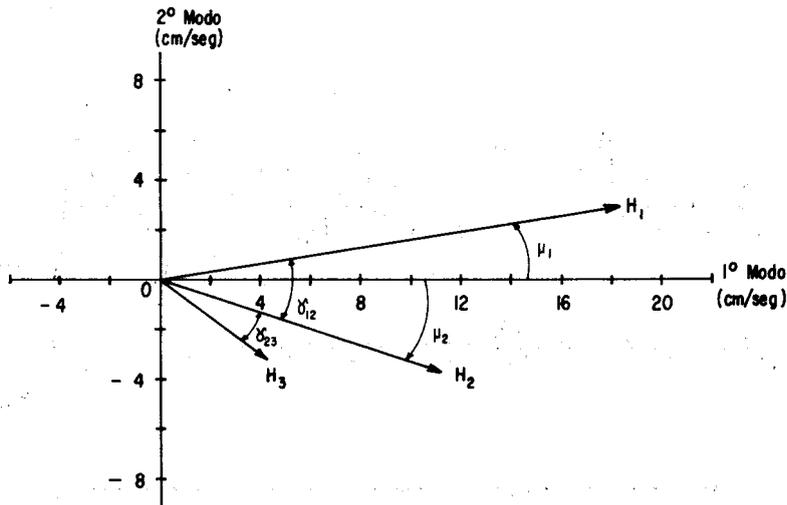


Fig. 5. Diagrama en  $R^2$  de los vectores espaciales, definidos por la expresión (10).

#### BIBLIOGRAFIA

- ALLEN, J. S. and R. L. SMITH, 1981. On the dynamics of wind-driven shelf currents. *Philosophical Transactions, The Royal Society of London*, A302: 617-634.
- BADAN-DANGON, A., 1982. Principal components of the velocity field off NW Africa. *Rapports et Proces-Verbaux. CIEM*. 180.
- BARTON, E. D., J. M. ROBLES P., A. AMADOR B. y C. MORALES Z., 1980. Un año de observaciones de corrientes y temperaturas frente a Baja California. Reporte interno. CICESE.
- DAVIS, R. E., 1976. Predictability of sea surface temperature and sea level pressure anomalies over the North Pacific Ocean. *J. of Phys. Ocean.*, 6, 249-266.
- KOSAMBI, D. D., 1943. Statistics in function space. *J. Indian Math. Soc.*, 7, 76-88.

- KUNDU, P. K., J. S. ALLEN and R. L. SMITH, 1975. Modal decomposition of the velocity field near the Oregon coast. *J. of Phys. Ocean.*, 5, 683-704.
- KUTZBACH, J. E., 1967. Empirical eigenvectors of sea-level pressure, surface temperature and precipitation complexes over North America. *J. Appl. Meteor.*, 6, 791-802.
- LORENZ, E. N., 1956. Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction. Scientific report No. 1. Statistical Forecasting Project. Department of Meteorology. Massachusetts Institute of Technology.
- LUMLEY, J. L., 1970. Stochastic Tools in Turbulence. Academic Press, 194 pp.
- PREISENDORFER, R. W., 1977. Most probable eigenvalues of a random covariance matrix. SIO reference series 77-20, Scripps Institution of Oceanography.
- SMITH, R. L., 1981. A comparison of the structure and variability of the flow field in three coastal upwelling regions: Oregon, Northwest Africa, and Perú. In: F. A. Richards (Ed.) Coastal Upwelling. AGU, 107-118.
- WANG, D. P. and J. J. WALSH, 1976. Objective analysis of the upwelling ecosystem off Baja California. *J. Mar. Res.*, 34, 43-60.
- WINANT, C. D. and D. G. AUBREY, 1976. Stability and impulse function of empirical eigenfunctions. Proceedings of 15th coastal Engineering Conference ASCE.
- WINANT, C. D., D. L. INMAN and C. E. NORDSTROM, 1975. Description of seasonal beach changes using empirical eigenfunctions. *J. Geoph. Res.*, 80, 1979-1986.